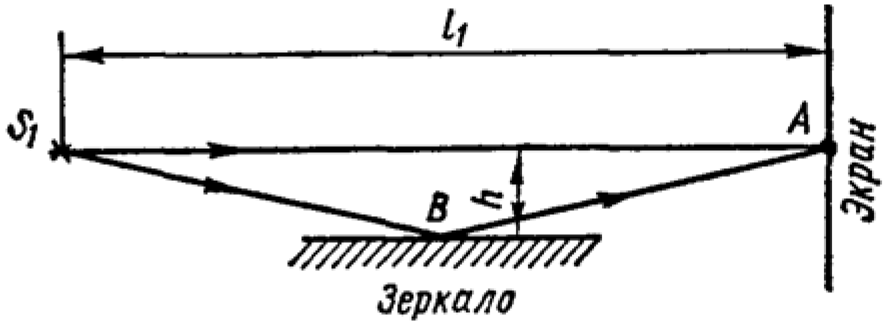
Разбор практических задач по теме «Интерференция световых волн»

Задача 1. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны λ=0,5мкм приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A, перпендикулярный экрану, и луч S_1BA,отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рисунок). Расстояние l_1 экрана от источника равно 1 м, расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм. Определить:

1) что будет наблюдаться в точке A экрана — усиление или ослабление интенсивности;

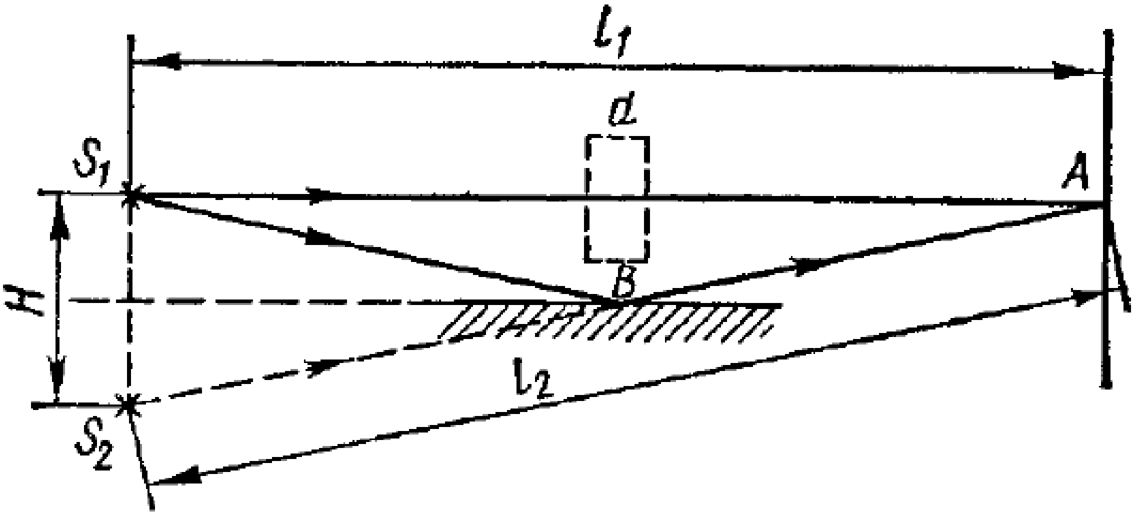
2) как изменится интенсивность в точке A, если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластинку стекла (n=1.55) толщиной d=6 мкм.



Дано: l_1=1 м, n=1.55, h=0.002 м, $d=6\cdot10^{-6}$ м

Решение.

Построим мнимое изображение S_2 источника S_1 в зеркале.



Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому при сложении волн, приходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda / 2}$$

Если m — целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m — целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

Часть 1). Оптическая разность хода Δ будет складываться из геометрической разности l_2—l_1 (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды оптически более плотной. Таким образом,

$$\Delta = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}$$

Так как $l_2 = \sqrt{l_1^2 + H^2}$ (из рисунка), то

$$l_2 - l_1 = l_1 \sqrt{1 + \frac{H^2}{l_1^2}} - l_1 = l_1 \left(\sqrt{1 + \frac{H^2}{l_1^2}} - 1 \right).$$

Величина $\frac{H}{l_1} << 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{1 + a} \approx 1 + \frac{a}{2}$$

при a<<1. Применив ее, получим

$$l_2 - l_1 \approx l_1 \left[1 + \frac{1}{2} (\frac{H}{l_1})^2 - 1 \right] = \frac{H^2}{2 l_1}.$$

Подставив полученное выражение l_2—l_1 в формулу $\Delta = l_2 - l_2 + \frac{\lambda}{2}$, найдем

$$\Delta = \frac{H^2}{2 l_1} + \frac{\lambda}{2}.$$

Зная Δ, по формуле $m = \frac{\Delta}{\lambda / 2}$ найдем m_1:

$$m = \frac{\frac{H^2}{2 l_1} + \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{H^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

