Разбор практических задач по теме «Элементы квантовой механики»

Задача 1.

Электрон движется по окружности радиусом r = 0.5 см в однородном магнитном поле с индукцией B = 8 мТл. Определить длину волны де Бройля L электрона.

Дано: $r = 0.5$, $B = 8$ мТл, $h = 6.23 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с

Найти: L

Решение.

Пусть q - заряд частицы, m- ее масса. На частицу действует сила Лоренца, которая по модулю равна

$$F = qvB$$

и направлена перпендикулярно вектору скорости. Под действием этой силы частица движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Согласно второму закону Ньютона (по модулю):

$$ma = F$$

или

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

Отсюда выражаем скорость

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Импульс частицы равен

$$p = mv = qBr$$

Тогда волна де Бройля частицы находится по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

или

$$\lambda = \frac{h}{qBr}$$

Считая, получаем

$$\lambda \approx 10^{-10} \text{ м}$$

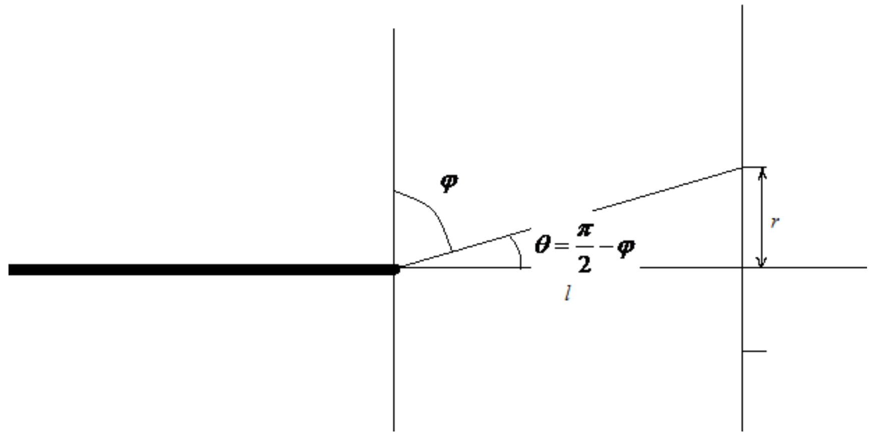
Задача 2.

Узкий пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U = 30 кВ, падает нормально на тонкий листок золота, проходит через него и рассеивается. На фотопластинке, расположенной за листком на расстоянии *l* = 20 см от него, получена дифракционная картина, состоящая из круглого центрального пятна и ряда концентрических окружностей. Радиус первой окружности *r* = 3,4 мм. Определить: 1) угол φ отражения электронов от микрокристаллов золота, соответствующий первой окружности (угол измеряется от поверхности кристалла); 2) длину волны де Бройля L электронов; 3) постоянную *d* кристаллической решетки золота.

Дано:
U=30 кВ, l=20 см, r_1=3.4 мм

Найти:
v, λ, d

Решение:
Тонкий листок золота можно рассматривать как дифракционную решетку, на которую нормально падает плоская волна, являющаяся волной де Бройля электронов. Пусть φ - угол рассеяния электронов, соответствующий первому главному максимуму.



Тогда

$$tg\varphi = \frac{l}{r}$$

Найдем скорость одного электрона. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Это первый ответ.

Найдем импульс одного электрона.

$$p = mv = m\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{2emU}$$

Импульс связан с длиной волны де Бройля

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Отсюда найдем λ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}$$

Это – второй ответ.

Запишем условие главных максимумов для дифракции на дифракционной решетке (из оптики)

$$d\sin\theta = k\lambda.$$

Для первого максимума $k = 1$ и мы имеем

$$d\sin\theta = \lambda$$

или так как $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$$d\cos\varphi = \lambda$$

Отсюда

$$d = \frac{\lambda}{\cos\varphi} = \frac{h}{\sqrt{2emU}\cos\varphi} = \frac{h}{\sqrt{2emU}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{l}{r}\right)}$$

Это – третий ответ.

Ответ:

$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}}$, $d = \frac{h}{\sqrt{2emU}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{l}{r}\right)}$

Задача 3.

Приняв, что минимальная энергия E нуклона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

Дано: E=10 МэВ, $h = 6.23\cdot10^{-34}$ Дж $\cdot$ с

Найти: d

Решение.

Соотношение неопределенностей имеет вид для координаты и импульса в проекции на одну из осей (например, ось Ox):

$$\Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

Если минимальная энергия нуклона в ядре равна E, то можно найти минимальный импульс нуклона. Считая, что E есть минимальная кинетическая энергия, т.е.

$$E = \frac{mv_{\min}^2}{2},$$

находим

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

$$p_{\min} = mv_{\min} = \sqrt{2mE}$$

Примем за неопределенность импульса его минимальное значение т.е.

$$\Delta p_x = p_{\min}\sqrt{2mE}$$

Тогда соотношение неопределенностей примет вид

$$\Delta x\sqrt{2mE} \geq \frac{h}{4\pi}$$

Отсюда следует, что минимальное значение неопределенности координаты $\Delta x_{\min}$ определиться уравнением

$$\Delta x_{\min}\sqrt{2mE} = \frac{h}{4\pi},$$

откуда

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{4\pi\sqrt{2mE}}$$

Поскольку мы не знаем направления движения нуклона, то будем считать все направления равноправными и $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = d$. Поэтому

$$d = \frac{h}{4\pi\sqrt{2mE}}$$

Считая, получим

$d \approx 2.3 \cdot 10^{-15}$ м

Задача 4.

Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика?

Дано:

$l, e, n = 1, h$

Найти: W

Решение.

Из лекций мы знаем вид нормированной волновой функции для потенциального яшика шириной l с бесконечно высокими стенками.

