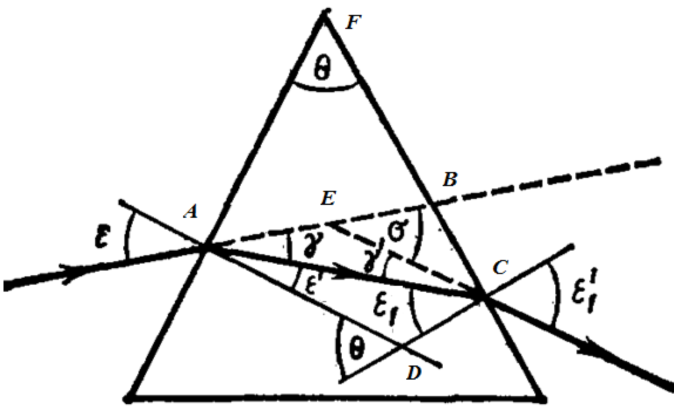
Разбор практических задач по теме «Геометрическая оптика»

Задача 1. На стеклянную призму с преломляющим углом θ=50° падает под углом ε=30° луч света. Определить угол отклонения σ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1.56.

Дано: θ, ε, n
Найти: σ-?

Решение.

Сделаем рисунок:



Из треугольника AEC определяем из условия, что сумма углов треугольника равна π:

$$\pi - \sigma + \gamma + \gamma' = \pi\,,$$

откуда

$$\sigma = \gamma + \gamma'.$$

Далее выразим углы γ и γ' через углы ε, ε', ε_1, ε_1':

$$\gamma = \varepsilon - \varepsilon'$$

$$\gamma' = \varepsilon_1' - \varepsilon_1$$

Подставляем в формулу $\sigma = \gamma + \gamma'$:

$$\sigma = \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon_1' - \varepsilon_1$$

Вычисляем последовательно углы ε, ε', ε_1, ε_1'

Угол ε известен из условия.

Угол ε' находится из закона преломления на левой грани призмы:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = n\,,$$

откуда

$$\sin\varepsilon' = \frac{\sin\varepsilon}{n}, \quad \varepsilon' = \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}.$$

Угол ε_1 находим из треугольника ADC:

$$\pi - \theta + \varepsilon' + \varepsilon_1 = \pi,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \theta - \varepsilon' = \theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}$$

Углы ε_1 и ε_1' связаны законом преломления на правой грани призмы:

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_1'} = \frac{1}{n},$$

отсюда находим ε_1':

$$\varepsilon_1' = \arcsin(n\sin\varepsilon_1)$$

Подставляем найденные значения ε, ε', ε_1, ε_1' в формулу $\sigma = \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon_1' - \varepsilon_1$:

$$\sigma = \varepsilon - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n} + \arcsin(n\sin\varepsilon_1) - \theta + \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n} =$$

$$= \varepsilon + \arcsin\left(n\sin\theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}\right) - \theta.$$

Ответ: $\sigma = \varepsilon + \arcsin\left(n\sin\left(\theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}\right)\right) - \theta$

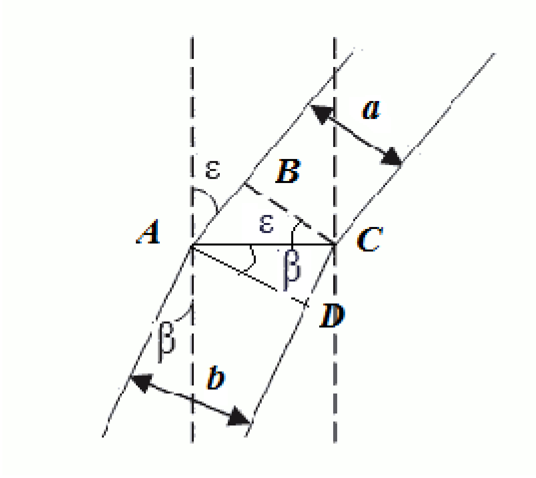
Задача 2. Пучок параллельных лучей падает на толстую стеклянную пластину под углом ε, и преломляясь переходит в стекло. Ширина пучка в стекле равна b. Определить ширину a пучка в воздухе.

Дано: b, ε, n

Найти: a-?

Решение.

