ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Основные понятия и задачи теории автоматического управления

Управление – это такая организация того или иного процесса, которая обеспечивает достижение определённых целей.

Автоматическое управление – это управление, осуществляемое без участия человека.

Любой процесс управления включает в себя следующие основные этапы:

– сбор и обработка информации о положении объекта управления в целях оценки сложившейся ситуации;
– принятие решения о наиболее целесообразных действиях;
– исполнение принятого решения.

Сбор информации о положении объекта управления заключается в измерении его координат, а также величин задающих и возмущающих воздействий. Для решения этой задачи используются различные измерительные устройства, образующие, так называемую информационно- измерительную подсистему. Обработка полученной информации имеет целью выработку, на основании принятого закона управления, управляющего сигнала, который должен обеспечить достижение цели управления. Обработка информации и принятие решения о необходимых действиях осуществляются в логико-вычислительной подсистеме. Управляющие сигналы, полученные в логико-вычислительной подсистеме, поступают на исполнительную подсистему, которая приводит в действие регулирующие органы объекта управления, которые и решают задачу приведения его в требуемое положение. Совокупность объекта управления и управляющей подсистемы, в которую входят вышеперечисленные устройства (подсистемы) и образует систему автоматического управления (САУ).

Рассмотрим основные принципы автоматического управления.

1). **Управление по разомкнутой схеме** (разомкнутые САУ). Схема разомкнутой САУ показана на рис.1.

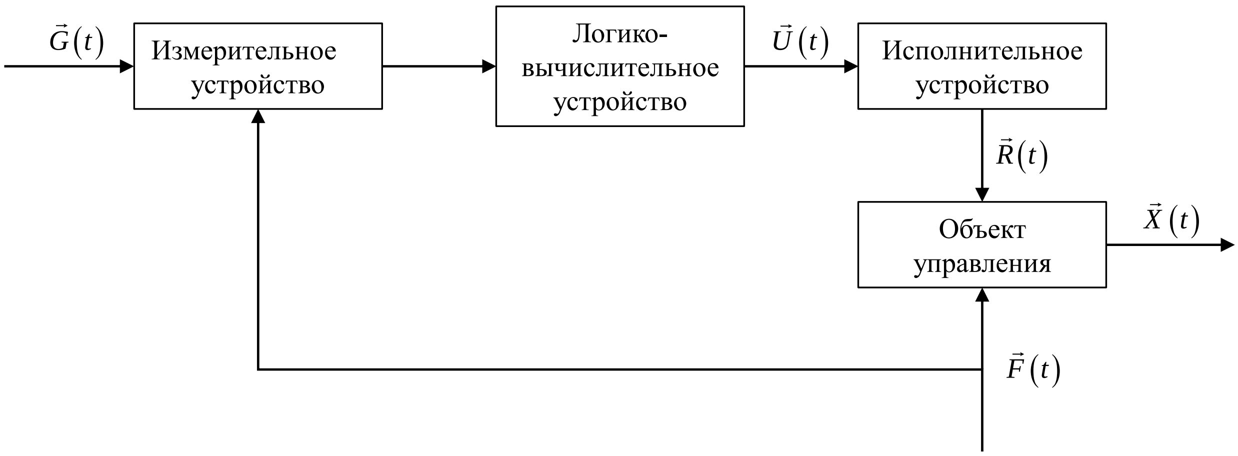

Рис. 1. Схема разомкнутой САУ

Вектор выходных координат $X(t)$ объекта управления зависит от вектора регулирующего воздействия $R(t)$ и вектора возмущений $F(t)$.

Управляющее воздействие $U(t)$ вычисляется по измеренным значениям задающего воздействия $G(t)$ и вектора возмущений.

$$U(t) = f\left(G(t), F(t)\right). \qquad (1)$$

Координаты выходного вектора $X(t)$ в каждый момент времени определяют состояние объекта управления и называются **параметрами состояния**. Задачей управления в общем случае является приведение параметров состояния в определённое соответствие задающим воздействиям, в частном случае может решаться задача $X(t) = G(t)$. Решению этой задачи препятствуют различного рода случайные возмущения.

Разомкнутым системам присущи следующие недостатки:

– инвариантность (независимость) параметров состояния обеспечивается только по отношению к тем компонентам вектора возмущений, которые могут быть измерены;
– инвариантность по отношению к контролируемым (задающим) воздействиям обеспечивается только при строгом соответствии параметров объекта управления и управляющей подсистемы их расчётным значениям.

Точное измерение всех координат вектора возмущений – задача невыполнимая. Параметры объекта управления в процессе эксплуатации меняются случайным образом, и проконтролировать этот процесс большей частью невозможно. Всё это приводит к тому, что разомкнутая система не может с высокой точностью решить задачу управления. Такие системы не нашли практического применения.

2). **Управление по замкнутой схеме** (замкнутые САУ). Схема замкнутой САУ показана на рис. 2.

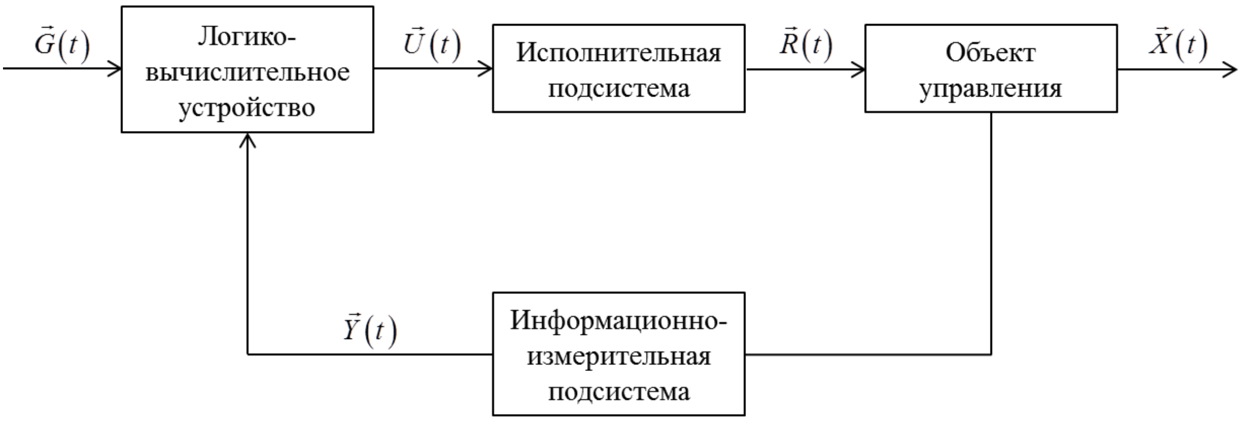

Рис. 2. Схема замкнутой САУ

В этом случае по данным измерений параметров состояния, всех или только необходимых, а также известным входным воздействиям формируется вектор отклонений:

$$E(t)=G(t)-Y(t). \qquad (2)$$

В этом выражении $Y(t)=C\,X(t)$ – выходной вектор измерительной подсистемы, C – матрица-оператор преобразований информации в измерительных устройствах, которую часто называют матрицей наблюдения, а всю измерительную подсистему- наблюдающим устройством.

Управляющий сигнал формируется в функции от отклонения:

$$U(t)=f\left(E(t)\right) \tag{3}$$

Задачей САУ является сведение отклонения к минимуму. В большинстве случаев матрица C является единичной и $E(t)=G(t)-X(t)$.

Так как величина отклонения от заданного значения содержит обобщённую информацию о влиянии всех компонентов случайных возмущений и отклонениях параметров объекта от расчётных значений, то замкнутые системы свободны от недостатков разомкнутых систем и именно поэтому они получили самое широкое распространение. Практически всегда САУ является замкнутой.

Если имеется возможность точно измерить какие-либо компоненты возмущающего воздействия, то можно ввести в систему дополнительные сигналы и формировать управляющее воздействие в функции и отклонения и измеренных возмущений. Такие системы используют оба изложенных принципа управления и называются комбинированными.

Реализация принципа управления по отклонению возможна только при замыкании цепи отрицательной обратной связи, т.е. цепи от выхода объекта управления до входа логико-вычислительной подсистемы, т.е. входа системы в целом. Эта обратная связь называется главной и всегда является отрицательной. Относительным недостатком замкнутых систем является их склонность к возникновению колебаний, что является следствием наличия обратной связи.

В свете рассмотренного кратко охарактеризуем основные задачи теории автоматического управления (ТАУ).

1. Разработка методов анализа САУ.

2. Разработка методов синтеза САУ, удовлетворяющих заданным требованиям.
3. Разработка принципов построения и методов коррекции динамических свойств САУ.

Системы автоматического управления можно классифицировать по следующим признакам.

