Примеры решения задач по теме «Динамика. Законы сохранения»

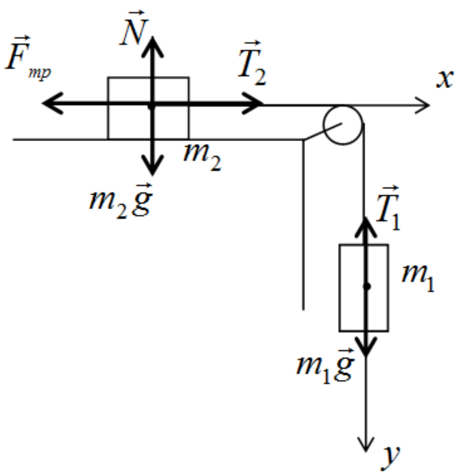
1. Динамика.

Задача 1. Невесомый блок укреплён на конце стола. Гири одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1кг$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через невесомый блок. Коэффициент трения гири m_2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение, с которым движутся гири и силу натяжения нити. Трением в блоке пренебречь.

Дано: $m_1 = m_2 = 1\,\text{кг}$, $k = 0.1$, $g = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: a, T

Решение: Делаем рисунок. Выбираем систему отсчета и систему координат (координатные оси *Ox* и *Oy*).



Расставляем приложенные к телам силы.

Рассматриваем движение каждого тела отдельно и записываем уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждого тела.

На тело m_2 действуют: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, реакция стола $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Уравнение для этого тела движения имеет вид:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{тр} + \vec{T}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g}. \qquad (1)$$

К подвешенному грузу приложены силы $m_1\vec{g}$ и $\vec{T}_1$, уравнение движения в векторной форме для этого тела имеет вид

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1. \qquad (2)$$

Проектируем уравнения (1) и (2) на координатные оси.

Обозначим через $a = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ модуль ускорения системы. Кроме того заметим, что модули сил натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны, т.е. $T_1 = T_2 \equiv T$ в силу невесомости и нерастяжимости нити и невесомости блока.

Для уравнения (1):

$$\text{На ось } Ox \quad m_2 a = T - F_{тр}, \qquad (3)$$

$$\text{На ось } Oy \quad 0 = m_2 g - N. \qquad (4)$$

Для уравнения (2):

$$\text{На ось } Ox \quad 0=0$$

$$\text{На ось } Oy \quad m_1 a = m_1 g - T. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) получаем

$$N = m_2 g\ . \qquad (6)$$

Согласно формуле для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N\ .$$

С учетом формулы (6) получаем

$$F_{тр} = \mu m_2 g \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (3) получаем

$$m_2 a = T - \mu m_2 g \qquad (8)$$

Из уравнения (5) выражаем T

$$T = m_1 g - m_1 a \qquad (9)$$

и подставляем в (8):

$$m_2 a = m_1 g - m_1 a - \mu m_2 g\ .$$

Из последнего уравнения выражаем модуль ускорения a:

$$m_2 a + m_1 a = m_1 g - \mu m_2 g$$

$$(m_2 + m_1)a = g(m_1 - \mu m_2)$$

$$a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2} \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим T:

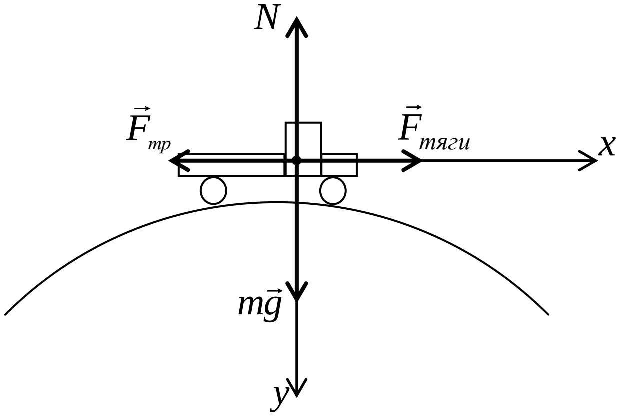
$$T = m_1 g - m_1 a = m_1 g - m_1 \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2} = g\,\frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2}$$

Ответ: $a = \dfrac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2}$, $T = g\,\dfrac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2}$

Задача 2. Автомобиль массой $m = 5$ т движется со скоростью $v = 10$ м/с по выпуклому мосту. Определить силу $F_д$ давления автомобиля на мост в его верхней части, если радиус R кривизны моста равен 50 м.

