Задачи по теме «Квантовые свойства света»

Задача 1. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны $\lambda_к = 332 нм$. Найти: а) работу выхода электрона для этого металла; б) длину световой волны λ, при которой задерживающий потенциал $U_з = 1B$.

Решение:

а) Согласно уравнению Эйнштейна

$$\hbar\omega = h\nu = \frac{mv^2}{2} + A$$

для внешнего фотоэффекта красная граница определяется из условия равенства энергии фотона работе выхода электрона, т.е.

$$\hbar\omega_к = A$$

или, так как

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \omega_к = \frac{2\pi c}{\lambda_к},$$

то

$$A = \frac{hc}{\lambda_к},$$

где $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{м}{с}$.

б) Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} + A$$

или, поскольку $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, то

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A$$

Поскольку мы уже нашли, что $\frac{hc}{\lambda_к} = A$, то

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + \frac{hc}{\lambda_к}$$

Наличие задерживающей разности потенциалов $U_з$ при длине волны фотона λ означает, что, кинетическая энергия выбитого этим фотоном электрона $\frac{mv^2}{2}$ тратится на преодоление потенциальной энергии $eU_З$, то есть

$$\frac{mv^2}{2} = eU_З.$$

Из двух последних уравнений

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU.$$

Откуда $$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU}{hc} \right)^{-1}.$$

Вычисляя, получим $A_{вых} = 3{,}7 Эв$, $\lambda = 196 нм$.

Ответ: $A = \frac{hc}{\lambda_к}$, $\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU}{hc} \right)^{-1}$.

Задача 2.

Квант света с длиной волны λ освобождает с поверхности платинового электрода фотоэлектрон. Чему равен импульс Δp, сообщаемый при этом электроду, если известно, что фотоэлектрон вылетает навстречу падающему кванту?

Дано:
λ, A, c, h, m
Найти:
Δp

Решение: Импульс, сообщаемый электроду есть изменение его импульса после поглощения фотона и вылета фотоэлектрона. Пусть до фотоэффекта импульс электрода был равен $\vec{p}$, а после поглощения фотона и вылета фотоэлектрона его импульс стал равен $\vec{p}\,'$. При этом

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p}$$

По закону сохранения импульса

$$\vec{p} + \vec{p}_ф = \vec{p}\,' + \vec{p}_э,$$

где

$$p_ф = \frac{h}{\lambda} \text{ - импульс фотона;}$$

$$p_э = mv \text{ - импульс фотоэлектрона.}$$

Отсюда

$$\vec{p}\,' - \vec{p} = \vec{p}_ф - \vec{p}_э$$

или

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_ф - \vec{p}_э$$

В проекции на направление скорости фотона

$$\Delta p = p_ф + p_э.$$

Поскольку

$$p_э = mv$$

$$p_ф = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

то

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} + mv$$

Скорость фотоэлектрона v можно определить из уравнения Эйнштейна:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A$$

$$v = \sqrt{\frac{2hc - 2\lambda A}{\lambda m}}.$$

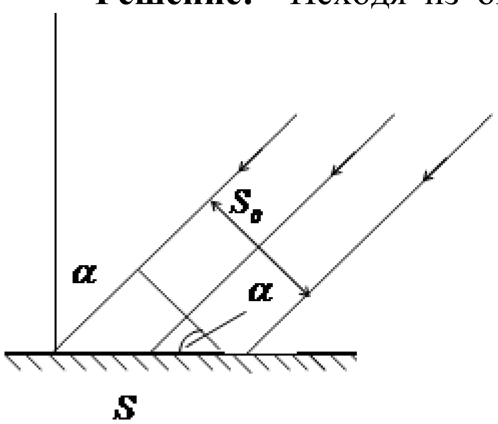
Тогда подставляя в формулу $\Delta p = mv + \frac{h}{\lambda}$, получаем

$$p = \frac{h}{\lambda} + \sqrt{\frac{2hcm - 2\lambda mA}{\lambda}} = 1{,}33 \cdot 10^{-25} кг \cdot м / с.$$

Задача 3.

Плоская световая волна интенсивности $I = 0{,}20\, Вт / см^2$ падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}8$. Угол падения $\alpha = 45^\circ$ (рисунок). Определить с помощью корпускулярных представлений значение нормального давления, которое оказывает свет на эту поверхность.