1. По наличию или отсутствию дополнительных источников энергии САУ подразделяются на системы прямого и непрямого регулирования. Системы прямого регулирования - это системы, в которых для приведения в действие регулирующих органов не требуются дополнительные источники энергии, т.е. чувствительный элемент непосредственно перемещает регулирующий орган. Примером такой системы может служить регулятор заданного уровня воды в паровом котле, изобретенный русским механиком И.И. Ползуновым в 1765г.

В противном случае САУ является системой непрямого регулирования. Эти САУ используются в подавляющем числе случаев, так как практически всегда сигнал ошибки $E(t)$ недостаточен по мощности для управления регулирующим органом.

2. По характеру сигналов, циркулирующих в системе, САУ подразделяются на непрерывные (аналоговые), дискретные и дискретно- непрерывные (гибридные).
3. По виду уравнений, описывающих систему, САУ подразделяются на линейные и нелинейные.
4. По характеру изменения задающего воздействия САУ делятся на системы стабилизации, следящие системы и системы программного регулирования.

Системы стабилизации – это САУ, которые обеспечивают поддержание требуемого значения регулируемой величины относительно неизменного значения задающего воздействия. Отметим, что здесь и в дальнейшем отдельные компоненты векторов задающего воздействия, выходных координат и т.д. обозначаются малыми буквами.

Следящие системы предназначены для изменения регулируемой величины по закону, который заранее неизвестен, т.к. в общем случае величина задающего воздействия изменяется во времени и это изменение может быть случайным.

Программные САУ - это системы, в которых задающее воздействие изменяется по заданной программе, т.е. $g(t) = g_{\text{пр}}(t)$.

Нетрудно заметить, что системы стабилизации и программные САУ являются частным случаем следящих систем.

5. По величине и характеру ошибки $\varepsilon(t)$ САУ бывают статическими и астатическими.

В системах, статических по отношению к какому- либо воздействию, ошибка, вызванная этим воздействием, по окончанию процесса регулирования становится равной некоторой постоянной величине, называемой статической ошибкой.

В системах, астатических по отношению к какому- либо воздействию, ошибка, вызванная этим воздействием, по окончании процесса регулирования становится равной нулю.

6. По числу замкнутых контуров регулирования САУ бывают одноконтурными и многоконтурными.

7. По характеру зависимости коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих систему от времени, САУ бывают стацио-

нарными и нестационарными. В стационарных САУ указанные коэффициенты не зависят от времени.

8. С точки зрения возможностей изменения параметров управляющей подсистемы, в зависимости от изменяющихся в процессе функционирования параметров объекта управления, САУ бывают обыкновенными и самонастраивающимися (адаптивными).

1.2 Математическое описание САУ и их характеристик

Математическим аппаратом исследования САУ являются дифференциальные уравнения, которые описывают движение системы и являются уравнениями динамики. Из уравнений динамики, положив все производные равными нулю, можно получить уравнения статики, которые описывают поведение системы в установившемся режиме.

Дифференциальные уравнения САУ и её элементов, составленные в соответствии с физическими законами их функционирования и факторами, от которых зависят переменные уравнений, практически всегда являются нелинейными. Дифференциальные уравнения САУ, записанные в виде системы уравнений или одного дифференциального уравнения высокого порядка представляют собой математическую модель системы. Математическая модель является основой для анализа свойств системы и степени их соответствия поставленным требованиям. Итак, исходная математическая модель САУ является нелинейной. Отсутствие однозначных аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не позволяет создать какие-либо общие эффективные методы анализа и синтеза САУ. Именно это и послужило причиной развития идеи линеаризации, т.е. замены исходной нелинейной модели линейной, близкой по решению к исходной модели в определённом диапазоне изменения начальных условий и параметров. Линеаризация проводится по методу малого отклонения, который основан на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора.

Пусть САУ описывается дифференциальным уравнением n – го порядка:

$$a_0 x^{(n)} + F(x, \dot{x}, ... x^{(n-1)}) = F_1(g, \dot{g}, ... g^{(m)}) \tag{4}$$

В этом выражении F и F_1 некоторые нелинейные функции. Представим переменные, входящие в уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} &x = x_0 + \Delta x, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x}, ..., \quad x^{(n)} = x_0^{(n)} + \Delta x^{(n)}. \\ &g = g_0 + \Delta g, \quad \dot{g} = \dot{g}_0 + \Delta g, ..., \quad g^{(m)} = g_0^{(m)} + \Delta g^{(m)}. \end{aligned} \tag{5}$$

В этих выражениях нижний индекс “0” означает установившееся значение переменной, а знак Δ – отклонение переменной от установившегося значения. Разложим нелинейные функции в ряд Тейлора в окрестности установившегося режима:

$$\begin{aligned} &F(x, \dot{x}, ... x^{(n-1)}) = \\ &\quad = F(x_0, \dot{x}_0, ... x_0^{(n-1)}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)^* \Delta \dot{x} + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}} \right)^* \Delta x^{(n-1)} \right)^i + R_k. \\ &F_1(g, \dot{g}, ..., g^{(m)}) = \\ &\quad = F_1(g_0, \dot{g}_0, ..., g_0^{(m)}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial g} \right)^* \Delta g + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{g}} \right)^* \Delta \dot{g} + ... + \left(\frac{\partial F_1}{\partial g^{(m)}} \right)^* \Delta g^{(m)} \right)^i + R_{k_1}. \end{aligned}$$

Индекс “*” около частных производных означает, что они вычислены в точке установившегося режима.

Допустим, что отклонения переменных от установившегося режима настолько малы, что остаточными членами, а так же членами, содержащими произведения отклонений и отклонения в степенях выше первой, можно пренебречь как бесконечно малыми высших порядков малости по сравнению с членами, содержащими отклонения в первой степени. В соответствии с этим предположениям будем полагать, что $R_k = R_{k_1} = 0$ и $i = 1$.

Сделаем обозначения:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}\right)^* = a_{n-i}, \quad i = n-1, ..., 0,$$
$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial g^{(j)}}\right)^* = b_{m-j}, \quad j = m, ..., 0.$$

С учётом сделанных предположений и обозначений дифференциальные уравнения системы примут вид

$$\begin{aligned} & a_0 x_0^{(n)} + a_0 \Delta x^{(n)} + F(x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}) + \\ & + a_1 \Delta x^{(n-1)} + a_2 \Delta x^{(n-2)} + ... + a_{(n-1)} \Delta \dot{x} + a_n \Delta x = \\ & = F_1(g_0, \dot{g}_0, ..., g_0^m) + b_m \Delta g^{(m)} + b_1 \Delta g^{(m-1)} + ... + b_m \Delta g. \end{aligned}$$

В состав полученного выражения входит уравнение установившегося режима -первый и третий член в левой части и первый член в правой части. Установившееся движение нам задано и не представляет предмета исследования. Вычтем из полученного уравнения уравнение установившегося движения и получим уравнение в отклонениях, поведение которых нас и интересует. В дальнейшем, в целях сокращения записей, знак Δ будем опускать. Получим:

$$\begin{aligned} & a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = \\ & \quad = b_0 g^{(m)} + b_1 g^{(m-1)} + ... + b_{m-1} \dot{g} + b_m g. \end{aligned} \tag{6}$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным уравнением и определяет линейную модель системы. Отметим, что использовать линейную модель для исследования системы можно только при малых отклонениях переменных и поэтому часто говорят, что результаты исследований, полученных при использовании линейной модели справедливы только в малом.

Уравнение в отклонениях (6) описывает **возмущённое движение** системы, являющееся результатом действия каких-либо возмущений, приводящих к появлению отклонений от установившегося режима. Уравнение установившегося режима описывает **невозмущённое движение**.

Сложность решения дифференциальных уравнений высокого порядка без применения вычислительной техники и невозможность на основании численных решений создать общие методы анализа и синтеза систем привели к широкому использованию методов, связанных с применением математического аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Эти методы и составили сущность так называемой классической теории автоматического управления.

Необходимо отметить, что существуют нелинейные функции, которые невозможно линеаризовать по методу малого отклонения и, в этих случаях, используют специальные методы, разработанные для исследования нелинейных систем.

1.2.1 Передаточные функции САУ

Понятие передаточной функции системы является основополагающим в классической теории автоматического управления (ТАУ).

Определение передаточной функции связано с преобразование Лапласа и поэтому вначале приведём некоторые основные сведения из этого преобразования.

При использовании преобразования Лапласа некоторой функции времени $x(t)$ ставится в однозначное соответствие функции $X(s)$, где s – оператор Лапласа. Функция времени $x(t)$ называется оригиналом, а функция $X(s)$ её изображением. Изображение и оригинал связаны соотношением:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-st}dt.$$

Приведём некоторые теоремы преобразования Лапласа, которые будут использованы при изложении курса.

1. Теорема линейности.

