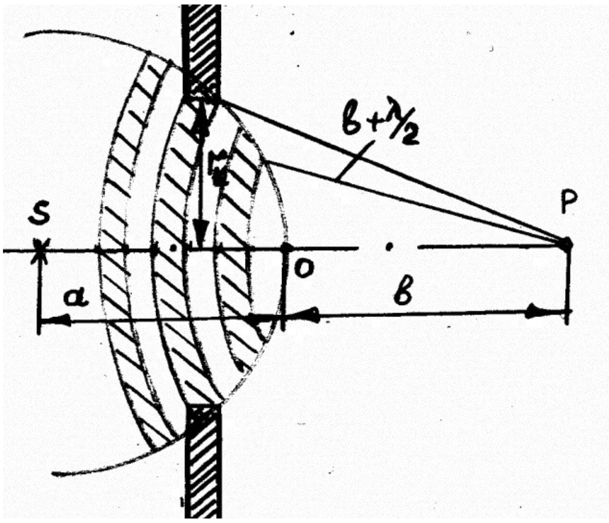
Задачи по теме «Дифракция и поляризация световых волн»

Задача 1. Плоская монохроматическая световая волна ($\lambda = 0{,}6$мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. Диаметр отверстия 6мм. За диафрагмой на расстоянии 3м от неё находится экран (рисунок). Определить: 1) сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? 2) каким будет центр дифракционной картины на экране?

Дано: $\lambda = 0{,}6$мкм, $d = 6$мм $b = 3$м

Найти: $k - ?$

Решение: В лекции была получена формула для радиуса k-й зоны Френеля для сферической



$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}},$$

где a и b - соответственно расстояние от источника до рассматриваемой волновой поверхности волны и расстояния от волновой поверхности до точки наблюдения.

В нашем случае волна плоская, а не сферическая. Плоская волна может рассматриваться как сферическая у которой источник удален в бесконечность (в этом случае волновая поверхность переходит в плоскость). Это означает, что в формуле $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}}$, мы должны взять предел $a \to \infty$:

$$r_k = \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}} = \sqrt{k\lambda b}.$$

Выразим из этой формулы k:

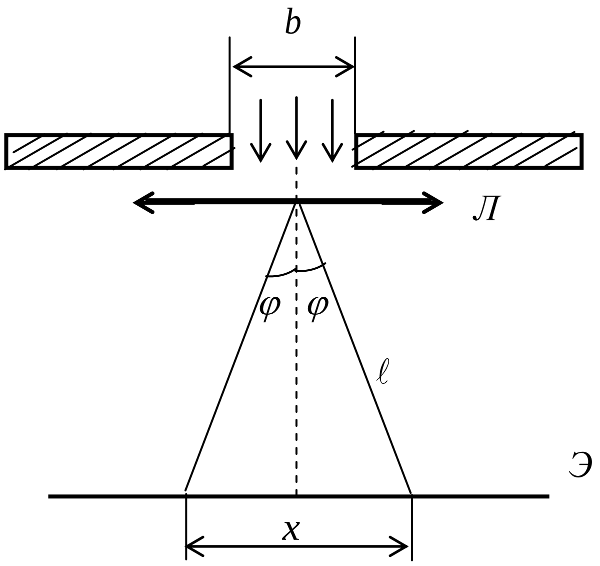
$$k = \frac{r^2}{\lambda b} = \frac{d^2}{4\lambda b}$$

Подставив числа, получим, что число зон Френеля, укладывающихся в заданном отверстии

$$k = 20.$$

Т.к. из точки наблюдения видно чётное число зон, то центр дифракционной картины – тёмное пятно.

Задача 2. На щель шириной $b = 20$мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см. Вблизи щели находится собирающая линза. Экран, удалённый от щели на расстояние $\ell = 1$м, находится в фокальной плоскости линзы (рисунок). Найти ширину изображения щели на экране. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными слева и справа от центрального максимума.



Дано: $b = 20$мкм, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см., $\ell = 1$м,

Найти: $x - ?$

Решение: Каждая точка щели является источником вторичных сферических волн. Линза, поставленная непосредственно за щелью собирает в фокальной плоскости лучи, идущие параллельно друг другу от разных точек щели. На экране наблюдается широкая размытая центральная полоса, слева и справа от которого располагаются тёмные и светлые полосы. Положение минимумов порядка k освещённости определяется условием

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda,$$

где φ - угол, под которым виден k-й минимум. А ширина изображения щели на экране

$$x = 2\ell tg\varphi.$$

В нашей задаче $k = 1$, следовательно,

$$b \sin\varphi = \lambda$$

и

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}.$$

Поэтому

$$x = 2\ell tg\varphi = 2\ell \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 2\ell \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = 2\ell \frac{\frac{\lambda}{b}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2}},$$

$$x = \frac{2\ell\lambda}{\sqrt{b^2 - \lambda^2}}.$$

Подставив числа, получим: $x = 5 \cdot 10^{-2}\, м$.

