Задачи по теме «Тепловое излучение»

Задача 1. Во сколько раз увеличится мощность излучения чёрного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано: $\lambda_к = 760\,\text{нм}$, $\lambda_ф = 380\,\text{нм}$

Найти: $\dfrac{P_ф}{P_к}$

Решение: Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии излучения чёрного тела, согласно закону смещения Вина равна

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}$. Из этой формулы определяем температуру, при которой максимум энергии излучения приходится на красную $\lambda_к$ и фиолетовую $\lambda_ф$ границы видимого спектра

$$T_к = \frac{b}{\lambda_к}, \quad T_ф = \frac{b}{\lambda_ф}.$$

Мощность излучения равна

$$P = RS,$$

где R - энергетическая светимость черного тела, S - площадь поверхности излучения. В соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4,$$

для температур $T_к$ и $T_ф$ имеем

$$P_к = \sigma T_к^4 S$$

и

$$P_ф = \sigma T_ф^4 S.$$

Далее определяем
$$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{T_ф}{T_к}\right)^{4.} = \left(\frac{\dfrac{b}{\lambda_ф}}{\dfrac{b}{\lambda_к}}\right)^{4.} = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right)^4.$$

Таким образом, ответ есть

$$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right)^4.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{0{,}76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$$

Задача 2. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны λ=500 нм. Принимая Солнце за черное тело, определить. 1) энергетическую светимость *R* Солнца; 2) поток энергии *Ф,* излучаемый Солнцем.

Решение.

1) Энергетическая светимость *R* черного тела выражается формулой Стефана — Больцмана

$$R = \sigma T^4$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

Выразив отсюда температуру *T* и подставив ее в формулу $R = \sigma T^4$ получим

$$R = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 .$$

Это ответ пункта 1. Произведя вычисления, найдем

$$R = 64 \text{ МВт/м}^2.$$

2) Поток энергии Ф, излучаемый Солнцем, есть энергия, излучаемая его поверхностью за единицу времени. Поскольку энергетическая светимость тела есть энергия, излучаемая единицей его поверхности за единицу времени, то поток энергии равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь *S* его поверхности.

$$\Phi = 4\pi r^2 R ,$$

где *r* — радиус Солнца. Поскольку из пункта 1) задачи

$$R = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 ,$$

то

$$\Phi = 4\pi r^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4 .$$

Радиус Солнца считается известным и равен $r = 6.96 \cdot 10^8$ м, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К . Подставив в формулу (3) значения π, r и M_e и произведя вычисления, получим

$$\Phi = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

Задача 3. Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров, равных $d = 1см$. Стенки полостей теплонепроницаемы. Отверстия расположены друг против друга, расстояние между ними $\ell = 10\,см.$ В первой полости поддерживается температура $T_1 = 1700K$. Вычислить установившуюся температуру во второй полости.

Решение: Так как отверстия малы, то можно рассматривать их как два чёрных тела. В таком случае первая полость излучает мощность

$$P_1 = SR_1,$$

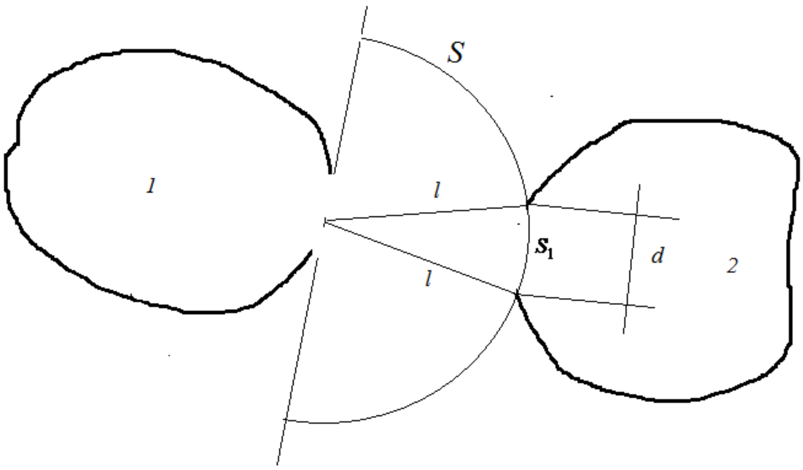
где S - площадь отверстия полости, R_1 - ее энергетическая светимость. Поскольку $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, а по закону Стефана-Больцмана $R_1 = \sigma T_1^4$, то мы имеем

