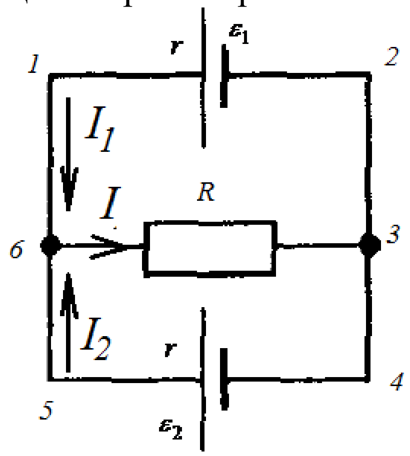
Примеры решения задач на тему «Постоянный ток».

Задача 1. Два элемента с ЭДС ε_1 и ε_2 соединены по схеме, показанной на рисунке. Внутреннее сопротивление элементов одинаково и равно r. Определить силу тока, идущего через сопротивление R.



Обозначим токи в ветвях I_1, I_2 и I и их направления выберем произвольно. По первому правилу Кирхгофа сумма токов, сходящихся в узле, равна 0:

$$I_1 + I_2 - I = 0$$

Будем обходить верхний контур (1236) по часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа сумма произведений токов на сопротивления в контуре равна сумме ЭДС:

$$-IR - I_1 r_1 = -\varepsilon_1$$

Будем обходить нижний контур (6345) по часовой стрелке:

$$IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2$$

Неизвестных токов – три, мы составили три уравнения. Этого достаточно, чтобы найти токи

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I = 0 \\ IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1 \\ IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Выразим I_1 из второго уравнения, а I_2 – из третьего (с учетом $r_1 = r_2 = r$):

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1}, \; I_2 = \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_1}$$

Подставим эти выражения в первое уравнение:

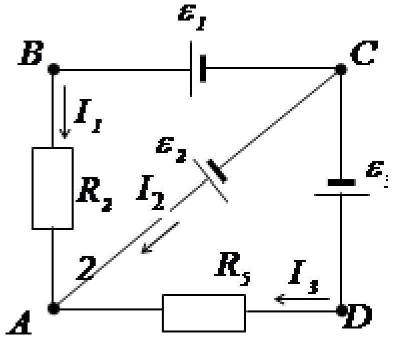
$$\frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1} + \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_1} = I$$

Выражаем I:

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{IR}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_1} - \frac{IR}{r_1} = I, \qquad \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_1} = I\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_1}\right)$$

$$I = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_1}}{1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_1}}$$

Задача 2. Определить силу тока, текущего через элементы цепи, если $\varepsilon_1 = 1B_1$, $\varepsilon_1 = 2B$, $\varepsilon_3 = 3B$, $r_1 = 1Ом$, $r_2 = 1/2Ом$, $r_3 = 1/3Ом$, $R_2 = 1Ом$, $R_5 = 1/3Ом$.



Решение: Электрическая цепь может быть рассчитана с помощью правил Кирхгофа.

Сначала необходимо выбрать (произвольно) направления токов в ветвях. Для узлов применим первое правило Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Применим второе правило Кирхгофа. Выберем условно-положительное направление обхода контура. Оно необходимо для определения знаков ЭДС и токов. Для контура АВСА – против часовой стрелки и получаем

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1(r_1 + R_2) - I_2 r_2 .$$

Если бы мы выбрали направление обхода контура по часовой стрелке, то перед всеми слагаемыми уравнения знак поменялся бы на противоположный, а само уравнение бы не изменилось.

Рассмотрим контур АСДА. Выберем за положительное направление обхода этого контура направление также против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5) \ .$$

Система уравнений

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1(r_1 + R_2) - I_2 r_2$$
$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5)$$

является замкнутой. Задача физически решена. Остается найти токи.