Сделаем рисунок:



Из рисунка видно, что ширина луча в стекле равна

$$b = |AD|,$$

а в воздухе

$$a = |BC|.$$

Из треугольника ABC имеем

$$|AC| = \frac{|BC|}{\cos\varepsilon} = \frac{a}{\cos\varepsilon}.$$

Из треугольника ACD имеем

$$|AC| = \frac{|AD|}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\beta}.$$

Приравнивая левые части последних двух формул, получаем:

$$\frac{a}{\cos\varepsilon} = \frac{b}{\cos\beta},$$

откуда

$$a = b\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta}.$$

В этой формуле неизвестен угол β, который можно найти, используя закон преломления:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} = n,$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{\sin\varepsilon}{n}.$$

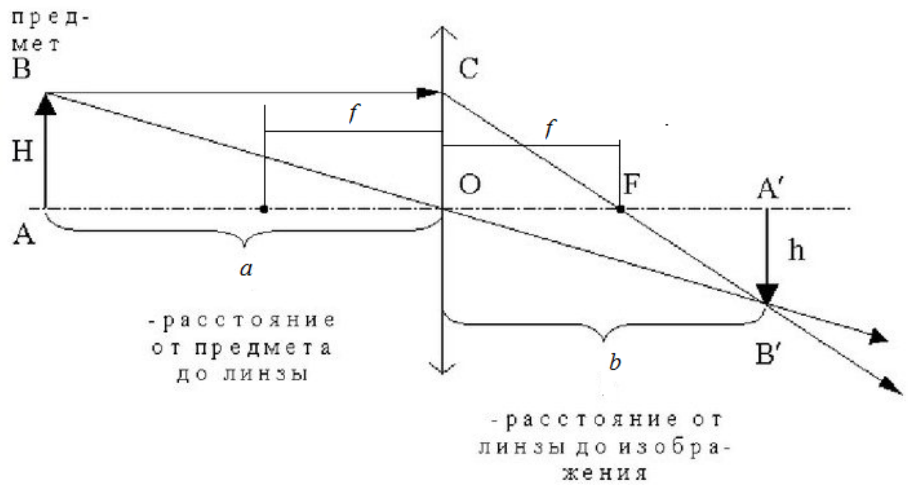
Тогда

$$a = b\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta} = b\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = b\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varepsilon}{n}\right)^2}} = \frac{bn\cos\varepsilon}{\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}}$$

Ответ: $a = \dfrac{bn\cos\varepsilon}{\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}}$

Формула тонкой линзы.

Пусть R_1 и R_2 - радиусы кривизны поверхности линзы, F - фокусное расстояние линзы, a - расстояние от предмета до линзы, b - расстояние от изображения до линзы. По лекции эти величины мы можем считать алгебраическими, т.е. принимающими положительные значения, если они отложены от линзы в направлении лучей, и, наоборот, отрицательными, если они отложены от линзы против направления лучей. Тогда формула тонкой линзы имеет вид.



$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a} = (n_{21}-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

Для решения практических задач можно считать величины a, b, f, R_1 и R_2 всегда положительными, а знаки ставить перед слагаемыми в формуле линзы:

$$\pm\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b} = \pm\frac{1}{f},$$

При этом знаки ставятся в соответствие со следующими правилами:

$+\frac{1}{f}$, если линза собирающая; $-\frac{1}{f}$, если линза рассеивающая; $+\frac{1}{a}$, если источник действительный; $-\frac{1}{a}$, если источник мнимый, когда на линзу падает сходящийся поток лучей; $+\frac{1}{b}$, если изображение действительное; $-\frac{1}{b}$, если изображение мнимое. При этом фокусное расстояние линзы f рассматривается как положительное и определяется как:

$\frac{1}{f}=(n_{21}-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, если линза двояковыпуклая или двояковогнутая;

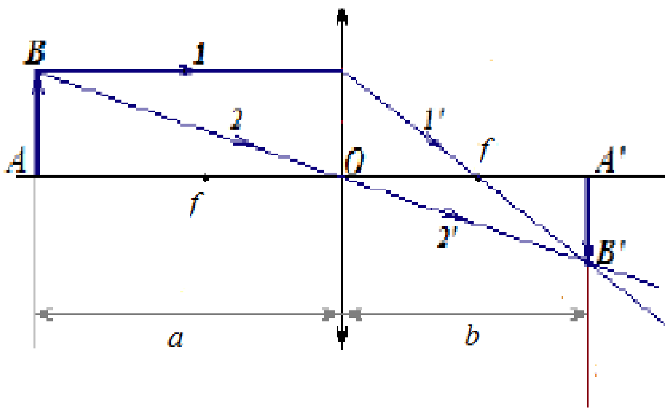
$\frac{1}{f}=(n_{21}-1)\cdot\left|\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right|$, если линза выпукло-вогнутая;

$\frac{1}{f}=(n_{21}-1)\cdot\frac{1}{R}$, если линза плосковыпуклая или плосковогнутая.