Так как H=2h, то окончательно получим

$$m = 4 \frac{h^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

После вычисления найдем

$$m=33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

Часть 2). Стеклянная пластина толщиной d, поставленная на пути луча S_1A (рисунок), изменит оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути первого луча будет складываться из геометрической длины пути $l_1—d$ и оптической длины пути nd луча в самой пластине, т. е.

$$L=(l_1-d)+nd=l_1+(n-1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta'=l_2-L+\lambda/2=l_2-[l_1+(n-1)d]+\lambda/2,$$

или

$$\Delta'=\Delta-(n-1)d,$$

где

$$\Delta=\frac{H^2}{2l_1}+\frac{\lambda}{2}$$

из первой части задачи. Тогда число m' полуволн, укладывающихся на оптической разности хода равно

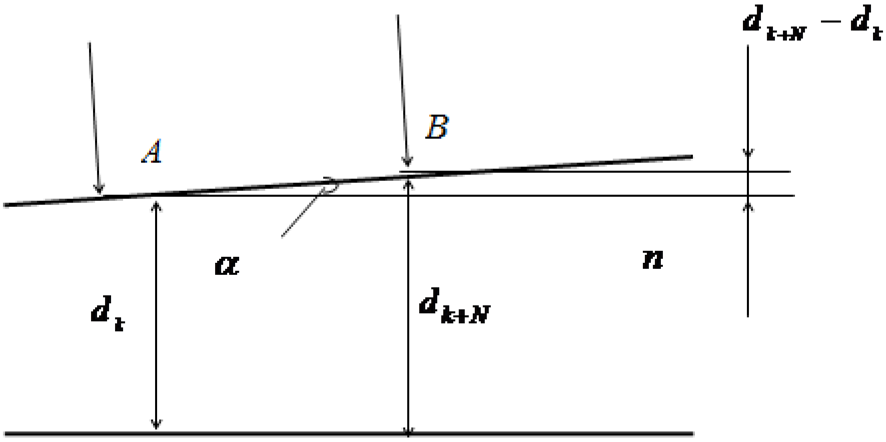
$$m'=\frac{\Delta'}{\lambda/2}=\frac{\Delta-(n-1)d}{\lambda/2}=m-2\frac{d(n-1)}{\lambda}.$$

Произведя вычисления, получим m' =19.8. Число длин полуволн оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19, то в точке A будет частичное усиление.

Задача 2. Свет с длиной волны $\lambda=0.55\ мкм$ от удалённого точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина $\Delta x=0.21мм.$ Найти:

а) угол между гранями клина;

б) степень монохроматичности света $(\frac{\Delta\lambda}{\lambda})$, если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $\ell\approx1.5см$ от вершины клина.



Решение: Интерференционная картина представляет собой чередующиеся тёмные и светлые полосы. Пусть в т. A наблюдается максимум k- го порядка (толщина клина d_k) и в т. B (с толщиной клина d_{k+N}) имеется максимум $k+N$-го порядка. Тогда $d_{k+N}-d_k$ - разность толщин клина в этих точках.

а) Учитывая, что угол α мал, запишем

$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{d_{k+N}-d_k}{AB}.$$

Далее, для расчёта расстояния между соседними максимумами используем условие максимумов для k-го и $k+1$-го порядков для интерференции для пластинки (выведено в лекциях) :

$$2d_k\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+\frac{\lambda}{2}=2k\frac{\lambda}{2}$$

$$2d_{k+1}\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+\frac{\lambda}{2}=2(k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Угол падения $\theta=0$, тогда

$$2d_k n+\frac{\lambda}{2}=k\lambda \qquad \text{и} \qquad 2d_{k+1}n+\frac{\lambda}{2}=(k+1)\lambda$$

Из последних уравнений получим

$$d_{k+1}-d_k=\frac{\lambda}{2n}.$$

Итак, $$\alpha=\frac{\lambda}{2n\Delta x}.$$

Подставив числа, получим: $\alpha=3^\circ$.

б) В природе не существует ни строго монохроматических волн. Реальные волны представляют собой суперпозицию монохроматических волн, длины которых лежать в интервале шириной $(\lambda,\lambda+\Delta\lambda)$ (спектральная область) в окрестности λ.

По условию исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии ℓ от вершины клина. На этом расстоянии расположены $k = \dfrac{\ell}{\Delta x}$ полос. Из уже полученной формулы $\alpha = \dfrac{\lambda}{2n\Delta x}$ имеем для расстояния между полосами

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha}$$

и

$$k = \frac{2n\ell\alpha}{\lambda}.$$

Если полосы исчезнут, то это означает, что максимумы волны с длиной λ совпадут с максимумами волны с длиной $\lambda + \Delta\lambda$. Данное условие означает
Для длины волны λ

$$k = \frac{2n\ell\alpha}{\lambda}$$

Для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$

$$k - 1 = \frac{2n\ell\alpha}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Из последних двух уравнений

$$\frac{2n\ell\alpha}{\lambda} - 1 = \frac{2n\ell\alpha}{\lambda + \Delta\lambda}$$

Отсюда

$$1 = \frac{2n\ell\alpha}{\lambda} - \frac{2n\ell\alpha}{\lambda + \Delta\lambda}$$

$$1 = \frac{2n\ell\alpha\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}$$

$$1 \approx \frac{2n\ell\alpha\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\lambda}{2n\ell\alpha}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 0{,}014.$$

Задача 3. Два когерентных источника света (λ=0,5 мкм) дают на экране интерференционную картину. Какой минимальной толщины d стеклянную (n_2

= 1,5) пластинку нужно поместить на пути одного из лучей, чтобы светлые полосы заменились темными?