Из первого уравнения выражаем I_1

$$I_1 = -I_2 - I_3$$

и подставляем во второе уравнение

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -I_2(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_4)$$

Из уравнения $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5)$ выражаем I_2

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2}$$

и подставляем в уравнение $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -I_2(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_2)$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_2)$$

Выражаем отсюда I_3

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) - \left(\frac{(r_3 + R_5)}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) + (r_1 + R_2)\right)I_3$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) = -\frac{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)}{r_2}I_3$$

$$\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_2}{r_2} = -\frac{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)}{r_2}I_3$$

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_2 = -((r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2))I_3$$

$$I_3 = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r_2}{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)} = \frac{8}{9}\text{ A}$$

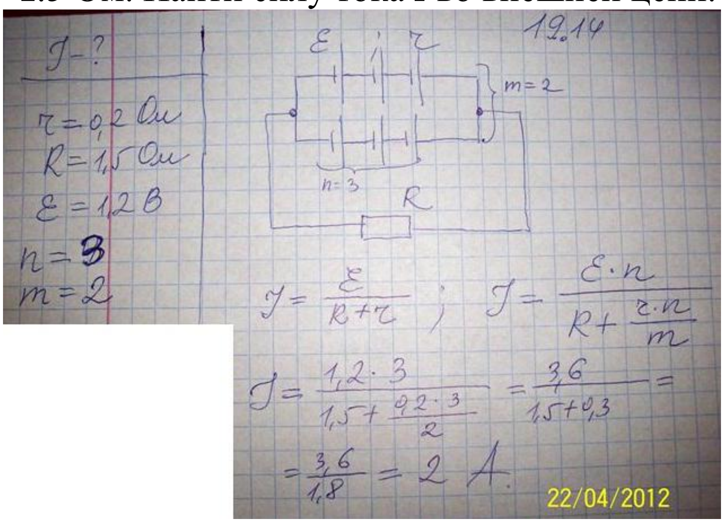
Далее находим:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2} = -\frac{1}{2}\text{ A}$$

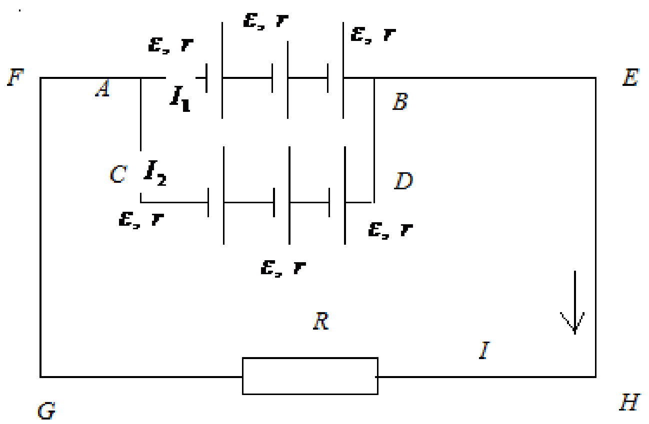
$$I_1 = -I_2 - I_3 = -\frac{5}{8}\text{ A.}$$

Минус означает о другом направлении тока.

Задача 3 (В-Ч 19.14) Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС ε каждого элемента равна 1.2 В, внутреннее сопротивление r =0.2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R= 1.5 Ом. Найти силу тока I во внешней цепи.



Оценки 2 балла (нет решения, есть только ответ).



По первому правилу Кирхгофа $I_1 + I_2 = I$. Но поскольку участки AB и CD одинаковы, то $I_1 = I_2$. Отсюда $I_1 = \frac{I}{2}$.