Для любых действительных или комплексных A и B справедливо равенство:

$$A\,f(t)+B\,g(t)\Rightarrow AF(s)+BG(s). \tag{7}$$

где знак $\Rightarrow$ означает соответствие изображения оригиналу.

2. Теорема запаздывания.

Для любого постоянного $\tau>0$ справедливо равенство:

$$f(t-\tau)\Rightarrow e^{-s\tau}\,F(s). \tag{8}$$

3. Теорема дифференцирования оригинала

Если $f(t)\Rightarrow F(s)$, то

$$\dot{f}(t)\Rightarrow sF(s)-f(0). \tag{9}$$

Применив эту теорему к производным высших порядков, получим:

$$f^{(n)}(t)\Rightarrow s^nF\left(s\right)-s^{n-1}f\left(0\right)-s^{n-2}\dot{f}\left(0\right)-...-f^{(n-1)}\left(0\right). \tag{10}$$

При нулевых начальных условиях выражение (10) упрощается:

$$f^{(n)}\Rightarrow s^nF\left(s\right). \tag{11}$$

4. Теорема интегрирования оригинала

Если $f(t)\Rightarrow F(s)$ и $g(t)=\int\limits_0^t f(t)dt$, то

$$g(t)\Rightarrow \frac{F(s)}{s}. \tag{12}$$

5. Теорема о начальном значении оригинала

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\,F(s). \tag{13}$$

6. Теорема о конечном значении оригинала

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s). \tag{14}$$

Перейдём к определению передаточной функции. Пусть система или какое-либо звено её описываются дифференциальным уравнением вида (6). Полагая начальные условия нулевыми, перейдём в этом уравнении к изображениям по Лапласу. В соответствии с теоремой 3, получим:

$$\begin{aligned} & a_0 s^n X(s) + a_1 s^{n-1} X(s) + \ldots + a_{n-1} s X(s) + a_n X(s) = \\ & \quad = b_0 s^m G(s) + b_1 s^{m-1} G(s) + \ldots + b_{m-1} s G(s) + b_m G(s) \end{aligned}$$

Вынесем в полученном выражении за скобки изображения переменной и входного воздействия и сделаем обозначения:

$$\begin{aligned} & A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n. \\ & B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m. \end{aligned}$$

С учётом этих обозначений исходное дифференциальное уравнение в изображениях по Лапласу получит вид:

$$A(s)\, X(s) = B(s) G(s). \tag{15}$$

Определим теперь зависимость выходной величины от входного воздействия:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} G(s) = W(s) G(s). \tag{16}$$

Передаточной функцией системы (звена) $W(s)$ **называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.**

Требование нулевых начальных условий не вносит принципиальных трудностей. В случае $x(0)^{(k)} \neq 0$, при переходе к изображениям используют теорему 3 в форме (10), переносят члены, соответствующие начальным условиям в правую часть уравнения и считают их возмущающими воздействиями, относительно которых получают передаточные функции.

Будем полагать, что все элементы в схеме замкнутой САУ (рис.2) описываются уравнениями вида (10). Некоторым исключением в данном случае является уравнение объекта управления, в правую часть которого необходимо добавить оператор $\sum_{i=0}^{k} m_k f^{(k-i)}$, определяющий возмущающее воздействие. В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым только для линейных систем, уравнение объекта управления в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях запишется в виде:

$$A_0(s)\,X(s) = B_0(s)\,R(s) + M(s)\,F(s).$$

В этом выражении $M(s) = m_0 s^k + m_1 s^{k-1} + ... + m_k$.

Тогда можно записать:

$W_0(s) = \dfrac{X(s)}{R(s)} = \dfrac{B_0(s)}{A_0(s)}$ – передаточная функция объекта управления по регулирующему воздействию;

$W_{0_f}(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{M(s)}{A_0(s)}$ – передаточная функция объекта управления по возмущению.

Аналогично для других элементов схемы запишем:

$W_1(s) = \dfrac{U(s)}{E(s)} = \dfrac{B_1(s)}{A_1(s)}$ – передаточная функция логико-вычислительной подсистемы;

$W_2(s) = \dfrac{R(s)}{U(S)} = \dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}$ – передаточная функция исполнительной подсистемы;

$W_{oc}(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{B_{oc}(s)}{A_{oc}(s)}$ – передаточная функция цепи обратной связи (информационно-измерительной подсистемы).

Теперь схему замкнутой САУ можно изобразить, так как показано на рис. 3.

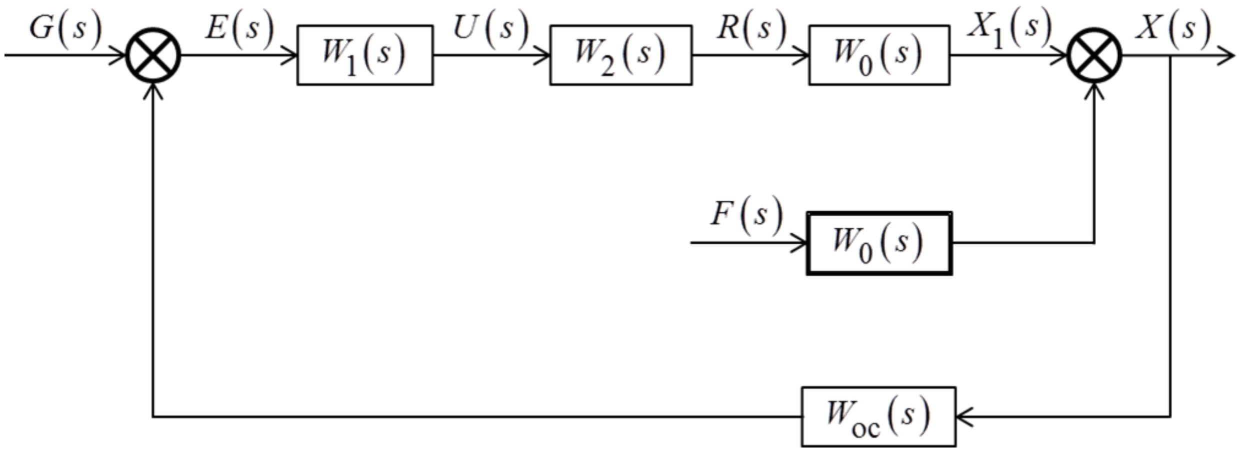

Рис. 3. Структурная схема САУ

Схема системы автоматического управления, изображённая в виде соединения передаточных функций составляющих её звеньев, называется структурной схемой.

На основании полученной схемы и выражений (15) и (16) составим систему уравнений.

$$\left.\begin{array}{l} X(s)-W_0(s)R(s)=W_{0f}(s)F(s) \\ R(s)-W_2(s)U(s)=0 \\ U(s)-W_1(s)E(s)=0 \\ Y(s)-W_{oc}(s)X(s)=0 \\ E(s)+W_{oc}(s)X(s)=G(s) \end{array}\right\}. \qquad (17)$$

Составим и раскроем характеристический определитель системы (17):

$$D(s)=1+W_1(s)W_2(s)W_0(s)W_{oc}(s). \qquad (18)$$

Так как звенья с передаточными функциями $W_1(s), W_2(s), W_0(s)$ входят в прямую цепь регулирования, то передаточная функция $W_n(s)=W_1(s)W_2(s)W_0(s)$ называется передаточной функцией прямой цепи. Составив и раскрыв замещённый определитель по отношению к регулируемой величине, получим

$$R_x(s)=W_n(s)G(s)+W_{0_f}(s)F(s).$$

Тогда

$$X(s)=\frac{W_n(s)}{1+W_n(s)W_{oc}(s)}G(s)+\frac{W_{0f}(s)}{1+W_n(s)W_{oc}(s)}F(s). \qquad (19)$$

Передаточная функция $\Phi(s)=\frac{X(s)}{G(s)}=\frac{W_n(s)}{1+W_n(s)W_{oc}(s)}$ **называется передаточной функцией замкнутой системы по задающему (регулирующему) воздействию.**

Передаточная функция $W(s)=W_n(s)W_{oc}(s)$ **называется передаточной функцией разомкнутой системы.**

Передаточная функция $\Phi_f(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{W_{0f}(s)}{1+W(s)}$ **называется передаточной функцией замкнутой системы по возмущению.**

Составим и раскроем замещённый определитель относительно ошибки регулирования:

$$R_\varepsilon(s)=G(s)+W_{oc}(s)W_{of}(s)F(s).$$

Тогда

$$E(s)=\frac{1}{1+W(s)}G(s)+\frac{W_{oc}(s)W_{0f}(s)}{1+W(s)}F(s). \qquad (20)$$

Передаточная функция $\Phi_\varepsilon(s)=\frac{E(s)}{G(s)}=\frac{1}{1+W(s)}$ **называется передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от задающего воздействия.**

Передаточная функция $\Phi_{\varepsilon f}(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{W_{oc}(s)W_{0f}(s)}{1+W(s)}$ **называется передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия.**

1.2.2 Временные характеристики САУ

Временные характеристики представляют собой зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход некоторого типового воздействия. В ТАУ используются два вида временных характеристик:

– переходная характеристика (переходная функция);

– импульсная переходная характеристика (функция веса).