Задача 3. Расстояние между точечным источником света и экраном равно L. Собирающая линза, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми равно l. Определите фокусное расстояние линзы.

Дано: L, l
Найти: f

Решение.



Запишем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

По условию задачи

$$a+b=L,$$

Отсюда

$$b=L-a.$$

Подставим в формулу линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}=\frac{1}{f}.$$

Будем рассматривать это уравнение как уравнение с неизвестной величиной a при заданных и известных величинах L и f. Решим его относительно a:

$$\frac{L}{a(L-a)}=\frac{1}{f},$$

$$a(L-a)=Lf,$$

$$a^2-La+Lf=0.$$

Решая квадратное уравнение находим два корня:

$$D=L^2-4Lf$$

$$a_1=\frac{L+\sqrt{L^2-4Lf}}{2}, \quad a_2=\frac{L-\sqrt{L^2-4Lf}}{2}.$$

Эти решения соответствуют двум положениям линзы, дающим изображения предмета при заданных величинах L и f.

Заметим, что $a_1>a_2$. По условию задачи

$$a_1-a_2=l.$$

Или

$$\frac{L+\sqrt{L^2-4Lf}}{2}-\frac{L-\sqrt{L^2-4Lf}}{2}=l.$$

Или

$$\sqrt{L^2-4Lf}=l.$$

Отсюда выражаем f:

$$L^2-4Lf=l^2,$$

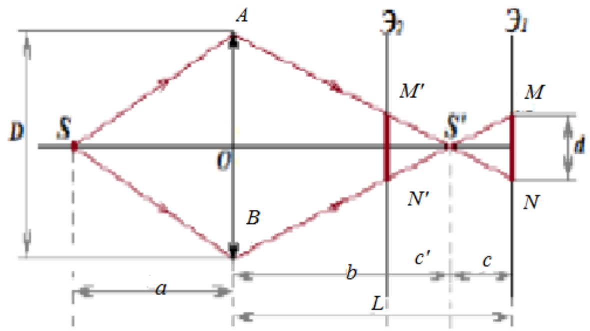
$$f=\frac{L^2-l^2}{4L}.$$

Ответ: $f=\dfrac{L^2-l^2}{4L}$.

Задача 4. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F =15 см. Диаметр линзы D=6 см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник света, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром d = 4 см? Расстояние от линзы до экрана равно L =100 см.

Дано: F =15 см, D = 6 см, d = 4 см, L =100 см.
Найти: a-?

Решение. Сделаем рисунок.



Светлое пятно на экране может получиться при двух различных положениях экрана – когда изображение источника расположено за экраном и перед экраном (см. рисунок).

Рассмотрим сначала случай, когда экран расположен в положении $Э_1$. Треугольники $S'AB$ и $S'MN$ подобны. Следовательно, отношение длин сторон BS' и $S'N$ равно отношению длин сторон AB и MN:

$$\frac{|BS'|}{|S'N|} = \frac{|AB|}{|MN|}$$

или

$$\frac{b}{c} = \frac{D}{d}.$$

По условию $b + c = L$. Подставляем найденное значение $c = L - b$ находим расстояние от изображения до линзы b:

$$\frac{b}{L-b} = \frac{D}{d},$$

$$bd = D(L-b),$$

$$bd + Db = DL,$$

$$b(d+D) = DL,$$

$$b = \frac{DL}{d+D}.$$

Теперь запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Из этой формулы находим a:

$$a=\frac{Fb}{b-F}.$$

Подставляем в данную формулу найденное ранее значение b:

$$a=\frac{F\dfrac{DL}{d+D}}{\dfrac{DL}{d+D}-F}=F\frac{DL}{d+D}\frac{d+D}{DL-dF-DF}=\frac{FDL}{DL-dF-DF}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда экран расположен в положении Э$_2$. Треугольники *S'AB* и *S' M' N'* подобны. Следовательно, отношение длин сторон *BS'* и *S'N* равно отношению длин сторон *AB* и *MN*:

$$\frac{|BS'|}{|S'N'|}=\frac{|AB|}{|M'N'|}$$

или

$$\frac{b}{c'}=\frac{D}{d}.$$

По условию $b-c'=L$. Подставляем найденное значение $c'=b-L$ находим расстояние от изображения до линзы *b*:

$$\frac{b}{b-L}=\frac{D}{d},$$

$$bd=D(b-L),$$

$$b(D-d)=DL,$$

$$b=\frac{DL}{D-d}.$$

Теперь запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Из этой формулы находим a:

$$a=\frac{Fb}{b-F}.$$

Подставляем в данную формулу найденное ранее значение b:

$$a=\frac{F\dfrac{DL}{D-d}}{\dfrac{DL}{D-d}-F}=F\frac{DL}{D-d}\frac{D-d}{DL-DF+dF}=\frac{FDL}{DL-DF+dF}.$$

Ответ: $a_1 = \dfrac{FDL}{DL - dF - DF}, a_2 = \dfrac{FDL}{DL - DF + dF}$.