Решение: Исходя из определения давления и применив к зеркальной поверхности второй закон Ньютона, запишем для давления



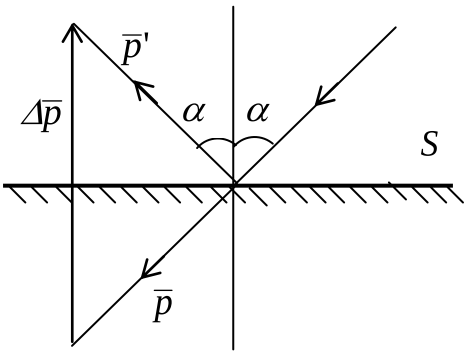
$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n \Delta t}{S \Delta t} = \frac{(\Delta p)_n}{S \Delta t},$$

где F_n - проекция силы, с которой световая волна действует на поверхность, на направление нормали к поверхности, $(\Delta p)_n$ - проекция импульса Δp, сообщённого фотонами за время Δt зеркальной поверхности, на направление нормали к

поверхности, S – площадь освещённой поверхности.
Величины S и $(\Delta p)_n$ зависят от угла падения α. Из рисунка видно, что

$$S = \frac{S_0}{\cos\alpha},$$

где S_0 - площадь поперечного сечения светового пучка.
Сделаем еще один рисунок, на котором изобразим импульс фотона, падающего на зеркальную поверхность и импульс фотона, отражённого от неё за время Δt: p и p', так что



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$$

есть импульс, переданный поверхности. Переходя к проекциям на направление нормали к поверхности, получаем

$$(\Delta p)_n = p'_n - p_n = p'\cos\alpha + p\cos\alpha = (p' + p)\cos\alpha$$

, тогда

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha .$$

Это есть импульс, переданный поверхности фотоном, который отражается.
При $\alpha = 0$ $P = P_0$, из формулы $P = \dfrac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha$ вытекает

$$P_0 = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}$$

С другой стороны из лекции нам известна формула

$$P_0 = \frac{I}{c}(1 + \rho)$$

Сравнивая эти две формулы, находим

$$\frac{(p' + p)}{S_0\Delta t} = \frac{I}{c}(1 + \rho)$$

Следовательно,

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha = \frac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2\alpha$$

Ответ: $P = \dfrac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2\alpha$

Задача 4. Угол рассеяния фотона с энергией $1{,}2 МэВ$ на свободном электроне 60° (рисунок). Найти: 1) длину волны рассеянного фотона; 2) Энергию, переданную электрону фотоном. Кинетической энергией электрона до соударения пренебречь.

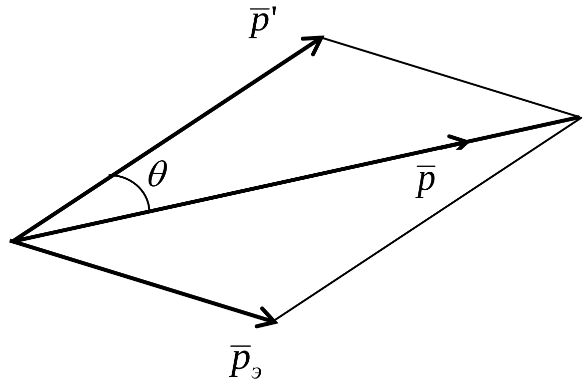
Дано: $\varepsilon = 1{,}2 МэВ$, $\theta = 60^\circ$

Найти: λ', E

Решение: Данная задача на эффект Комптона.

1) Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta),$$



где m_0 - масса электрона. Отсюда находим

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \lambda_c(1-cos\theta).$$

$\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c} = 2{,}43\cdot 10^{-12}$ – величина, которая называется «комптоновская длина волны», θ - угол рассеяния. Длина волны λ фотона связана с его энергией ε формулой

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\varepsilon}.$$

Подставляя в формулу $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$, получаем

получаем
$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta).$$

Это – первый ответ.