Переходной характеристикой $h(t)$ называется зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на её вход единичного ступенчатого воздействия $1(t)$ (рис. 4).

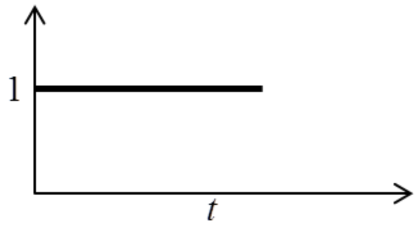

Рис. 4. Единичное ступенчатое воздействие

Данное входное воздействие определяется выражением:

$$1(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0;\\ 1 & \text{при} \quad t\geq 0.\end{cases} \tag{21}$$

Изображение по Лапласу единичного ступенчатого воздействия будет:

$$1(t)\Rightarrow\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}.$$

Обозначим изображение переходной функции как $H(s)$, а передаточную функцию системы как $W(s)$ и получим

$$H(s)=W(s)\frac{1}{s}. \tag{22}$$

Переходная функция может быть определена по ее изображению использованием формулы обратного преобразования Лапласа, в частности с помощью таблиц преобразования Лапласа.

При неединичном ступенчатом воздействии $g(t)=N1(t)$, где $N=const$, в соответствии с принципом суперпозиции выходная реакция системы будет:

$$x(t)=N\,h(t). \tag{23}$$

Импульсной переходной характеристикой (ИПХ) или функцией веса системы $k(t)$ называется зависимость выходной величины от времени при подаче на вход воздействия в виде дельта - функции $\delta(t-\tau)$, которая определяется следующим образом:

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<\tau,\\ \infty & \text{при} \quad t=\tau,\\ 0 & \text{при} \quad t>\tau.\end{cases} \tag{24}$$

Определим основное свойство дельта - функции и её связь с единичным ступенчатым воздействием. Допустим, что имеется некоторая функция $g(t-\tau)$ определяется выражением:

$$g(t-\tau)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<\tau,\\ \dfrac{t}{a} & \text{при} \quad t<\tau<a,\\ 1 & \text{при} \quad t>a.\end{cases} \tag{25}$$

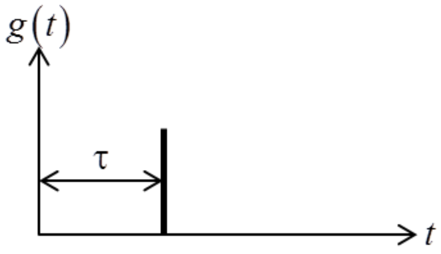

Рис. 5. Дельта – функция

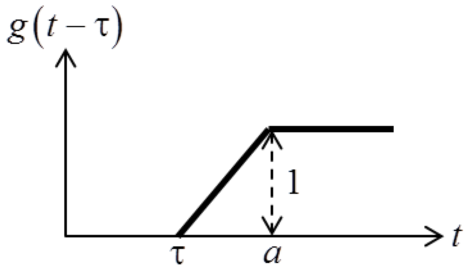

Рис. 6. Функция $g(t-\tau)$

Найдём производную от функции $g(t-\tau)$.

$$\dot{g}(t-\tau)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<\tau,\\ \dfrac{1}{a} & \text{при} \quad t<\tau<a,\\ 0 & \text{при} \quad t>a.\end{cases} \tag{26}$$

Очевидно, что графически эта производная представляет собой прямоугольный импульс (рис. 7), амплитуда которого возрастает с уменьшением величины a, а длительность уменьшается. Площадь этого прямоугольника постоянна и равна единице.

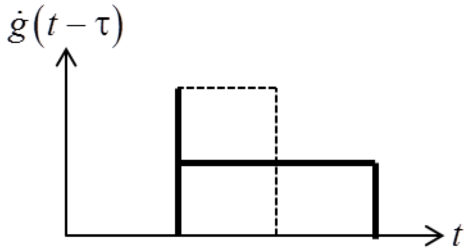

Рис. 7. График функции $\dot{g}(t-\tau)$

Из выражений (25), (26) и рис. 5, 6 и 7 следует, что в пределе при $a \to 0$ функция $g(t-\tau)$ стремится к единичному ступенчатому воздействию, т.е.

$$\lim_{a\to 0} g(t-\tau) = 1(t-\tau),$$

а предел функции $\dot{g}(t-\tau)$ равен бесконечности:

$$\lim_{a\to 0} \dot{g}(t-\tau) = \infty = \lim_{t\to\tau} \delta(t-\tau).$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

$$\left.\begin{aligned} &\delta(t-\tau) = \dot{1}(t-\tau) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = 1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

В частном случае, когда $\tau = 0$ изображение дельта-функции равно:

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = 1, \text{ т.е. } \delta(s) = 1.$$

Отсюда следует, что изображение функции веса определяется выражением:

$$K(s) = W(s). \tag{28}$$

Следовательно:

$$k(t) \Rightarrow W(s). \tag{29}$$

Функция веса системы может быть определена так же, как и переходная функция, или путём дифференцирования переходной функции в соответствии с первой формулой выражений (27).

Пример. Найти переходную функцию и функцию веса системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s)=\frac{k}{Ts+1}.$$

Изображение переходной функции будет

$$H(s)=W(s)\frac{1}{s}=\frac{k}{s(Ts+1)}=k\frac{\alpha}{s(s+\alpha)},$$

где $\alpha=\dfrac{1}{T}$.

Используя таблицы преобразования Лапласа, по полученному изображению найдём оригинал переходной функции:

$$h(t)=k(1-e^{-\alpha t})=k(1-e^{-\frac{t}{T}}).$$

Для изображения функции веса можно записать $K(s)=\dfrac{k}{Ts+1}=k\dfrac{\alpha}{s+\alpha}$ и по таблицам изображений Лапласа получим $k(t)=\dfrac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$. Аналогичный результат получим дифференцированием выражения для переходной функции.

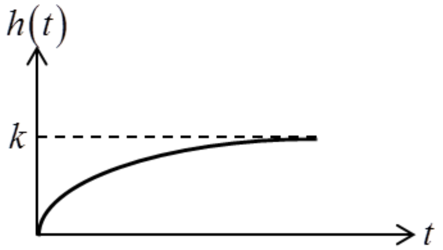

Рис. 8. Переходная функция

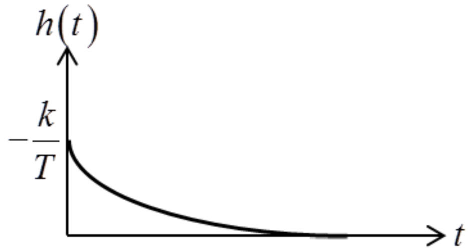

Рис. 9. Функция веса

Импульсную переходную характеристику удобно использовать для определения реакции системы на некоторое воздействие $f(t)$ произвольного вида:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)k(t-\tau)d\tau. \qquad (30)$$

Естественно, что сигнал на выходе физически реализуемой системы не может появиться раньше входного сигнала, т.е. $k(t)=0$ при $t<0$. С точки зрения преобразования Лапласа это соответствует условию

$$\lim_{s\to\infty} W(s) = 0. \tag{31}$$

Если

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}, \tag{32}$$

то условие (31) выполняется только при $m < n$. Это и есть выражение принципа физической реализуемости системы.

1.2.3 Частотные характеристики САУ

Пусть входное воздействие $g(t)$ представляет собой гармоническую функцию вида:

$$g(t) = G_m \cos(\omega t)$$

Использовав формулу Эйлера, можно записать

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Тогда входное воздействие можно представить в виде суммы двух воздействий

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}. \tag{33}$$

Дифференциальное уравнение системы в изображениях по Лапласу запишется в виде

$$A(s)X(s) = B(s)G(s), \tag{34}$$

где полином $A(s)$ имеет порядок n, а полином $B(s)$ порядок m.

Пусть на вход системы подано воздействие вида $g_1(t)$. Частное решение дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} W(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Здесь $W(j\omega)$ – некоторая функция частоты ω.

Подставив $g_1(t)$ и $x_1(t)$ в (34), сократив полученное выражение на $\frac{G_m}{2}$ и $e^{j\omega t}$, получим

$$(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n)W(j\omega) =$$
$$= b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots b_m.$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \qquad (35)$$

Сравнивая (35) и (32), можно заключить, что функция $W(j\omega)$ получается из передаточной функции $W(s)$ простой заменой $s = j\omega$. Эта замена с математической точки зрения означает переход от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье.