Задача 5. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Точечный источник находится на расстоянии $a = 30$ см от первой линзы (см. рисунок). На каком расстоянии от второй линзы находится изображение, даваемое системой двух линз?

Дано: $F_1 = 15$ см, $F_1 = 15$ см, $d = 10$ см, $a = 30$ см

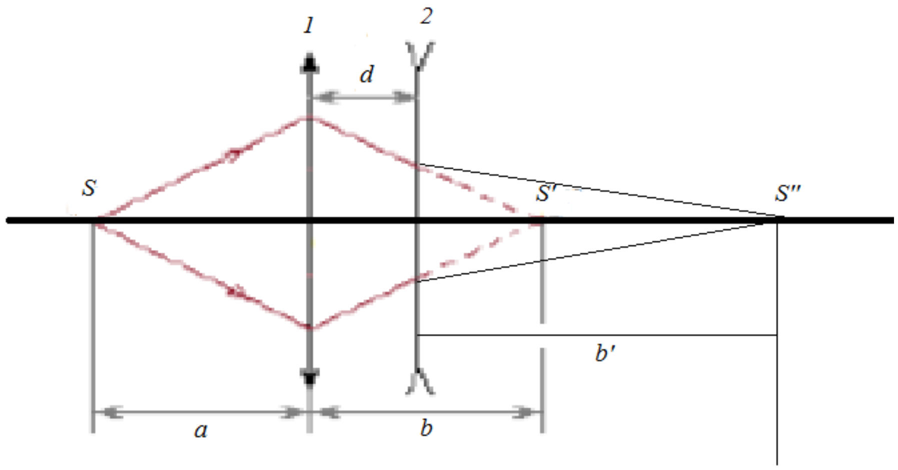
Найти: $b' - ?$

Решение.

Найдем изображение S', даваемое первой линзой. Пусть b - расстояние от линзы до изображения. Тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1},$$

$$b = \frac{aF_1}{a - F_1}.$$



В данной задаче из условия следует $b > d$, значит на вторую линзу падают сходящиеся лучи. Это означает, что S' является мнимым предметом для второй линзы.

Расстояние от S' до второй линзы равно

$$a' = b - d.$$

Записываем формулу тонкой линзы для второй линзы:

$$-\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = -\frac{1}{F_2},$$

откуда

$$b' = \frac{a' F_2}{a' + F_2}.$$

Подставляем $a' = b - d$:

$$b' = \frac{(b-d)F_2}{b - d + F_2}.$$

Подставляем $b = \frac{aF_1}{a - F_1}$:

$$b' = \frac{\frac{aF_1}{a - F_1}F_2 - dF_2}{\frac{aF_1}{a - F_1} - d + F_2} = \frac{aF_1F_2 - daF_2 + dF_1F_2}{aF_1 + (a - F_1)(F_2 - d)}$$

Ответ: $b' = \frac{aF_1F_2 - daF_2 + dF_1F_2}{aF_1 + (a - F_1)(F_2 - d)}$.

Задача 6. Лампочка, потребляющая мощность P=75 Вт, создает на расстоянии r=3 м при нормальном падении лучей освещенность E=8 лк. Определить удельную мощность p лампочки (в ваттах на канделу) и световую отдачу η лампочки (в люменах на ватт).

Решение.

Примем лампочку за точечный источник A.