Дано: $m = 5\ \text{т} = 5000\ \text{кг}$, $v = 10\ \text{м/с}$, $R = 50\ \text{м}$, $g = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: $F_д$



Решение: Делаем рисунок.
Выбираем систему отсчета связанную с Землей и систему координат Oxy с центром в самой верхней точке моста.
Определяем силы, действующие на автомобиль в верхней точке моста:
$\vec{N}$ - сила реакции моста.
$\vec{F}_{тр}$ - сила трения

$m\vec{g}$ - сила тяжести

$\vec{F}_{тяги}$ - сила тяги автомобиля

Записываем уравнение движения (2 закон Ньютона):

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}$$

В проекциях на оси

$$Ox: \qquad ma_x = F_{тяги} - F_{тр} \qquad (1)$$

$$Oy: \qquad ma_y = mg - N. \qquad (2)$$

Поскольку автомобиль движется с постоянной скоростью v, то $a_x = 0$ Поэтому из уравнения (1) мы имеем $F_{тяги} = F_{тр}$. Данное уравнение нами использоваться не будет.

Из уравнения (2) мы имеем

$$N = mg - ma_y$$

Это есть сила, с которой мост действует на автомобиль. Тогда по 3 закону Ньютона сила давления автомобиля на мост по модулю равна N, то есть

$$F_д = mg - ma_y. \qquad (3)$$

При этом проекция ускорения автомобиля a_y есть его нормальное ускорение (или центростремительное ускорение), т.е.

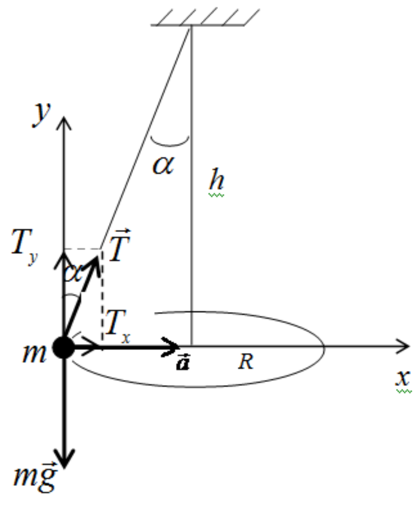
$$a_y = \frac{v^2}{R}.$$

Подставляя эту формулу в (3), получаем

$$F_д = mg - m\frac{v^2}{R} = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Ответ: $F_д = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$

Задача 3. Шарик массой m, прикреплённый к нити, движется в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью. Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости $h = 25$ см. Сколько оборотов делает шарик за $t = 100$ сек



Дано: $h = 25\text{ см} = 0{,}25\text{ м}$, $t = 100$ сек,

$g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: N

Решение: Сделаем рисунок и выберем систему отсчета (систему координат) как показано на рисунке.

Запишем второй закон Ньютона для шарика:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

где $\vec{T}$ - сила натяжения нити,

$m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{a}$ - ускорение шарика, которое по модулю равно $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ (по формуле центростремительного ускорения, ω есть угловая скорость шарика).

Спроектируем второй закон Ньютона на координатные оси:

На ось Ox $\quad m\omega^2 R = T\sin\alpha$.

На ось Oy $\quad 0 = T\cos\alpha - mg$.

Из второго уравнения выразим T

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

и подставим в первое уравнение:

$$m\omega^2 R = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha,$$

$$\omega^2 R = g\tan\alpha,$$

откуда

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

$\tan\alpha$ мы можем найти из рисунка:

$$\tan\alpha = \frac{R}{h}.$$

Отсюда

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{h},$$

$$\omega^2 = \frac{g}{h},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Учитывая, что $N = \nu t = \frac{\omega}{2\pi}t$, где ν есть частота вращения шарика, получаем:

$$N = \frac{\omega}{2\pi}t = \frac{\sqrt{\frac{g}{h}}}{2\pi}t = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Ответ: $N = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$.