Функция $W(j\omega)$ называется частотной передаточной функцией системы. Комплексную функцию $W(j\omega)$ представим в виде:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (36)$$

Тогда:

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

Если в (34) подставить функцию $g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}$, то после преобразований аналогичных предыдущим, получим:

$$x_2(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega)e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = G_m A(\omega)\frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} =$$
$$= G_m A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)). \qquad (37)$$

Это выражение показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в устойчивой линейной динамической системе гармоническим входным воздействием, представляют собой гармоническую функцию времени, имеющую ту же частоту, что и входное воздействие, но отличающуюся от последнего по амплитуде и по фазе.

Зависимость отношения $A(\omega)$ амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала от частоты называется **амплитудной частотной характеристикой** (**АЧХ**) системы.

Зависимость фазового сдвига $\varphi(\omega)$ между входным и выходным сигналами от частоты называется **фазовой частотной характеристикой** (**ФЧХ**) системы.

С этой точки зрения частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ называют также **амплитудно-фазовой частотной характеристикой** (**АФЧХ**) системы.

Методика определения частотных характеристик системы следующая.

1). В передаточной функции системы делают замену $s = j\omega$ и полученную АФЧХ представляют в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$W(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Функцию $U(\omega)$ называют **вещественной частотной характеристикой**, а функцию $V(\omega)$ **мнимой частотной характеристикой.**

2). Определяют АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \tag{38}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right). \tag{39}$$

Пример. Определить частотные характеристики для звена с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Делаем замену $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+jT\omega} = \frac{k(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)} = \frac{k(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}.$$

Отсюда:

$$U(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2};$$
$$V(\omega) = -k\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2};$$
$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$
$$\varphi(\omega) = -\arctan(T\omega)$$

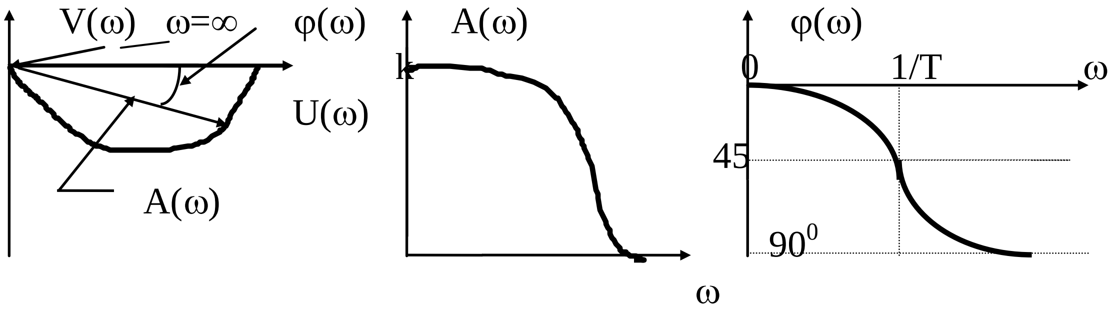

Рис. 10. Частотные характеристики звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

Частотные характеристики широко используются при анализе и синтезе САУ и составляют основу рассматриваемой классической теории автоматического управления.

1.2.4 Логарифмические частотные характеристики

Существенным недостатком рассмотренных выше частотных характеристик является то, что графически они, особенно для систем высокого порядка, являются кривыми достаточно сложной формы, что затрудняет их построение и использование для анализа систем. В целях исключения этого недостатка в большинстве случаев нашли применение логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ) называется кривая, соответствующая выражению

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) \quad (40)$$

и построенная в логарифмическом масштабе частот.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ) называется фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$, построенная в логарифмическом масштабе частот.

Величина $L(\omega)$ измеряется в децибелах, а $\varphi(\omega)$ – в градусах или радианах. Единицами измерения логарифмической оси частот являются октавы и декады.

Октавой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в два раза и равный $\lg(2)=0,3010$. Декадой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в десять раз и равный $\lg(10)=1$. Легко подсчитать, что одна декада содержит $3,32$ октавы. Точка, соответствующая значению частоты, равному нулю, лежит слева в бесконечности, т.к. $\lg(0)=\infty$. Поэтому ось ординат проводится через любую точку оси частот так, чтобы справа располагалась та часть ЛЧХ, которую нужно исследовать.

Можно рекомендовать следующую методику построения логарифмической сетки координат. Вначале ось частот разбивается на декады и октавы, причём **каждая декада разбивается на октавы отдельно**. Для удобства инженерной практики под точками этой оси пишут не значения логарифмов частот, а сами частоты.

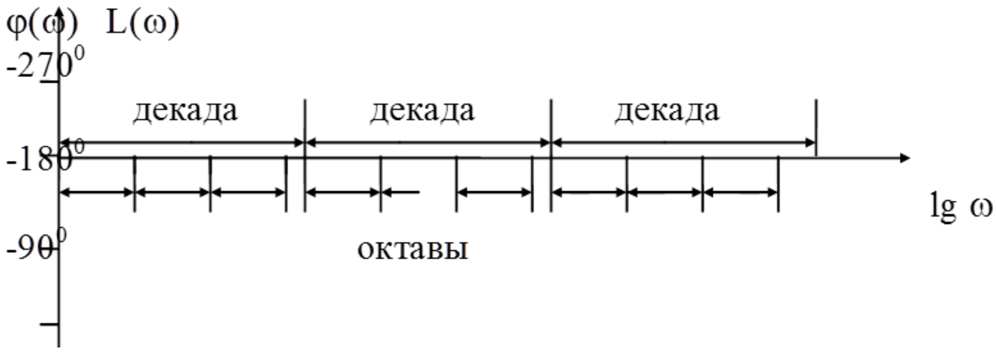

Рис. 11. Оси логарифмической системы координат

Рекомендуется ось ординат в отношении фазовой характеристики располагать так, чтобы с точкой начала координат совпадало значение фазы, равное

$-180°$ положительное направление шло вниз, а отрицательное - вверх. Общепринятое расположение оси фазы не является ошибкой, но рекомендованное здесь расположение во многих случаях облегчает применение для анализа и синтеза систем разработанных графоаналитических методов.

Если исследуемая точка частоты не совпадает ни с октавой, ни с декадой, то её положение на оси частот по отношению к началу координат или началу какой либо декады при избранном масштабе $m\,[\text{мм / дек}]$ можно определить по формуле:

$$\omega_x = m \lg\left(\frac{\omega_x}{\omega_0}\right). \tag{41}$$

Здесь ω_0 – частота, соответствующая началу координат или началу декады.

Обратная задача, т.е. определение значения частоты по положению соответствующей ей точки на оси частот, решается использованием формулы:

$$\omega_x = \omega_0 10^{\frac{\omega_x}{m}}. \tag{42}$$

При построениях ЛЧХ вручную удобным является масштаб равный $m = 50$ мм / дек.

Во многих случаях передаточную функцию системы можно представить в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев:

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s).$$

Тогда $W(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}$. В соответствии с правилами о логарифме произведения и произведении показательных функций получим:

$$L(\omega) = 20 lg \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega). \tag{43}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega). \qquad (44)$$

Таким образом, логарифмические характеристики сложной системы могут быть получены суммированием ЛЧХ составляющих ее простых звеньев.

Пример. Определить ЛЧХ для САУ с передаточной функцией $W(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$.

Используя результаты предыдущего примера, получим:

$$L(\omega) = 20\lg\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

При $\omega < \dfrac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 << 1$ и $L(\omega) \approx 20\lg k.$

При $\omega > \dfrac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 >> 1$ и $L(\omega) \approx 20\lg k - 20\lg T\omega.$

Это уравнение прямой имеющей наклон к оси частот, равный и сопрягающейся с предыдущей прямой в точке $\omega_0 = \dfrac{1}{T}.$

Таким образом, ЛАХ данной системы может приближённо построена в виде двух сопрягающихся отрезков прямых. Такая ЛАХ называется **асимптотической**. Возможность замены кривых асимптотическими ЛАХ является важным достоинством ЛЧХ. Ошибка при такой замене для большинства простых систем не велика и для рассматриваемой системы её максимальное значение в точке $\omega = \omega_0$ не превышает 3 дБ.

Фазовая характеристика исследуемой системы определена выше.

Частота $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ называется частотой сопряжения. Частота ω_c при которой ЛАХ пересекает ось частот, что соответствует значению $A(\omega) = 1,$ называется частотой среза системы.