Решение: При помещении пластинки на пути одного из лучей разность хода лучей изменится на величину

$$\Delta = n_2 d - n_1 d \ ,$$

где для вакуума $n_1 = 1$. Если светлые полосы заменяются на темные, то эта величина должна быть равна нечетному числу длин полуволн

$$\Delta = m\frac{\lambda}{2}$$

или

$$n_2 d - n_1 d = m\frac{\lambda}{2}.$$

Толщина пластинки минимальна при $m = 1$. Поэтому

$$n_2 d - n_1 d = \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда

$$d = \frac{\lambda}{2\left(n_2 d - n_1 d\right)}.$$

Задача 4. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 12.5\,\text{см}$ прижата к стеклянной пластинке. Диаметры десятого ($m_1 = 10$) и пятнадцатого ($m_2 = 15$) тёмных колец Ньютона в отражённом свете равны $d_1 = 1.0\,\text{мм}$ и $d_2 = 1.5\,\text{мм}$. Определить длину волны света.

Решение: Радиус *m*-го кольца Ньютона в отраженном свете имеет вид (формула, выведенная в лекциях):

$$r_k = \sqrt{mR\lambda} \ .$$

Запишем,

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{m_1 R\lambda}$$

и

$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{m_2 R\lambda} \ .$$

Или, возводя в квадрат

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = m_2 R\lambda \ ,$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = m_1 R\lambda \ .$$

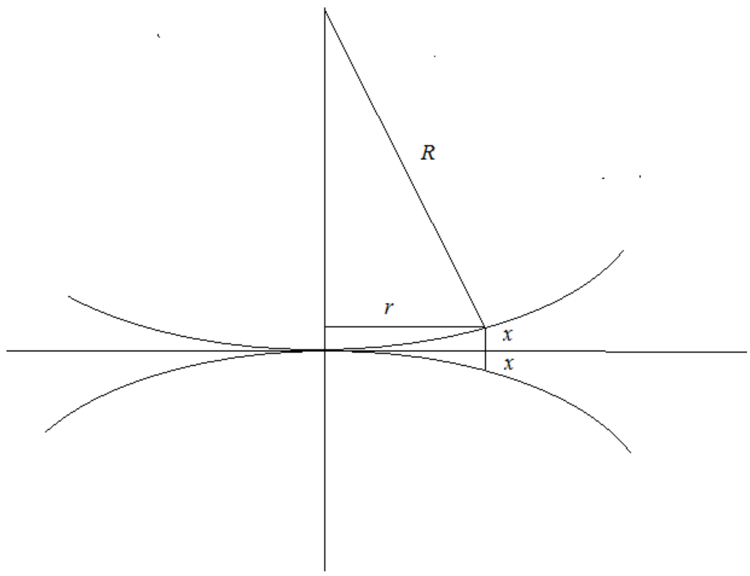
Вычтем из первого уравнения второе:.

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = R(m_2 - m_1)\lambda \ .$$

Отсюда
$$\lambda = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4(m_2 - m_1)R}$$
иди
$$\lambda = 0.50\ \text{мкм}.$$

Задача 5.

Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом кривизны *R*, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус *m*-го светлого кольца, наблюдаемого в отраженном свете длиной волны λ при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.



Сделаем рисунок. Если бы вместо нижней линзы стояла бы плоская пластинка, то согласно выводу в лекциях разность хода интерферирующих лучей (на рисунке они не изображены) была бы равна
$$\Delta = 2xn \pm \lambda/2.$$
Поскольку у нас стоит вместо плоской пластинки линза, то из рисунка видно, что расстояние x ***нужно увеличить вдвое*** и мы заменяем $x \to 2x$:
$$\Delta = 4xn \pm \lambda/2$$
Далее выводим формулу для радиусов колец Ньютона так же как в лекциях:
$$r^2 + (R - x)^2 = R^2 \quad \text{или} \quad r^2 = 2Rx - x^2.$$
Поскольку x << R, слагаемым x^2 можно пренебречь, т.е.
$$r^2 \approx 2Rx \quad \text{или} \quad x = r^2/2R.$$
Тогда
$$\Delta = \frac{2r^2}{R} \cdot n \pm \frac{\lambda}{2}.$$
Для светлых колец
$$\Delta = m\lambda,$$

или

$$\frac{2r^2}{R}\cdot n \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda\,,$$

откуда получаем ответ

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m+1)\,\lambda}{4n}R}\,.$$