$$P_1 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_1^4$$

При установившейся температуре T_2 вторая полость будет излучать такую же мощность, которая согласно закону Стефана-Больцмана равна

$$P_2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_2^4.$$

Заметим, что поскольку полости находятся в равновесии, то излучаемая полостью 2 мощность P_2 равна той части мощности P_1, излучаемой полостью 1, которую поглощает полость 2. Мощность P_1



излучается по всем направлениям в одну сторону, т.е., излучение попадает на полусферу S радиуса ℓ. Доля мощности n, попадающей во второе отверстие, будет соответствовать доле площади S_1 отверстия в общей площади указанной полусферы S:

$$n = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{2\pi\ell^2} = \frac{d^2}{8\ell^2},$$

т.е.

$$P_2 = nP_1 = P_1\frac{d^2}{8\ell^2}.$$

Подставляя в $P_1 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_1^4$ и $P_2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_2^4$ в уравнение $P_2 = P_1\frac{d^2}{8\ell^2}$, находим

$$T_2^4 = T_1^4 \frac{d^2}{8\ell^2},$$

откуда получаем ответ:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{d^2}{8\ell^2} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 180\,K\,.$$

Задача 4.

Во сколько раз отличаются температуры и интегральные излучательные способности (энергетические светимости) двух нагретых серых тел, поглощательные способности которых равны соответственно $a_{T_1} = 0.8$ и $a_{T_2} = 0.4$, если частота, соответствующая наибольшему значению монохроматической излучательной способности первого тела на *30%* меньше соответствующей частоты для второго тела.

Дано:

$a_{T_1} = 0.8$

$a_{T_2} = 0.4$

$n = 0.3$

Найти:

$\frac{T_1}{T_2}, \frac{R_1}{R_2}$

Решение:

По условию задачи первое тело нагрето до температуры T_1, а второе – до температуры T_2. Тогда по закону смещения Вина

$$\lambda_1 = \frac{b}{T_1};\ \lambda_2 = \frac{b}{T_2}.$$

Поделим одно уравнение на другое:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Пусть ν_1 и ν_2 есть частоты, соответствующие длинам волн λ_1 и λ_2. Из условия задачи

$$\nu_1 = (1-n)\nu_2.$$

Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

то

$$\lambda_2 = (1-n)\lambda_1$$

Подставляя в

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

находим

$$\frac{1}{1-n}=\frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=1-n$$

Энергетические светимости тел из закона Стефана-Больцмана для тел при температурах T_1 и T_2 равны

$$R_1=a_{T_1}\sigma T_1^4,$$

$$R_2=a_{T_2}\sigma T_2^4$$

Поделим эти уравнения:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{a_{T_1}T_1^4}{a_{T_2}T_2^4}$$

С учетом того, что $\frac{T_1}{T_2}=1-n$, получаем ответ:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{a_{T_1}}{a_{T_2}}(1-n)^4$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2}=\frac{a_{T_1}}{a_{T_2}}(1-n)^4$ $\qquad \frac{T_1}{T_2}=1-n$

Задача 5. Длина волны λ_m, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, равна 0,58 мкм. Определить максимальную спектральную плотность энергетической светимости $(r_{\lambda,T})_{\max}$ при длине волны λ_m.