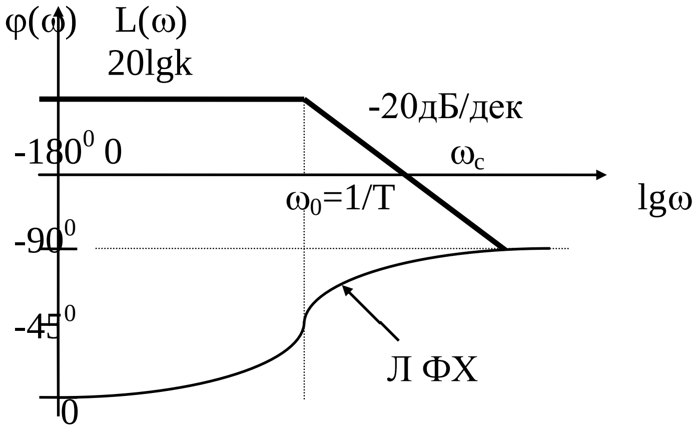

Рис. 12. ЛЧХ системы с передаточной функцией $W(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$

В заключение отметим, что так как для физически реализуемых систем $n > m,$ то

$$\lim_{\omega\to\infty} W(j\omega) = 0.$$

Это означает, что все реально осуществимые системы являются фильтрами нижних частот.

1.3 Типовые динамические звенья и их характеристики

При изучении САУ её схему удобно представлять не в виде соединения её элементов, классифицированных по функциональному назначению и принципу действия, а в виде структурной схемы, т.е. в виде соединения динамических звеньев.

Динамическое звено - это математическая модель элемента или его части, записанная в виде дифференциального уравнения или передаточной функции.

В ТАУ динамические звенья, которые описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, принято называть **типовыми динамическими звеньями.** Различают восемь типов звеньев:

1. Усилительное (безинерционное) звено.

$$W(s) = k.$$

2. Идеальное дифференцирующее звено.

$$W(s) = ks.$$

3. Идеальное интегрирующее звено.

$$W(s) = \frac{k}{s}.$$

4. Апериодическое звено первого порядка.

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

5. Звено второго порядка.

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}.$$

а) колебательное звено при $0 < \zeta < 1$;

б) апериодическое звено второго порядка при $\zeta > 1$;

в) консервативное звено при $\zeta = 0$.

6. Форсирующее звено первого порядка.

$$W(s) = k(Ts+1).$$

7. Форсирующее звено второго порядка.

$$W(s) = k(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1).$$

8. Звено чистого запаздывания.

$$W(s) = e^{-\tau s}.$$

Все динамические звенья обладают направленностью действия - от входа звена к его выходу, что на структурных схемах обозначается стрелками.

1.3.1 Соединение динамических звеньев

Имеются три типа соединений динамических звеньев:

– последовательное;

– параллельное;

– встречно- параллельное или соединение в виде обратной связи.

Последовательным (рис. 13) называется соединение, при котором выходная переменная каждого предыдущего звена подаётся на вход последующего звена.

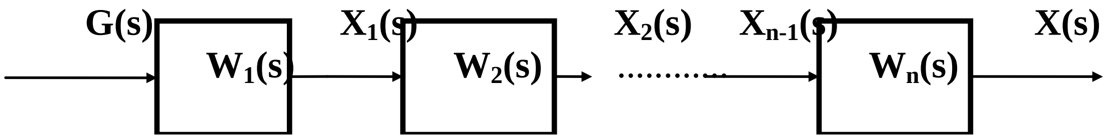

Рис. 13. Последовательное соединение динамических звеньев

Из рис. 13 следует, что

$$X(s) = W_n(s)X_{n-1}(s) = W_n(s)W_{n-1}(s)X_{n-2}(s) = W_1(s)W_2(s)...W_n(s)G(s).$$

Таким образом, **передаточная функция последовательного соединения динамических звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, составляющих схему:**

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s).$$

Параллельным (рис. 14) называется такое соединение динамических звеньев, при котором входная переменная для всех звеньев одна и та же, а выходные переменные всех звеньев суммируются.

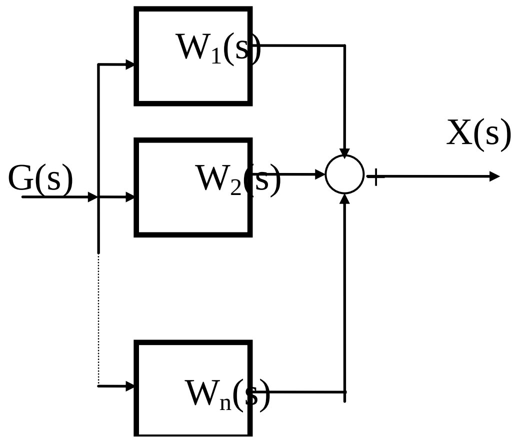

Рис.14. Параллельное соединение динамических звеньев

Из рис. 14 следует, что

$$X(s) = W_1(s)G(s) + W_2(s)G(s) + ... + W_n(s)G(s) = \left[W_1(s) + W_2(s) + ... + W_n(s)\right]G(s).$$

Передаточная функция параллельного соединения динамических звеньев равна сумме их передаточных функций:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s).$$

Встречно - параллельным (**соединением с обратной связью**) называется такое соединение динамических звеньев, при котором сигнал с выхода звена прямой цепи подаётся на его вход через звено обратной связи (рис.1.15).

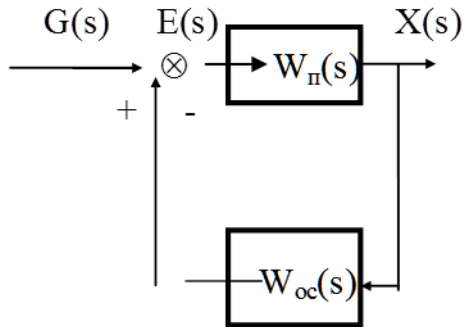

Рис. 1.15. Встречно-параллельное соединение звеньев

Обратная связь может быть как положительной, так и отрицательной, что на рисунке обозначено соответствующими знаками.

Составим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= W_n(s)E(s) \\ E(s) &= G(s) \pm W_{oc}(s)X(s) \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений относительно регулируемой величины и ошибки регулирования, получим:

$$X(s) = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_n(s)W_{oc}(s)} G(s).$$

$$E(s) = \frac{1}{1 \mp W_n(s)W_{oc}(s)} G(s).$$

Отсюда можно записать, что при встречно - параллельном соединении $\Phi(s)=\dfrac{X(s)}{G(s)}=\dfrac{W_n(s)}{1\mp W(s)}$ – **передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию,** а $\Phi(s)=\dfrac{E(s)}{G(s)}=\dfrac{1}{1\mp W(s)}$ – **передаточная функция замкнутой системы по ошибке от задающего воздействия,** где в обеих случаях $W(s)=W_n(s)W_{oc}(s)$ – **передаточная функция разомкнутой системы.** В выражениях передаточных функций замкнутой системы знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, а знак минус- положительной обратной связи.

Сравнивая полученные выражения с формулами, выведенными в п. 1.2, можно сделать вывод об их полной аналогии. Это означает, что передаточные функции можно получать не только по дифференциальным уравнения системы, а и по её структурной схеме. Следовательно, **структурная схема есть форма записи дифференциального уравнения системы.**

<u>Пример.</u> Система задана структурной схемой (рис. 15). Требуется определить её передаточные функции.

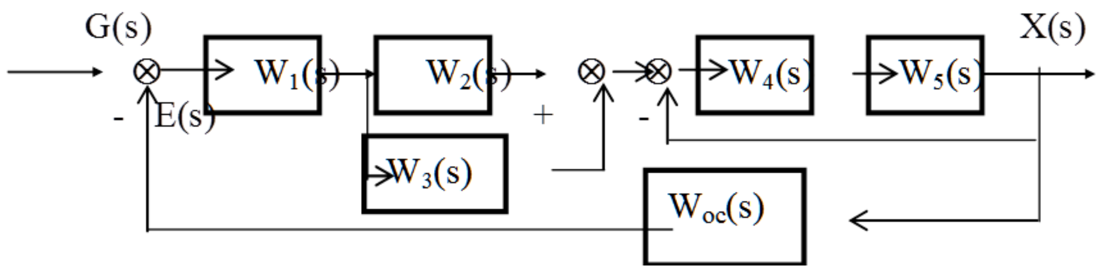

Рис. 15. Структурная схема САУ

Получение передаточных функций системы, заданной своей структурной схемой, так называемое “сворачивание схемы”, всегда начинается с самого внутреннего контура. В заданной структурной схеме два внутренних контура. Определим, в соответствии с правилами о соединениях динамических звеньев, их передаточные функции. Звенья $W_2(s)$ и $W_3(s)$ соединены параллельно и передаточная функция соединения:

$$W_{23}(s) = W_2(s) + W_3(s).$$

Звенья $W_1(s)$ и $W_{23}(s)$ соединены последовательно и поэтому

$$W_{123}(s) = W_1(s) W_{23}(s).$$

Звенья $W_4(s)$ и $W_5(s)$ соединены последовательно и охвачены отрицательной единичной обратной связью.

$$W_{45}(s) = \frac{W_4(s) W_5(s)}{1 + W_4(s) W_5(s)}.$$

Для передаточной функции прямой цепи получим

$$W_n(s) = W_{123}(s) W_{45}(s).$$

В результате преобразований структурная схема системы примет вид, показанный на рис. 16.

