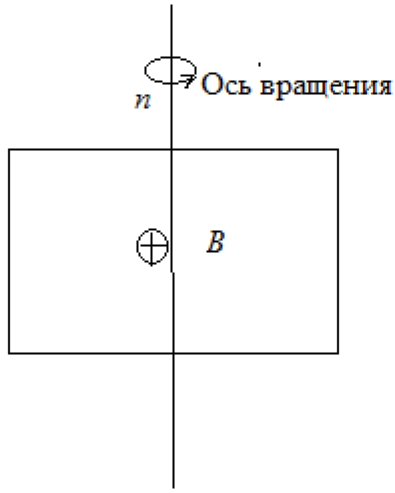
Разбор практических задач по теме Электродинамика

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно с частотой n вращается рамка, площадью S, содержащая N витков. Определить значение ЭДС ε, соответствующее углу поворота рамки α (углу между вектором магнитной индукции и вектором нормали к плоскости рамки).

Решение.



Мгновенное значение ЭДС индукции ε определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

где Φ поток вектора магнитной индукции, пронизывающий все витки рамки.
По определению потока

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Поскольку рамка равномерно вращается, то угол α линейно зависит от времени

$$\alpha = \omega t = 2\pi n t$$

Тогда

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos(2\pi n t)$$

И

$$\varepsilon = -\frac{dNBS\cos(2\pi n t)}{dt} = -NBS\frac{d\cos(2\pi n t)}{dt} = 2\pi n NBS\sin(2\pi n t) = 2\pi n NBS\sin\alpha$$

Ответ:
$\varepsilon = 2\pi n NBS\sin\alpha$

Задача 2. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d. Диаметр соленоида равен $D>>d$. По соленоиду течет ток I. Определить количество электричества Q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение.

Количество электричества *dQ*, которое протекает по проводнику за время *dt* при силе тока *I*, определяется равенством

$$dQ = Idt.$$

За время t , когда ток прекратится, эта величина будет равна будет

$$Q = \int_0^t Idt.$$

При коротком замыкании катушки источником тока будет служить ЭДС самоиндукции ε. Сила тока в данном случае определится по закону Ома

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

где $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$, ρ- удельное сопротивление меди, l – длина провода в катушке.

Согласно закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Поэтому

$$Q = \int_0^t Idt = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R}dt = -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{d\Phi}{dt}dt = -\frac{1}{R}\left(\Phi(t) - \Phi(0)\right) = \frac{1}{R}\Phi(0)$$

Но

$$\Phi(0) = LI$$

где L - индуктивность катушки.

$$Q = \frac{LI}{R}$$

По формуле индуктивности соленоида

$$L = \mu_0\frac{N^2}{l_c}S_c$$

где l_c и S_c - длина и площадь соленоида.

$$l_c = dN$$

$$S_c = \pi\frac{D^2}{4}$$

Поэтому

$$L = \mu_0\frac{N^2}{dN}\pi\frac{D^2}{4} = \mu_0\frac{\pi N D^2}{4d}$$

Подставляя это выражение и $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$ в формулу для Q получаем

$$Q=\mu_0\frac{\pi ND^2}{4d}I\frac{\pi d^2}{4l\rho}=\mu_0\frac{\pi ND^2\pi d}{16l\rho}I$$

Учитывая что $\frac{l}{\pi D}=N$ получаем

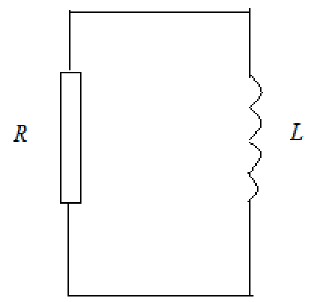
$$Q=\mu_0\frac{\pi ND^2\pi d}{16l\rho}I=\mu_0\frac{\pi D^2\pi d}{16l\rho}I\frac{l}{\pi D}=\mu_0\frac{\pi Dd}{16\rho}I$$

Ответ:

$Q=\mu_0\frac{\pi Dd}{16\rho}I$

Задача 3. В цепи шел ток *I*. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока *I* в этой цепи через время *t* после отключения ее от источника тока. Сопротивление цепи равно *R*, ее индуктивность равна L.

Решение.



В момент времени $t=0$, когда отключили источник тока, сила тока в цепи была равна $I(0)=I$. После этого сила тока стала убывать по закону $I(t)$, но убывать не сразу, поскольку возникла ЭДС самоиндукции. Величина ЭДС самоиндукции равна $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$.

Поэтому во время убывания тока мы можем записать закон Ома для замкнутой цепи

$$IR=\varepsilon$$

или

$$IR=-L\frac{dI}{dt}$$

Данное уравнение можно решить. Перепишем его в виде

$$-\frac{R}{L}dt=\frac{dI}{I}$$

Возьмем интеграл от левой и правой частей. От левой по dt в пределах от 0 до *t*, а от правой по *dI* в пределах от до I до $I(t)$:

$$-\frac{R}{L}\int_0^t dt=\int_I^{I(t)}\frac{dI}{I}$$

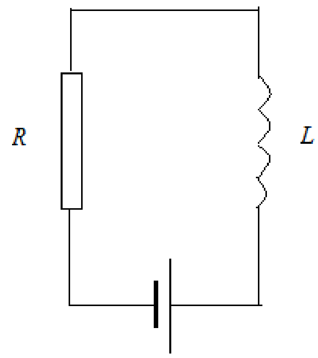
или, интегрируя

$$-\frac{R}{L}t=\ln I(t)-\ln I$$

Отсюда $I(t)=I\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$

Ответ: $I(t) = I \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$

Задача 4. К источнику тока с внутренним сопротивлением R_i подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время $t_{1/2}$, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 2 раза меньшего максимального значения тока.