По второму правилу Кирхгофа для контура FABEHG мы имеем

$$I_1 r + I_1 r + I_1 r + IR = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$$

или

$$3I_1 r + IR = 3\varepsilon$$

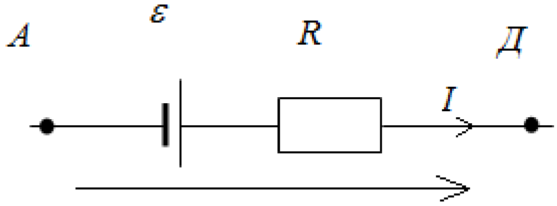
Подставляя $I_1 = \frac{I}{2}$ получаем

$$\frac{3}{2} Ir + IR = 3\varepsilon$$

Отсюда

$$I = \frac{3\varepsilon}{\frac{3}{2} r + R}$$

Задача 4. Определить силу тока, идущий по участку АД (рисунок). ЭДС источника $\varepsilon = 20\,B$, внутреннее сопротивление $r = 10\,Ом$, потенциалы точек А и Д соответственно равны: $\varphi_A = 5\,B$, $\varphi_Д = 15\,B$, сопротивление проводов $R = 3\,Ом$. Указать направление тока.



Решение: Выбираем направление на участке от А к Д, (это удобно, т.к. в этом направление $\varepsilon > 0$). Будем считать, что ток течёт в эту же сторону и запишем закон Ома для неоднородного участка:

$$I(R+r)=\varepsilon+(\varphi_A-\varphi_Д)$$

откуда

$$I=\frac{\varepsilon+(\varphi_A-\varphi_Д)}{R+r}.$$

После подстановки чисел, получим, что

$$I=-2\,A.$$

Т.к. в результате вычислений ток получился со знаком «-», это значит, что ток направлен в противоположную сторону.

Задача 5 Определить заряд *Q*, прошедший по проводу с сопротивлением *R*=3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_0=2 В до *U* =4 В в течение *t*=20с.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой *Q=It* нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда *dQ=Idt* и проинтегрируем:

$$Q=\int_0^t Idt.$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q=\int_0^t \frac{U}{R}dt.$$

Напряжение *U* в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U(t)=U_0+kt$$

где *k* - коэффициент пропорциональности. Подставив это выражение *U* в формулу (2), найдем

$$Q=\int_0^t\left(\frac{U_0}{R}+\frac{kt}{R}\right)dt=\frac{U_0}{R}\int_0^t dt+\frac{k}{R}\int_0^t tdt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q=\frac{U_0t}{R}+\frac{kt^2}{2R}=\frac{t}{2R}(2U_0+kt)$$

Значение коэффициента пропорциональности *k* найдем из формулы $U(t)=U_0+kt$ если заметим, что $U(t)=U$:

$$k=\frac{U-U_0}{t}$$

Подставив в формулу $Q=\frac{t}{2R}(2U_0+kt)$ найдем

$$Q=\frac{t}{2R}\left(2U_0+\frac{U-U_0}{t}t\right)=\frac{t(U+U_0)}{2R}$$

Считаем

Q=20 Кл.

Задача 6. Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом нарастает в течение времени Δt=2 с по линейному закону от I_0=0 до I_{max}=6 А. Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за время $t_1 = 1$с

Решение. Закон Джоуля - Ленца $Q= I^2Rt$ применим в случае постоянного тока (I =const). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 Rdt\,.$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I(t) = I_0 + kt\,,$$

где k - коэффициент пропорциональности, равный отношению приращений силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение.

$$I_{\max} = I_0 + k\Delta t$$

Или:

$$k = \frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t}$$

и поэтому

$$I(t) = \frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t}t$$

С учетом этого равенства формула $dQ = I^2(t)Rdt$ примет вид

$$dQ = \left(\frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t}t\right)^2 Rdt = \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2}t^2 dt$$

Для определения количества теплоты, выделившегося за конечный промежуток времени от 0 до t_1, это выражение следует проинтегрировать в пределах от 0 до t_1:

$$Q = \int_0^{t_1} \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2}t^2 dt = \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2}\int_0^{t_1} t^2 Rdt =$$

$$= \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2}\frac{t_1^3}{3}$$

Численный ответ

Q_1=60 Дж.