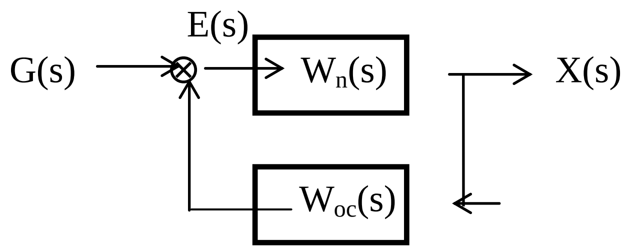

Рис. 16. Преобразованная структурная схема

Для передаточных функций замкнутой системы получим

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W(s)},$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)},$$

$$W(s) = W_n(s) W_{oc}(s).$$

1.3.2 Характеристики типовых динамических звеньев

1). Усилительное звено $W(s) = k$.

Для этого звена временные и частотные характеристики определяются простыми выражениями.

$$H(s) = k\frac{1}{s}; \qquad h(t) = k1(t);$$
$$k(t) = k\delta(t); \quad W(j\omega) = k;$$
$$A(\omega) = k; \qquad \varphi(\omega) = 0;$$
$$L(\omega) = 20\lg k.$$

2). Идеальное дифференцирующее звено: $W(s) = ks$.

Изображение переходной функции этого звена $H(s) = ks\frac{1}{s} = k$. В соответствии с обратным преобразованием Лапласа получим:

$$h(t) = k\delta(t); \qquad k(t) = k\dot{\delta}(t);$$
$$W(j\omega) = jk\omega; \qquad A(\omega) = k\omega;$$
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) =$$
$$= 20\lg(k) + 20\lg(\omega);$$
$$\varphi(\omega) = +90^0.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика звена является прямой линией с наклоном $+20$ дб/дек (рис. 17). Определим значение частоты среза, т.е. точку пересечения ЛАХ с осью частот:

$$L(\omega_c) = 20\lg k + 20\lg\omega_c = 0.$$
$$\omega_c = \frac{1}{k}.$$

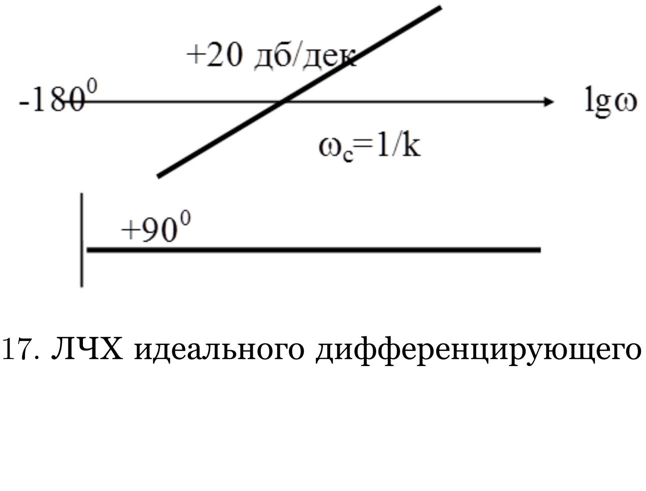

Рис. 17. ЛЧХ идеального дифференцирующего звена

3). Идеальное интегрирующее звено: $W(s) = \frac{k}{s}$.

Для этого звена $H(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2}$. Тогда $h(t) = kt$ и $k(t) = k$. Для частотных характеристик получим

$$W(j\omega) = -j\frac{k}{\omega}; \qquad A(\omega) = \frac{k}{\omega};$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega; \quad \varphi(\omega) = -90^0.$$

Уравнение для $L(\omega)$ – это уравнение прямой с наклоном -20 дб/дек (рис. 18).

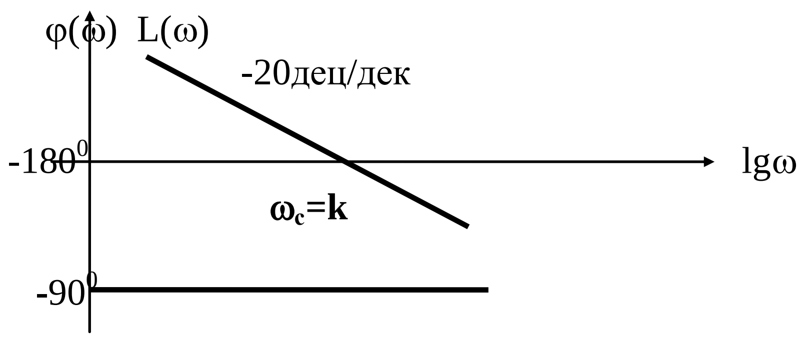

Рис. 18. ЛЧХ идеального интегрирующего звена

Частоту среза звена определим из уравнения $L(\omega_c) = 20\lg(k) - 20\lg(\omega_c) = 0$. Получим $\omega_c = k$.

4). Апериодическое звено 1-го порядка: $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$.

Все характеристики этого звена рассмотрены в вышеприведённых примерах.

5). Звено 2-го порядка: $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2T\zeta s + 1}$.

Дифференциальное уравнение этого звена в изображениях по Лапласу можно записать в виде

$$(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)X(s) = kG(s).$$

При единичном ступенчатом воздействии на входе дифференциальное уравнение относительно оригиналов имеет вид

$$T^2\frac{dx^{(2)}}{dt^2} + 2T\zeta\frac{dx}{dt} + x = k.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению полностью совпадает с полиномом знаменателя передаточной функции, приравненным к нулю. Поэтому полином знаменателя передаточной функции называется **характеристическим полиномом, а приравненный к нулю - характеристическим уравнением системы.** Корни характеристического полинома звена второго порядка будут

$$s_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{1}{T}\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

а). Колебательное звено.

В этом случае $\zeta < 1$ и корни комплексно-сопряжённые. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$x(t) = e^{-\frac{\zeta}{T}t}\left(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)\right) + k.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 вычисляются, как известно, по начальным условиям и если последние нулевые то

$$C_1 = k\frac{\alpha}{\beta}, \quad C_2 = -k.$$

В этих выражениях $\alpha = \frac{\zeta}{T}; \quad \beta = \frac{1}{T}\sqrt{1-\zeta^2}.$

Тогда выражение для переходной функции колебательного звена после элементарных преобразований примет вид

$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{\zeta}{T}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t) + \cos(\beta t)\right)\right).. \qquad (45)$$

Продифференцировав это выражение, получим функцию веса звена

$$k(t) = k\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\frac{\zeta}{T}t}\sin(\beta t). \qquad (46)$$

Вид переходной функции и функции веса колебательного звена показаны на рис. 19 и 20.

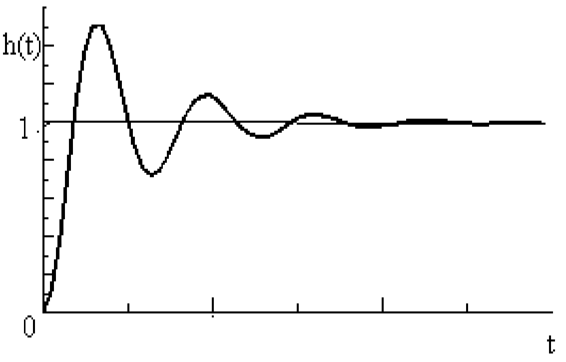

Рис. 19. Переходная функция колебательного звена

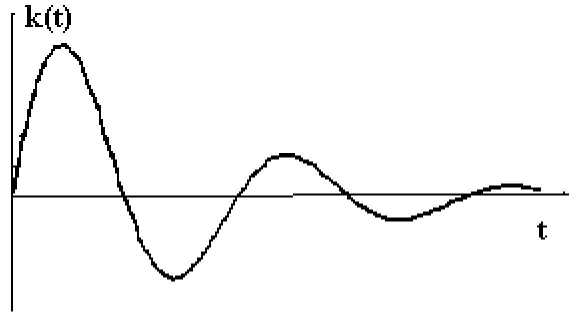

Рис. 20. Функция веса колебательного звена

Определим частотные характеристики звена.

$$W(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{k}{(1-T^2\omega^2)+j2T\zeta\omega}=$$

$$=\frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\zeta^2\omega^2}-j\frac{2T\zeta\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\zeta^2\omega^2}.$$

В соответствии с изложенной выше методикой вычисления частотных характеристик, получим

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4T^2\zeta^2\omega^2}}. \qquad (47)$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2}\right). \qquad (48)$$

Проанализируем последнее выражение. Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена показана на рис. 21.

