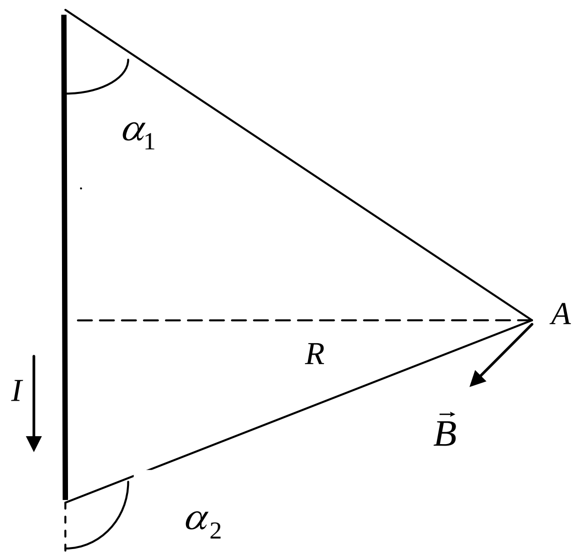
Задачи по теме «Постоянное магнитное поле»

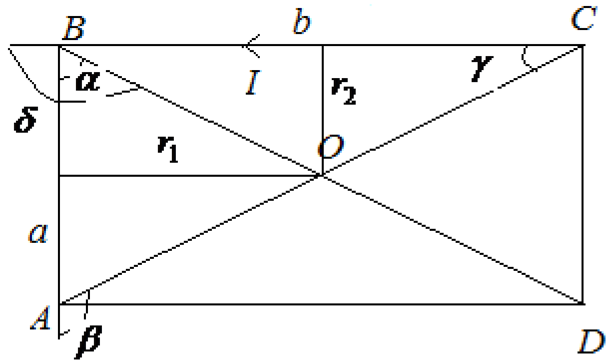
Важная формула, полученная в лекциях:



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

Задача 1 (В-Ч 21.27). По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток *I*=60 А. Длины сторон прямоугольника равны *a*=30 см и *b*=40 см. Определить магнитную индукцию *B* в точке пересечения диагоналей.

Решение:



Для стороны AB

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

Для стороны BC

$$B_{BC}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_2}\left(\cos\gamma-\cos\delta\right)$$

Кроме того

$$B_{AB}=B_{CD}$$
$$B_{BC}=B_{DA}$$

Поэтому

$$B=B_{AB}+B_{BC}+B_{CD}+B_{DA}=2B_{AB}+2B_{BC}$$

Найдем B_{AB} и B_{CB}

$$r_1=\frac{b}{2},\quad r_2=\frac{a}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

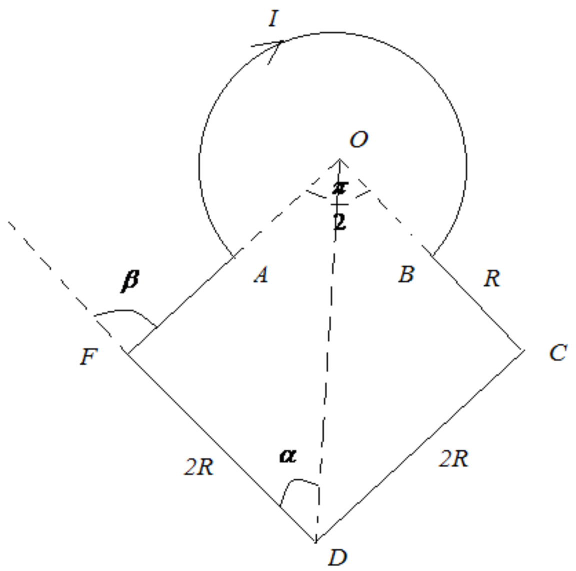
$$\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\delta=\cos(\pi-\gamma)=-\cos\lambda=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Поэтому

$$B=2B_{AB}+2B_{BC}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)-\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\left(\cos\gamma-\cos\delta\right)=$$
$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}2\cos\alpha+\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}2\cos\gamma=\frac{2\mu_0 I}{\pi b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$
$$=\frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

Задача 2 (В-Ч 21.32 е). По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I=100 А. Определить магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$ поля, создаваемого этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура равен 20 см.