Задача 3. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны λ=0,5мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на L=l м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно l=20,2 см (рисунок). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на единицу длины; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

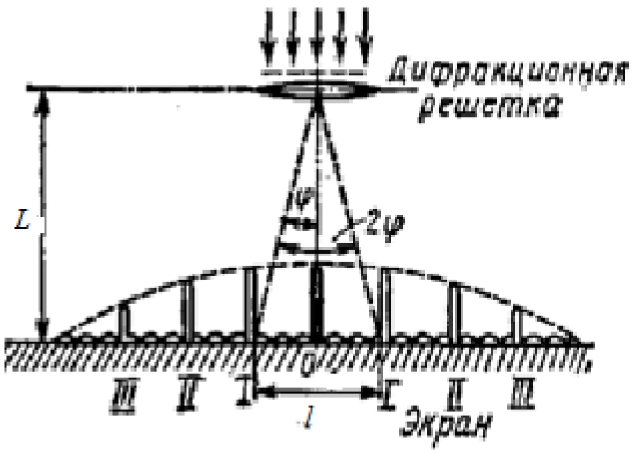
Решение

1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d\sin\varphi = k\lambda,$$

где k - порядок порядок максимума. Отсюда

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi}$$



Из рисунка видно, что

$$2L\,\mathrm{tg}\varphi = l$$

Поэтому $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}$ и

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}}$$

Если $\dfrac{l}{2} << L$, то $\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L} \approx \sin\dfrac{l}{2L} \approx \dfrac{l}{2L}$ и

$$d \approx \frac{2Lk\lambda}{l}$$

В данном случае k=1. Поэтому

$$d = \frac{\lambda}{\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}}$$

или

$$d \approx \frac{2L\lambda}{l}$$

Подставляя данные, получим

$$d=4{,}95 \text{ мкм}.$$

2. Число штрихов на 1 м найдем из формулы

$$n=\frac{1}{d}=\frac{l}{2L\lambda}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$n=2{,}02\text{-}10^{5} \text{ м}^{-1}.$$

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала предельное значение $k_{пред}$ исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать $\frac{\pi}{2}$. Из формулы

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

запишем

$$k_{пред}=\frac{d}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{d}{\lambda}.$$

Подставляя сюда значения величин, получим

$$k_{пред}=\frac{d}{\lambda}=9{,}9.$$

Число $\frac{d}{\lambda}$ обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,

$$k_{max}=9.$$

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{max}, т. е. всего $2k_{max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N=2k_{\max}+1$$

Подставляя значение k_{max} найдем

$$N=19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

синус этого угла:

$$\sin\varphi_{\max}=\frac{k_{\max}\lambda}{d}$$

Отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{k_{\max}\lambda}{d}$$

Подставив сюда значения величин λ, *d, k_{max}* и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{max}=65{,}4°.$$

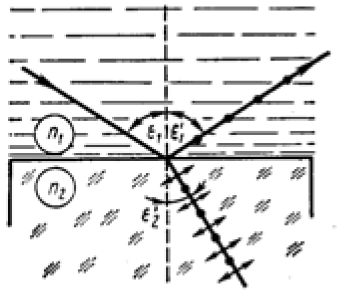
Задача 4. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отражённые от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы? Показатель преломления воды $n = 1.33$.

Решение: Для получения полностью поляризованного света при отражении в соответствие с законом Брюстера свет должен падать под углом φ удовлетворяющим уравнению:

$$tg\varphi = n,$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}\, n$$

Тогда Солнце находится на высоте $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, n$.

Задача 5. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол φ=97° с падающим пучком (рисунок). Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.



Решение. Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если угол падения удовлетворяет условию

$$\mathrm{tg}\varepsilon_1 = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

где $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ - относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_1' = 2\varepsilon_1 = \varphi$$

и, следовательно, $\varepsilon_1 = \dfrac{\varphi}{2}$ и $\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим $n_1 = 1.33$.

Задача 6 (В-Ч 32.17). На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого равна P=0.6, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 30^\circ$?

Решение.

Частично поляризованная световая волна есть суперпозиция линейно поляризованной волны и неполяризованной волны.

После установки анализатора, интенсивность световой волны, прошедшей через него максимальна. Следовательно, в этом положении анализатор пропускает линейно поляризованную составляющую волны, таким образом интенсивность ее не изменится. Интенсивность неполяризованной составляющей уменьшится в 2 раза.

Обозначим интенсивность неполяризованной составляющей волны, падающей на анализатор через $I_{нп}$, интенсивность линейно поляризованной составляющей через $I_{лп}$, а интенсивность волны, прошедшей через анализатор через I_1. Тогда

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}.$$

Когда анализатор повернули на угол $\alpha = 30^\circ$, то в этом случае интенсивность неполяризованной составляющей по-прежнему уменьшится в 2 раза. Но при этом интенсивность линейно поляризованной составляющей будет равна по закону Малюса $I_{лп} \cos^2 \varphi$. Обозначая полную интенсивность волны, прошедшей через анализатор через I_2, запишем

$$I_2 = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$$

Нам известна степень поляризации волны, падающей на анализатор. С другой стороны эта величина равна

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ - максимальная интенсивность волны, прошедшей через анализатор при некотором его положении, $I_{\min}$ - минимальная интенсивность волны, прошедшей через анализатор при некотором его положении.

Очевидно, что

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{нп}$$

Подставляя эти уравнения в уравнение $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, найдем

$$P = \frac{I_{лп}}{I_{нп} + I_{лп}},$$

откуда $(I_{нп} + I_{лп})P = I_{лп}$ или $I_{нп}P = I_{лп}(1 - P)$

$$I_{нп} = I_{лп} \frac{1 - P}{P}$$

Подставляя в уравнение $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$

найдем после преобразований

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{лп} \frac{1 - P}{P} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{лп} \frac{1 - P}{P} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1 - P}{P} + 2}{\frac{1 - P}{P} + 2\cos^2 \varphi}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 + P}{1 - P + 2P\cos^2 \varphi}$$

Это и есть ответ.