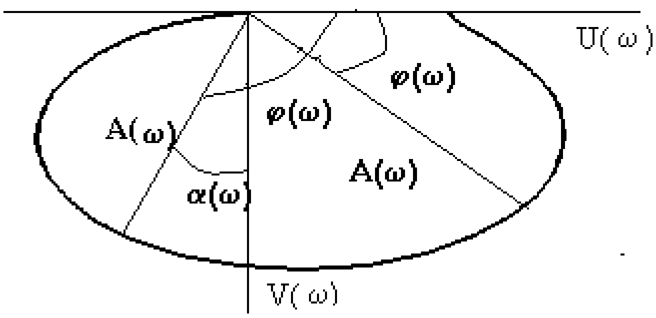

Рис. 21. АФЧХ колебательного звена

Из рис. 21 следует, что при $\omega > \dfrac{1}{T}$ будем вычислять не фазовый сдвиг, а некоторый угол $\alpha(\omega)$, являющийся только добавкой к действительному фазовому сдвигу, который в данном случае равен $-180^0 + \left|\arctan\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}\right| = -180^0 + |\alpha(\omega)|$.

Окончательно для ФЧХ колебательного звена получим

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2} & \text{при} \quad \omega \le \dfrac{1}{T}; \\ -180^0 + \arctan\dfrac{2T\zeta\omega}{T^2\omega^2 - 1} & \text{при} \quad \omega > \dfrac{1}{T}. \end{cases} \qquad (49)$$

Для логарифмической амплитудной характеристики можно записать

$$L(\omega) = 20\lg(k) - 20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2) + 4T^2\zeta^2\omega^2}.$$

При $\omega < \dfrac{1}{T}$ получим, что $\omega^2 T^2 << 1$ и $4T^2\zeta^2\omega^2 << 1$. Тогда в этом диапазоне частот ЛАХ звена можно считать равной $L(\omega) = 20\lg(k)$. Это уравнение прямой, параллельной оси частот.

При $\omega > \dfrac{1}{T}$ с достаточной для практики точностью справедливы соотношения $\omega^2 T^2 \gg 1$ и $4T^2\zeta^2\omega^2 \gg 1$. В этом частотном диапазоне можно считать $L(\omega) = 20\lg(k) - 40\lg(T\omega)$. Это уравнение прямой имеющей наклон -40 дб/дек и начинающейся при частоте $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ (рис. 1.22).

В окрестности этой точки точная ЛАХ при малых значениях показателя затухания ζ может сильно отличаться от асимптотической. В этих случаях необходимо уточнить асимптотическую ЛАХ в окрестности частоты сопряжения. Для решения этой задачи разработаны специальные таблицы и графики.

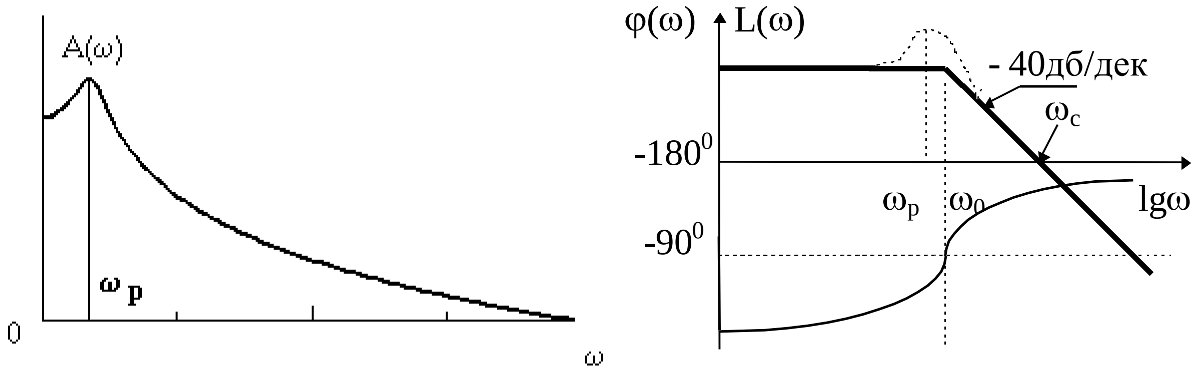

Рис. 22. АЧХ (слева) и ЛЧХ колебательного звена

Показанная на рисунках резонансная частота ω_p может быть вычислена по формуле $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$. В этой точке

$$L(\omega_p) = 20\lg\left(\frac{k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right). \qquad (50)$$

Из выражения АЧХ видно, что при $T = const$ амплитуда колебаний на выходе звена тем меньше, чем больше величина ζ. В тоже время частота колебаний β с увеличением ζ так же уменьшается и при $\zeta = 0$ становится равной нулю. Таким образом, увеличение ζ приводит к затуханию колебательного процесса и, с этой точки зрения, параметр ζ получил название **относительного показателя затухания**.

Исследование уже полученных выражений для переходных функций апериодического звена 1-го порядка и колебательного звена показывает, что чем больше величина T, тем медленнее затухает свободная составляющая процесса (собственное движение системы, являющееся решением однородного уравнения) и тем медленнее процесс приходит к установившемуся движению. Параметр T характеризует инерционность системы и поэтому получил название **постоянной времени**.

Б). Апериодическое звено 2-го порядка.

В этом случае $\zeta > 1$ и корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные.

$$\lambda_1 = -\frac{\zeta}{T} - \frac{1}{T}\sqrt{\zeta^2 - 1};$$
$$\lambda_2 = \frac{\zeta}{T} + \frac{1}{T}\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Сделаем обозначения: $T_1 = \dfrac{1}{|\lambda_1|}, \quad T_2 = \dfrac{1}{|\lambda_2|}.$

Передаточную функцию звена второго порядка теперь можно записать в виде

$$W(s) = \frac{k}{T^2(s + |\lambda_2|)(s + |\lambda_1|)} = \frac{k}{T^2|\lambda_1\lambda_2|(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)},$$

Учитывая, что $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{T^2}$, окончательно получим для передаточной функции апериодического звена 2-го порядка

$$W(s) = \frac{k}{(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}, \quad T_2 > T_1. \tag{51}$$

Определим изображение переходной функции

$$H(s) = \frac{k}{s(T_2 s + 1)(T_1 s + 1).} \tag{52}$$

Передаточная функция апериодического звена 2-го порядка с точки зрения структуры представляет собой последовательное соединение двух апериодических звеньев 1-го порядка и его частотные характеристики в соответствии с ранее полученными выражениями, можно записать следующим образом

$$\begin{gathered} A(\omega) = \prod_{i=1}^{2} A_i(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}}\frac{1}{\sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}}, \\ \varphi(\omega) = -\arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega). \end{gathered} \tag{53}$$

6). Форсирующее звено 1-го порядка: $W(s) = k(Ts + 1).$

Изображение переходной функции будет

$$H(s) = k(Ts + 1)\frac{1}{s} = KT + \frac{k}{s}.$$

По таблицам преобразования Лапласа легко получить оригинал

$h(t) = kT\delta(t) + k1(t).$

Тогда $k(t) = kT\dot{\delta}(t) + k\delta(t)$

Определим частотные характеристики.

$W(j\omega) = k(1 + jT\omega).$

$A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$

$\varphi(\omega) = \arctan(T\omega).$

$$L(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg\sqrt{\mathrm{T}^2\omega^2 + 1} \approx \begin{cases} 20\lg(k) & \text{при} \quad \omega \le \dfrac{1}{T}; \\ 20\lg(k) & \text{при} \quad \omega > \dfrac{1}{T}. \end{cases} \quad (1.58)$$

7). Форсирующее звено 2-го порядка: $W(s) = k(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)$

При $\zeta > 1$ звено превращается в последовательное соединение двух форсирующих звеньев 1-го порядка, характеристики которых известны.

Поэтому рассмотрим только случай, когда $0 < \zeta < 1$.

$H(s) = W(s)\dfrac{1}{s} = kTs + 2kT\zeta + \dfrac{k}{s}.$

8). Звено чистого запаздывания: $W(s) = e^{-\tau s}$.

Для этого звена

$H(s) = \dfrac{1}{s}e^{-\tau s};$

$h(t) = 1(t - \tau);$

$k(t) = \delta(t - \tau);$

$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau);$

$A(\omega) = 1;$

$\varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega);$

$L(\omega) = 0.$

Таким образом, звено чистого запаздывания не изменяет амплитуду сигнала, а вносит фазовое запаздывание, тем большее, чем больше время запаздывания τ.