Решение: (е)



Пусть B - магнитная индукция в точке O, создаваемая всем замкнутым контуром, а B_{AB}, B_{BC}, B_{CD}, B_{DF}, B_{FA} - магнитные индукции в точке O, создаваемые отдельными участками контура (см. рисунок). Направления вектора магнитной индукции от всех участков одинаковое, и мы можем складывать модули этих векторов. Тогда

$$B = B_{AB} + B_{BC} + B_{CD} + B_{DF} + B_{FA}$$

Вычислим отдельно B_{AB}, B_{BC}, B_{CD}, B_{DF}, B_{FA}

Поскольку в центре кругового тока радиуса R магнитная индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

а участок AB представляет собой $3/4$ окружности, то имеем

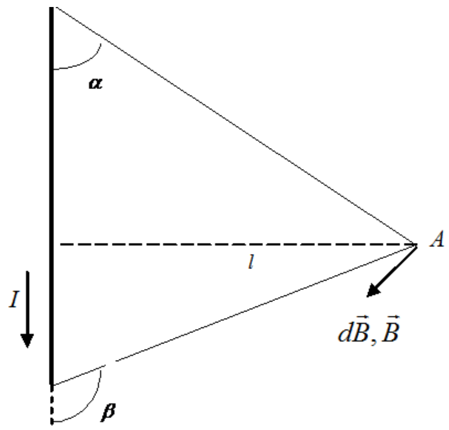
$$B_{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

Магнитные индукции B_{BC}, B_{FA} равна нулю, поскольку участки BC (FA) и точка O лежат на одной прямой и угол между участком и направлением на точку O равен нулю.

Далее, $B_{CD} = B_{DF}$

Вычислим B_{CD}

Воспользуемя формулой



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

У нас $l = 2R$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ и, таким образом,

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot 2R}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Тогда

$$B = B_{AB} + B_{CD} + B_{DF}$$

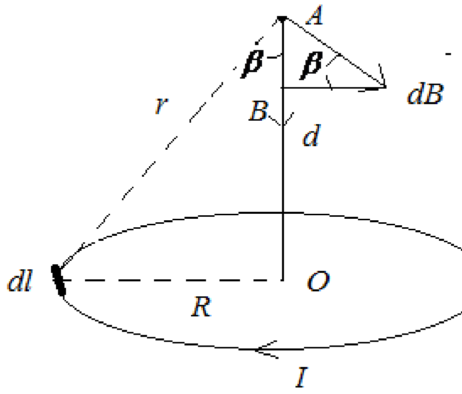
$$B = \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left(3\pi + \sqrt{2}\right)$$

Задача 3 (В-Ч 22.16). По кольцу радиусом R течет ток. На оси кольца на расстоянии d=1 м от его плоскости магнитная индукция B=10 нТл. Определить магнитный момент p_m кольца с током. Считать R много меньшим d.

Решение:

Найдем магнитное поле, создаваемое круговым проводником с током в точке А (см. рисунок)



Все элементы dl кругового проводника с током создают в точке A магнитное поле разных направлений, но результирующее поле будет направлено вертикально вниз (см. рисунок). Поэтому нам нужно учесть только проекции поля от каждого участка на вертикальную ось - $dB \cdot \sin\beta$. По закону Био-Савара-Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(R^2 + d^2\right)}dl.$$

$$dB \cdot \sin\beta = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{4\pi\left(R^2 + d^2\right)}dl.$$

$$B = \int\limits_{\text{по кольцу}} dB \cdot \sin\beta = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{4\pi\left(R^2 + d^2\right)}\int\limits_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I R \sin\beta}{2\left(R^2 + d^2\right)}.$$

Поскольку

$$\sin\beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}$$

то

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Нам B известно. Найдем отсюда ток I:

$$I = \frac{2B\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}}{\mu_0 R^2}$$

Магнитный момент равен

$$p_m = IS = I\pi R^2 = \frac{2B\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}}{\mu_0 R^2}\pi R^2 = \frac{2\pi B\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}}{\mu_0}$$