2) Энергия, переданная электрону фотоном по закону сохранения энергии равна разности между энергией падающего фотона и энергией рассеянного фотона

$$E = \varepsilon - \varepsilon'.$$

Выразим изменение длины волны через изменение частоты:

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{c(\nu - \nu')}{\nu\nu'}.$$

С учётом формулы Комптона $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$ перепишем

$$\frac{c(\nu-\nu')}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta),$$

откуда

$$\nu-\nu' = \frac{h\nu\nu'}{m_0 c^2}(1-\cos\theta),$$

умножая это выражение на h и, учитывая что

$$h\nu = \varepsilon, \quad h\nu' = \varepsilon',$$

получаем

$$h\nu - h\nu' = \frac{h^2\nu\nu'}{m_0 c^2}(1-\cos\theta),$$

$$\varepsilon-\varepsilon' = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m_0 c^2}(1-\cos\theta).$$

Выразим отсюда ε'

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) + \varepsilon'$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)+1\right)\varepsilon'$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)+1}$$

Находим

$$E = \varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)+1} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)}{\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)+1} = \frac{\varepsilon^2(1-\cos\theta)}{m_0 c^2 + \varepsilon(1-\cos\theta)}$$

Это – второй ответ.

Вычисляя, получим:

$$\lambda' = 2{,}25\cdot 10^{-12}\,м; \quad E = 1{,}04\cdot 10^{-13}\,Дж.$$

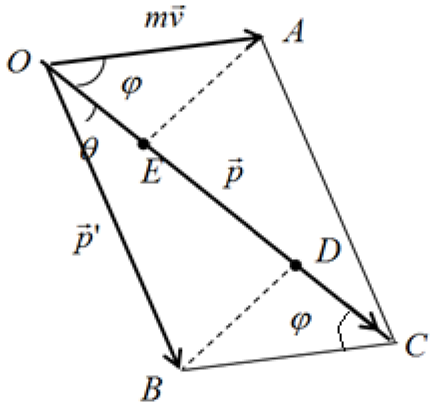
Задача 5. Фотон рентгеновского излучения с энергией $\varepsilon = 0.15\ МэВ$ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 0.15\,A$. Найти угол φ, под которым вылетел комптоновский электрон.

Дано: $\varepsilon = 015\ МэВ$, $\Delta\lambda = 0{,}15\,A$

Найти: φ

Решение: Увеличение длины волны рентгеновских лучей при их рассеянии веществом объясняется эффектом Комптона. По закону сохранения импульса импульс $\vec{p}$ падающего фотона равен векторной сумме импульса $\vec{p}\,'$ рассеянного фотона и импульса $m\vec{v}$ свободного электрона, который он приобрёл в результате соударения с фотоном:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + m\vec{v}$$



Изобразим эти векторы на рисунке.

Пусть φ - угол между векторами $m\vec{v}$ и $\vec{p}$. Тогда из рисунка

$$tg\,\varphi = \frac{BD}{DC} = \frac{p'\sin\theta}{p - p'\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\dfrac{p}{p'} - \cos\theta},$$

Угол рассеяния θ можно определить из формулы Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta),\quad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c},$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{\Delta\lambda(2\lambda_c - \Delta\lambda)}{\lambda_c}}.$$

Импульсы p, p' падающего и рассеянного фотонов связаны с их энергиями $\varepsilon, \varepsilon'$ соотношениями

$$p = \frac{\varepsilon}{c} \text{ и } p' = \frac{\varepsilon'}{c}.$$

Предварительно найдём энергию рассеянного фотона

$$\varepsilon' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\dfrac{hc}{\varepsilon} + \Delta\lambda} = \frac{\varepsilon hc}{hc + \varepsilon\Delta\lambda}.$$

Тогда импульс рассеянного фотона имеем вид:

$$p' = \frac{\varepsilon'}{c} = \frac{\varepsilon h}{(hc + \varepsilon\Delta\lambda)}.$$

После преобразований получим

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\theta}{\dfrac{p}{p'} - \cos\theta} = \frac{\sqrt{\dfrac{\Delta\lambda(2\lambda_c - \Delta\lambda)}{\lambda_c}}.}{\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{c}}{\dfrac{\varepsilon h}{(hc+\varepsilon\Delta\lambda)}} - \left(1 - \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_c}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\Delta\lambda - \frac{\Delta\lambda^2}{\lambda_c}}}{\frac{\varepsilon\Delta\lambda}{ch} + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda_c}}}{\frac{\varepsilon}{ch} + \frac{1}{\lambda_c}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2\lambda_c}{\Delta\lambda} - 1}}{\frac{\varepsilon\lambda_c}{ch} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{\Delta\lambda m_0 c} - 1}}{\frac{\varepsilon}{m_0 c^2} + 1}.$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\frac{2h}{\Delta\lambda m_0 c} - 1}}{1 + \frac{\varepsilon}{m_0 c^2}}$$

Это – ответ.

После подстановки числовых значений величин $\varphi = 49^0$.