Задача 4. Ракета, масса которой в начальный момент времени $M = 2$ кг, запущена вертикально вверх. Скорость выхода продуктов сгорания относительно ракеты $u = 150$ м/с, расход горючего $\mu = 0{,}2$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите ускорение a ракеты через $t = 3\,\text{с}$ после начала её движения. Поле силы тяжести считать однородным.

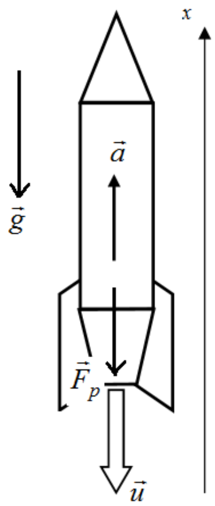
Дано: $M = 2\,\text{кг}$, $u = 150\,\text{м/с}$, $\mu = 0{,}2\,\text{кг/с}$, $g = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: a

Решение: Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета, связанную с Землей (на рисунке систему отсчета изображает ось Ox).

Запишем уравнение движения тела переменной массы

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{F}_p \qquad (1)$$



где $\vec{F}^{\text{внеш}} = m\vec{g}$ - внешняя сила (сила тяжести), $\vec{F}_p = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ - реактивная сила.

Из условия следует, что масса m ракеты изменяется с течением времени как

$$m = M - \mu t\,.$$

Поэтому

$$\vec{F}_p = \vec{u}\frac{dm}{dt} = -\mu\vec{u}$$

и уравнение (1) примет вид

$$(M - \mu t)\vec{a} = (M - \mu t)\vec{g} - \mu\vec{u}\,.$$

Возьмем проекцию этого уравнения на ось Ox:

$$(M - \mu t)a = -(M - \mu t)g + \mu u\,.$$

Выражая из последнего уравнения модуль ускорения ракеты, получим:

$$a = \frac{\mu u}{M - \mu t} - g\,.$$

Ответ: $a = \dfrac{\mu u}{M - \mu t} - g$

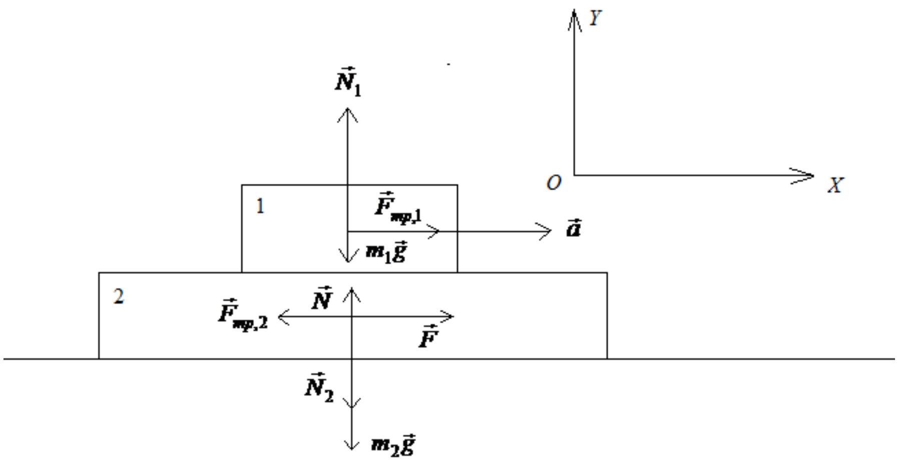
Задача 5. (Задача 2.18 из задачника Воробьева, Чертова). Брусок массой m_2 может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нем находится другой брусок массой m_1. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков f. Определить максимальное значение силы F_{max}, приложенной к нижнему бруску, при которой начнется соскальзывание верхнего бруска.

Дано: m_1, m_2, f, g

Найти: F_{max} - ?

Решение:

Пусть скольжение верхнего тела по нижнему телу отсутствует. Сделаем рисунок. Выберем систему координат.