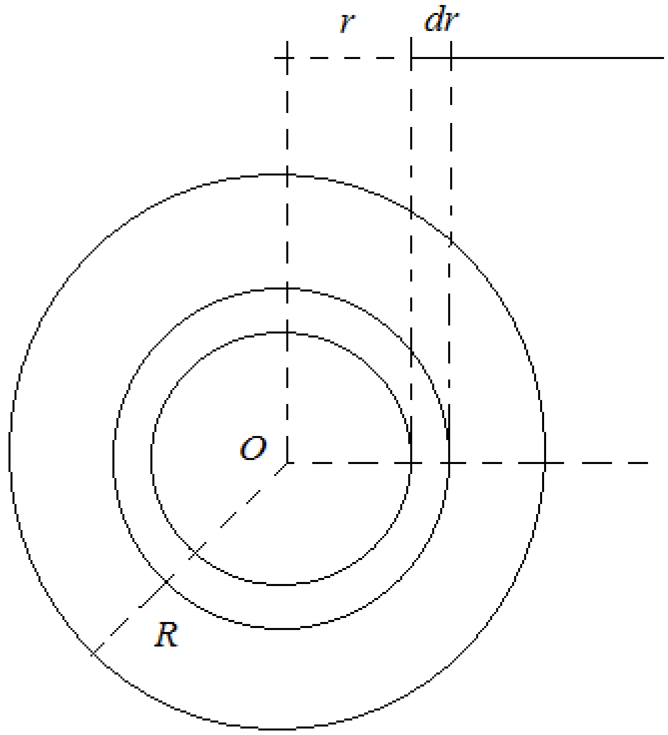
При $R << d$

$R^2 + d^2 \approx d^2$ и мы имеем

$$p_m \approx \frac{2\pi B d^3}{\mu_0}$$

Задача 4 (В-Ч 22.22). Диск радиусом R = 10 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q=0,2 мкКл. Диск равномерно вращаете с частотой n=20 с$^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого диском; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса *(p_m/L)*, если масса m диска равна 100 г.

Решение:



Диск имеет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Разобъем диск на концентрические кольца бесконечно малой толщины dr. Рассмотрим одно из таких колец. Радиус кольца обозначим через r.

Поверхностная плотность заряда диска равна

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Поэтому заряд выбранного нами кольца, площадь поверхности которого равна $dS = 2\pi r dr$ равен

$$dQ = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Поскольку диск вращается, то кольцо тоже вращается. При вращении кольца происходит перенос заряда. За время равное периоду $T = \frac{1}{n}$ (один оборот) происходит перенос всего заряда кольца $dQ = \sigma 2\pi r dr$. Это означает, что вращение кольца создает ток силой

$$dI = \frac{dQ}{T} = 2\pi n \sigma r dr$$

Площадь внутренности кольца равна

$$S = \pi r^2$$

Тогда при вращении кольца создается магнитный момент

$$dp_m = dI \cdot S = 2\pi n \sigma r dr \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 n \sigma r^3 dr$$

Полный магнитный момент, создаваемый всем диском есть сумма магнитных моментов, создаваемых всеми кольцами:

$$p_m = \int\limits_{\text{по кольцам}} dp_m = \int_0^R 2\pi^2 n \sigma r^3 dr = 2\pi^2 n \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi^2 n \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2 n \sigma R^4}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2 n Q R^4}{2\pi R^2} = \frac{\pi n Q R^2}{2}$$

Момент импульса диска равен

$$L = J\omega$$

где

$J = \frac{1}{2} m R^2$ - момент инерции диска, $\omega = 2\pi n$ - угловая скорость вращения диска.