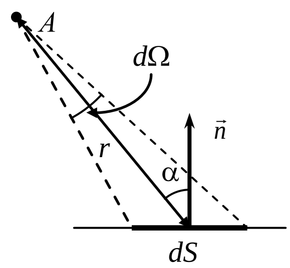
Удельная мощность лампочки (в ваттах на канделу) есть отношение потребляемой мощности лампочки к силе света лампочки:

$$p = \frac{P}{I}.$$

Световая отдача лампочки (в люменах на ватт) есть отношение светового потока, излучаемого лампочкой по всем направлениям к потребляемой мощности лампочки:

$$\eta = \frac{\Phi}{P}.$$

Освещенность площадки произвольной площадки, создаваемая точечным источником есть:



$$E = \frac{I \cos\alpha}{r^2},$$

где r - расстояние между источником и поверхностью, I - сила света и α - угол между нормалью к поверхности и направлением на источник (см. рисунок). Так как лучи падают по нормали, то $\alpha = 0$ и

$$E = \frac{I}{r^2}.$$

Отсюда

$$I = E \cdot r^2 .$$

Сила света I – это световой поток, излучаемый точечным источником в пределах единичного телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} .$$

Тогда полный световой поток по всем направлениям, излучаемый лампой есть

$$\Phi = 4\pi \cdot I = 4\pi \cdot E \cdot r^2 .$$

Подставляя $I = E \cdot r^2$ и $\Phi = 4\pi \cdot E \cdot r^2$ в формулы $p = \frac{P}{I}$ и $\eta = \frac{\Phi}{P}$, получаем ответы:

$$p = \frac{P}{E \cdot r^2} ,$$

$$\eta = \frac{4\pi \cdot E \cdot r^2}{P} .$$

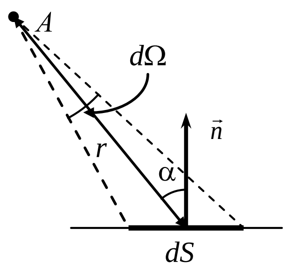
Задача 7. Над центром круглого стола радиусом *r*=80 см на высоте *h*=60 см висит лампа силой света *I*=100 кд. Определить:

1) освещенность E_1 в центре стола;
2) освещенность E_2 на краю стола;
3) световой поток *Ф*, падающий на стол;
4) среднюю освещенность <*E*> стола.

Решение.

Освещенность произвольной площадки, создаваемая точечным источником есть:

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2} ,$$

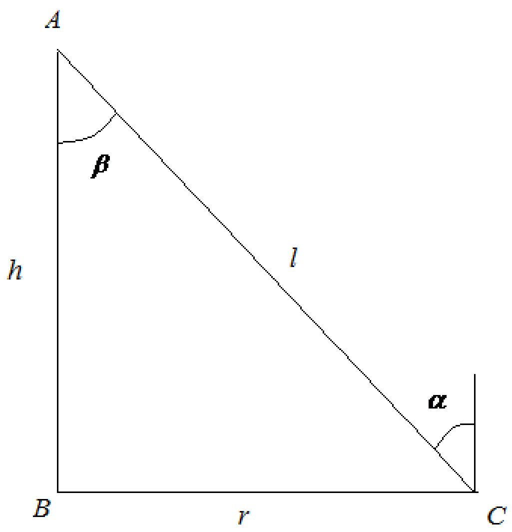


где r - расстояние между источником и поверхностью, I - сила света и α - угол между нормалью к поверхности и направлением на источник (см. рисунок).

1) В центре стола $\alpha = 0$, $r = h$ и мы имеем

$$E_1 = \frac{I}{h^2} .$$

2) На краю стола (см. рисунок)



мы имеем

$$E_2 = \frac{I}{l^2}\cos\alpha = \frac{I}{h^2 + r^2}$$

Так как

$\cos\alpha = \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, $l^2 = h^2 + r^2$, то

$$E_2 = \frac{I}{l^2}\cos\alpha = \frac{I}{h^2 + r^2}\frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{Ip}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Световой поток Φ, падающий на стол равен в силу формулы

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

произведению силы света источника на величину телесного угла, соответствующего прямому конусу с основанием, которым является стол:

$$\Phi = I \cdot \Omega$$

Формула для телесного угла при вершине прямого кругового конус известен из геометрии:

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right),$$

где θ - плоский угол у вершины конуса. В нашем случае $\frac{\theta}{2} = \alpha$. Поэтому

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

и

$$\Phi = 2\pi \cdot I \cdot (1 - \cos\alpha) = 2\pi \cdot I \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right).$$

4) Средняя освещенность <E> стола есть отношение светового потока, падающего на стол к площади стола:

$$\langle E\rangle = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\pi \cdot I \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right)}{\pi \cdot r^2}.$$

Ответ: $E_1 = \frac{I}{h^2}$, $E_2 = \frac{Ip}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\Phi = 2\pi \cdot I \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right)$,

$$\langle E\rangle = \frac{2\pi \cdot I \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right)}{\pi \cdot r^2}.$$