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Для основного состояния ($n=1$) мы имеем

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

Решим задачу под пунктом 1).

Согласно вероятностной интерпретации волновой функции, вероятность нахождения частицы на участке $\left[\frac{l}{3},\frac{2l}{3}\right]$ равна:

$$P=\int_{l/3}^{2l/3}\left|\Psi(x)\right|^2 dx.$$

Подставляем в это выражение волновую функцию:

$$P=\int_{l/3}^{2l/3}\left|\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right|^2 dx=\frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int_{l/3}^{2l/3}dx\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\Big|_{l/3}^{2l/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

Решим задачу под пунктом 2).

Согласно вероятностной интерпретации волновой функции, вероятность нахождения частицы на участке $\left[0,\frac{l}{3}\right]$ равна:

$$P=\int_{0}^{l/3}\left|\Psi(x)\right|^2 dx.$$

Подставляем в это выражение волновую функцию:

$$P=\int_{0}^{l/3}\left|\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right|^2 dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l/3}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{l/3}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{l/3}dx-\frac{1}{l}\int_0^{l/3}dx\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{l}x\Big|_0^{l/3}-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\Big|_0^{l/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin 0\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

Задача 5.
Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l. Определить среднее значение координаты электрона.

Решение.
Из лекций мы знаем вид нормированной волновой функции для потенциального яшика шириной l с бесконечно высокими стенками.

$$\Psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), 0\le x\le l\\ 0,\ x<0,\ x>l\end{cases}.$$

Также мы знаем, что среднее значение координаты вычисляется по формуле

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x|\Psi(x)|^2dx=\int_0^l x|\Psi(x)|^2dx$$

Подставляя выражение для волновой функции, получаем

$$\langle x\rangle=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

Поскольку

$$\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)}{2},$$

то

$$\langle x\rangle=\frac{1}{l}\int_0^l xdx-\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx=$$
$$=\frac{l}{2}-\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx$$

Интеграл $\int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$ вычисляем с помощью интегрирования по частям, используя формулу:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

Полагая $u(x)=x$, $v'(x)=\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$, $u'(x)=1$, $v(x)=\frac{l}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)$, получаем

$$\int_0^l x\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx=x\frac{l}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^l-\int_0^l\frac{l}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)dx=$$
$$=-x\frac{l}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^l+\left(\frac{l}{2n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^l=$$
$$=-l\frac{l}{2n\pi}\sin(2n\pi)+\left(\frac{l}{2n\pi}\right)^2\cos(2n\pi)-\left(\frac{l}{2n\pi}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{l}{2n\pi}\right)^2-\left(\frac{l}{2n\pi}\right)^2=0$$

Таким образом,

$$\langle x\rangle=\frac{l}{2}$$

Это – ответ.

Задача 6.

Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокого одномерного прямоугольного потенциального ящика можно записать в виде $\Psi(x)=C_1\exp(ikx)+C_2\exp(-ikx)$, $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ Используя граничные условия и нормировку Ψ-функции, определить: 1) коэффициенты C_1 и C_2; 2) собственные значения энергии E_n. Найти выражение для собственной нормированной Ψ-функции.

Решение.

Граничные условия для бесконечно глубокого одномерного прямоугольного потенциального ящика имеют вид

$$\Psi(0) = 0,$$
$$\Psi(l) = 0.$$

Условие нормировки имеет вид

$$\int_0^l |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

Применим $\Psi(0) = 0$:

$$\Psi(0) = C_1 \exp(ik0) + C_2 \exp(-ik0) = C_1 + C_2 = 0$$

Отсюда

$$C_2 = -C_1$$

и

$$\Psi(x) = C_1 \exp(ikx) + C_2 \exp(-ikx) = C_1(\exp(ikx) - \exp(-ikx)) = 2iC_1 \sin(kx)$$
$$\Psi(x) = 2iC_1 \sin(kx)$$

Применим $\Psi(l) = 0$:

$$\Psi(l) = 2iC_1 \sin(kl) = 0,$$

откуда, так как $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \geq 0$

$$kl = \pi n,$$

где $n = 0,1,2,3,4,...$, илЬи

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l = \pi n,$$
$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}.$$

Подставим $\Psi(x)$ в $\int_0^l |\Psi(x)|^2 dx = 1$:

$$\int_0^l |\Psi(x)|^2 dx = 4C_1^2 \int_0^l \sin^2(kx) dx = 4C_1^2 \int_0^l \frac{1 + \cos(2kx)}{2} dx =$$
$$= 4C_1^2 \int_0^l \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2kx)}{2}\right) dx = 2C_1^2 l + C_1^2 \frac{1}{k} \sin(2kx)\Big|_0^l =$$
$$= 2C_1^2 l + C_1^2 \frac{1}{k} \sin(2kl)$$

Поскольку $kl = \pi n$, $k = \dfrac{\pi n}{l}$, то $\sin(2kl) = 0$ и мы имеем

$$\int_0^l |\Psi(x)|^2 dx = 2C_1^2 l = 1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2l}}.$$

$$C_2 = -C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2l}}$$

Тогда с учетом $k = \dfrac{\pi n}{l}$ получаем

$$\Psi(x) = C_1 \exp(ikx) + C_2 \exp(-ikx) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l}} \exp(ikx) - \frac{1}{\sqrt{2l}} \exp(-ikx) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left(\exp(ikx) - \exp(-ikx)\right) =$$

$$= i\sqrt{\frac{2}{l}} \sin(kx) = i\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad 0 \le x \le l.$$

Итак, окончательный ответ:

$$C_2 = -C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2l}}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{l} x\right), 0 \le x \le l \\ 0,\ x < 0,\ x > l \end{cases}$$