Решение.

При включении цепи ток будет постепенно нарастать, пока не достигнет максимального значения $I_{\max}$. Значение $I_{\max}$ определится из закона Ома для замкнутой цепи

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R + R_i},$$

где ε - ЭДС источника. С момента включения цепи ток будет нарастать по закону $I(t)$.

Запишем закон Ома для замкнутой цепи в некоторый момент времени t когда ток нарастает, при этом учтем ЭДС самоиндукции ε_c:

$$I(t) = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R + R_i}$$

Учитывая что

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$$

запишем

$$I(t) = \frac{\varepsilon - L\frac{dI}{dt}}{R + R_i}$$

или

$$(R + R_i)I - \varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

или

$$\frac{L}{R + R_i}dt = \frac{dI}{\frac{\varepsilon}{R + R_i} - I}$$

Возьмем интеграл от левой и правой частей. От левой по dt в пределах от 0 до $t_{1/2}$, а от правой по dI в пределах от до 0 до $\frac{I_{\max}}{2} = \frac{\varepsilon}{2(R+R_i)}$:

$$\frac{L}{R+R_i}\int_0^{t_{1/2}} dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2(R+R_i)}} \frac{dI}{\frac{\varepsilon}{R+R_i} - I}$$

Получаем

$$\frac{L}{R+R_i} t_{1/2} = -\ln\frac{\varepsilon}{2(R+R_i)} + \ln\frac{\varepsilon}{R+R_i}$$

$$\frac{L}{R+R_i} t_{1/2} = \ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{R+R_i}{L}\ln 2$$

Ответ:

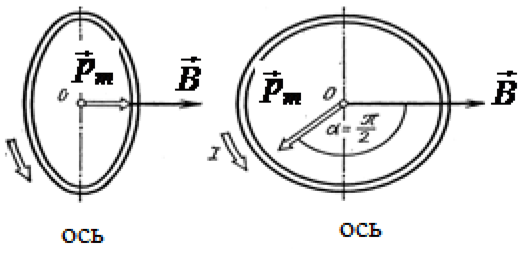
$t_{1/2} = \frac{R+R_i}{L}\ln 2$

Задача 5. Виток, диаметром *d*, по которому течет ток *I*, свободно установился в однородном магнитном поле *B*. Какую работу нужно совершить, чтобы *медленно* повернуть виток на угол $\alpha=\pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

Решение.

При медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь и считать ток в контуре неизменным. Работа сил поля в этом случае определяется выражением

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$



где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положениях.

Работа внешних сил будет равна модулю работе сил поля и противоположна ей по знаку, т. е.

$$A_{вн} = -A = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

Так как в начальном положении контур установился свободно (положение устойчивого равновесия), то момент внешних сил, действующий на контур, равен нулю. В этом положении вектор магнитного момента $\vec{p}_m$ контура сонаправлен с вектором *B* (рисунок слева) и магнитный поток Φ_1 максимален (α=0, cos α=1), т. е. $\Phi_1=BS$ (где *S* есть площадь контура). В конечном положении (рисунок справа) вектор $\vec{p}_m$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$ (α=π/2, cos α=0) и магнитный поток Φ_2=0. Перепишем выражение $A_{вн} = I(\Phi_1 - \Phi_2)$ с учетом сделанных замечаний:

$$A_{вн} = I\Phi_1 = IBS$$

Так как площадь контура $S=\pi d^2/4$ то работа равна

$$A_{вн} = \frac{\pi IBd^2}{4}$$

Ответ: $A_{вн} = \dfrac{\pi IBd^2}{4}$.

Задача 6. Обмотка тороида, у которого радиус тора намного больше радиуса витка, с немагнитным сердечником имеет *n* витков на единицу длины. Определить плотность энергии *w* поля, если по обмотке течет ток *I*.

Решение. Магнитное поле внутри тороида, у которого радиус тора намного больше радиуса витка, задается формулой

$$B = \mu\mu_0 nI$$

Объемная плотность энергии магнитного поля определяется формулой

$$w = \frac{BH}{2}$$

Напряженность магнитного поля *H* связана с магнитной индукцией *B* формулой

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0}$$

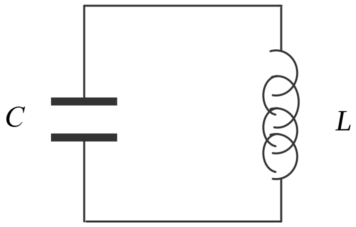
Отсюда

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{(\mu\mu_0 nI)^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2}.$$

Ответ: $w = \dfrac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2}$

Задача 7. Колебательный контур имеет индуктивность *L*, электроемкость *C*, максимальное напряжение на зажимах равно $U_{\max}$. Определить максимальную силу тока $I_{\max}$. Сопротивление контура ничтожно мало.

Решение:



Заряд на конденсаторе зависит от времени по закону (из лекции):

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Разность потенциалов на конденсаторе равна

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \text{где} \quad U_{\max} = \frac{q_m}{C}$$

а сила тока

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}), \quad \text{где} \quad I_{\max} = \omega_0 q_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_m$$

Поделим два уравнения

$$U_{\max} = \frac{q_m}{C}$$

$$I_{\max} = \omega_0 q_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_m$$

одно на другое:

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Отсюда

$$I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Ответ:

$$I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$$