Решение. Спектральная плотность равновесного излучения определяется формулой Планка (из лекции)

$$w_{\omega,T}=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\cdot\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

Спектральная плотность энергетической светимости связана со спектральной плотностью равновесного излучения как (из лекции)

$$r_{\omega,T}=\frac{c}{4}w_{\omega,T}$$

Поэтому

$$r_{\omega,T}=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\cdot\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

Также из лекции мы знаем, что

$$r_{\lambda,T}=r_{\omega,T}\frac{2\pi c}{\lambda^2},\ \lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$$

поэтому

$$r_{\lambda,T} == \frac{\hbar\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}-1\right)} \frac{2\pi c}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-1\right)}$$

При этом ее максимальное значение в соответствие с законом смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

равно

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = r_{\frac{b}{T},T} == \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{bk}-1\right)}.$$

Это и есть ответ.

Задача 6

Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности сместился с λ_1=2,4 мкм на λ_2=0,8 мкм. Как и во сколько раз изменились энергетическая светимость R_T тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?

Дано: λ_1=2,4 мкм, λ_2=0,8 мкм.

Найти: $\frac{R_1}{R_2}$, $\frac{\left(r_{\lambda_1,T_1}\right)_{\max}}{\left(r_{\lambda_2,T_2}\right)_{\max}}$

Решение.

Пусть T_1 - температура, при которой максимум спектральной плотности $\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max}$ возникает при длине волны λ_1, а T_2 - температура, при которой максимум спектральной плотности $\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max}$ возникает при длине волны λ_2.

Тогда по закону смещения Вина мы имеем:

$$\lambda_1 = \frac{b}{T_1};\ \lambda_2 = \frac{b}{T_2}.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_1};\ T_2 = \frac{b}{\lambda_2}.$$

Энергетические светимости при температурах T_1 и T_2 по закону Стефана-Больцмана равны:

$$R_1 = \sigma T_1^{\ 4},\quad R_2 = \sigma T_2^{\ 4}$$

и их отношение равно

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{T_1^{\ 4}}{T_2^{\ 4}}$$

Подставляя сюда $T_1 = \frac{b}{\lambda_1};\ T_2 = \frac{b}{\lambda_2}$. получаем:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\lambda_2^{\ 4}}{\lambda_1^{\ 4}}.$$

Это первый ответ. Считая, получаем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\lambda_2^{\ 4}}{\lambda_1^{\ 4}} = \frac{1}{81}$$

Получим второй ответ.

Спектральная плотность равновесного излучения определяется формулой Планка (из лекции)

$$w_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Спектральная плотность энергетической светимости связана со спектральной плотностью равновесного излучения как (из лекции)

$$r_{\omega,T} = \frac{c}{4} w_\omega$$

Поэтому

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Также из лекции мы знаем, что

$$r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} \frac{2\pi c}{\lambda^2},\ \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

поэтому

$$r_{\lambda,T} = \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT} - 1\right)}$$

Запишем эту формулу для разных температур T_1 и T_2 и длин волн λ_1 и λ_2

$$r_{\lambda_1,T_1}=\frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda_1{}^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1 kT_1}-1\right)},$$

$$r_{\lambda_2,T_2}=\frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda_2{}^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2 kT_2}-1\right)}$$

Деля первое уравнение на второе получаем:

$$\frac{r_{\lambda_1,T_1}}{r_{\lambda_2,T_2}}=\frac{\lambda_2{}^5}{\lambda_1{}^5}\frac{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2 kT_2}-1\right)}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1 kT_1}-1\right)}$$

Подставляя сюда $T_1=\frac{b}{\lambda_1}$; $T_2=\frac{b}{\lambda_2}$, получаем ответ

$$\frac{r_{\lambda_1,T_1}}{r_{\lambda_2,T_2}}=\frac{\lambda_2{}^5}{\lambda_1{}^5}\frac{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kb}-1\right)}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kb}-1\right)}=\frac{\lambda_2{}^5}{\lambda_1{}^5}$$

Это ответ.
Считаем:

$$\frac{r_{\lambda_1,T_1}}{r_{\lambda_2,T_2}}=\frac{1}{3^5}$$