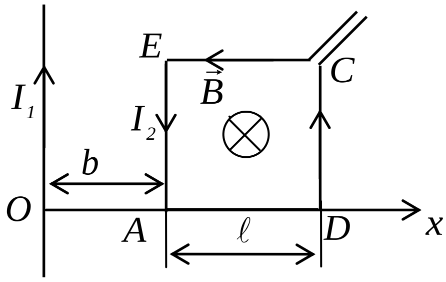
Таким образом

$$L = \frac{1}{2} m R^2 2\pi n = \pi m R^2 n$$

и отношение магнитного момента к моменту импульса равно

$$\frac{p_m}{L} = \frac{\frac{\pi n Q R^2}{2}}{\pi m R^2 n} = \frac{Q}{2m}$$

Задача 5. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток $I_1 = 5\,A$, расположена квадратная рамка, по которой течет ток $I_2 = 1\,A$. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Сторона рамки $\ell = 10\,см,$ расстояние от стороны AE до прямого проводника $b = 5 см.$ (рисунок) Магнитная проницаемость среды $\mu = 2$.



Решение: Рамка находится в магнитном поле, созданном прямолинейным проводником с током. Во всех частях рамки вектор магнитной индукции $\vec{B}$ этого поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка. Ось Ox направлена от проводника с током вправо. Модули сил, действующих на стороны рамки, обозначим соответственно F_{AE}, F_{EC}, F_{CD} и F_{DA}.

Поскольку проводник с током бесконечен, то магнитное поле на сторонах рамки AE и CD однородно. Поэтому для нахождения сил, действующих на стороны AE и CD рамки, воспользуемся законом Ампера для конечных проводников в однородном поле

$$F = IB\ell \sin\beta ,$$

Магнитная индукция от бесконечного прямого проводника на расстоянии b от него определятся формулой (лекции) для напряжённости магнитного поля

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi b}.$$

Тогда для стороны AE

$$F_{AE} = I_2 B_{AE}\ell = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi b}.$$

Аналогично для стороны CD

$$F_{CD} = I_2 B_{CD}\ell = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi (b+\ell)}.$$

Для нахождения сил, действующих на стороны EC и DA рамки, следует учесть, что магнитная индукция различна в разных местах этих сторон рамки, поэтому необходимо выполнить интегрирование.

Пусть сила dF_{EC} действует на элементарный участок dx этого проводника, расположенный на расстоянии x от прямолинейного проводника. Тогда

$$dF_{BC} = I_2 B dx = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 dx}{2\pi x}.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$F_{EC} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \int_b^{b+\ell} \frac{dx}{x} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$$

(сила направлена вниз).

Рассуждая аналогично для участка DA, получаем

$$F_{DA} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \int_b^{b+\ell} \frac{dx}{x} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$$

(сила направлена вверх).

Т.к. силы F_{EC} и F_{DA} одинаковы и противоположно направлены, то их равнодействующая равна нулю. Поэтому общая равнодействующая равна

$$F = F_{AE} - F_{CD} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi b} - \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi(b+\ell)} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\ell}\right).$$

Вычисляя, находим $F = 1{,}33$ мкН.

Задача 6 (В-Ч 23.20). Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса m_1 которого равна 12 а. е. м., описал дугу окружности радиусом R_1 =4 см. Определить массу m_2 другого иона, который описал дугу окружности радиусом R_2 =6 см.

Решение:

Пусть каждый ион имеет заряд q. Если ион с зарядом q прошел разность потенциалов U, то он приобрел кинетическую энергию, равную уменьшению его потенциальной энергии, т.е.

$$\frac{mv^2}{2} = qU$$

Отсюда скорость иона, после прохождения им разности потенциалов U равна

$$v = \sqrt{\frac{2qeU}{m}}$$

Если после прохождения разности потенциалов ион влетает в однородное магнитное поле перпендикулярное скорости, то он начинает двигаться по окружности радиуса R под действием силы Лоренца $F = qvB$. Согласно 2 закону Ньютона

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

или

$$m\frac{v}{R} = qB$$

Подставляя v получаем

$$\frac{m}{R}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = qB$$

или

$$\sqrt{2qUm} = qBR$$

Запишем данное уравнение для каждого иона

$$\sqrt{2qUm_1} = qBR_1$$
$$\sqrt{2qUm_2} = qBR_2$$

Разделим одно уравнение на другое

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Отсюда

$$m_2 = m_1\frac{R_2^2}{R_1^2}$$