Здесь:

$\vec{N}_1$ - сила реакции, действующая на первый брусок со стороны второго бруска,

$\vec{N}_2$ - сила реакции, действующая на второй брусок со стороны первого бруска,

$\vec{N}$ - сила реакции, действующая на второй брусок со стороны горизонтальной поверхности,

$m_1\vec{g}$ - сила тяжести, действующая на первый брусок,

$m_2\vec{g}$ - сила тяжести, действующая на второй брусок,

$\vec{F}_{mp,1}$ - сила трения покоя, действующая на первый брусок со стороны второго бруска,

$\vec{F}_{mp,2}$ - сила трения покоя, действующая на второй брусок со стороны первого бруска,

$\vec{F}$ - внешняя сила, приложенная ко второму бруску.

Запишем второй закон Ньютона для системы брусков для случая, когда бруски движутся вправо и между брусками отсутствует проскальзывание. Поскольку в этом случае ускорение обоих брусков равно $\vec{a}$ то мы имеем.

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{mp,1} + \vec{F}_{mp,2} + \vec{F}$$

Поскольку в силу третьего закона Ньютона

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0,$$

$$\vec{F}_{mp,1} + \vec{F}_{mp,2} = 0,$$

то

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\ .$$

В проекции на ось *OX* это уравнение примет вид

$$(m_1 + m_2)a = F\ ,$$

откуда

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для верхнего бруска

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр,1}.$$

В проекции на ось OX уравнение $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр,1}$ примет вид

$$m_1 a = F_{тр,1}$$

$$m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} = F_{тр,1}$$

$$F_{тр,1} = F \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Мы видим из последнего уравнения, что при отсутствие проскальзывания сила трения (покоя), действующая на первый брусок со стороны второго, определяется силой F, действующей на второй брусок. С увеличением силы F от нуля до некоторого значения $F_{\max}$ сила трения покоя $F_{тр,1}$ будет нарастать от нуля до значения

$$F_{тр,1,\max} = F_{\max} \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

В момент времени, когда сила $F_{тр,1}$ достигнет значения $F_{тр,1,\max}$, она станет равной силе трения скольжения, поскольку в этот момент начнется скольжение верхнего тела по нижнему телу.

Значение силы трения скольжения определяется стандартной формулой

$$F_{тр,1,скольж} = fN_1$$

В проекции на ось OY второй закон Ньютона как в отсутствие, так и при наличии скольжения имеет вид:

$$0 = N_1 - m_1 g.$$

Отсюда

$$F_{тр,1,скольж} = fN_1 = fm_1 g.$$

Поэтому заменяя $F_{тр,1,\max}$ на $F_{тр,1,скольж}$, получаем

$$fm_1 g = F_{\max} \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

откуда

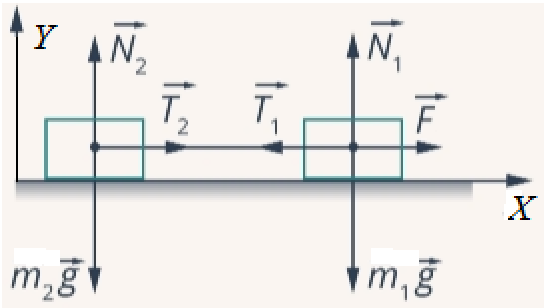
$$F_{\max} = (m_1 + m)fg.$$

Ответ: $F_{\max} = (m_1 + m)fg$

Задача 6. Два бруска, массы которых равны m_1 и m_2, связаны невесомой и нерастяжимой нитью и лежат на гладком столе. К одному из брусков приложена сила $\vec{F}$, направленная параллельно плоскости стола. При каком максимальном значении силы $F_{\max}$ нить оборвется, если сила будет приложена к бруску массой m_1. Нить выдерживает максимальную силу натяжения $T_{\max}$. Трением пренебречь.

Дано: m_1, m_2, T_{max}, g
Найти: F_{max}
Решение:

Сделаем рисунок. Выберем систему координат как показано на рисунке. Нарисуем векторы сил, действующие на каждое тело.
Запишем второй закон Ньютона для каждого тела.



Тело 1:
$$m_1\vec{a}_1 = m_2\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}.$$
Тело 2:
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2.$$
Запишем проекцию этих уравнений на ось OX:
$$m_1 a_{1x} = T_{1x} + F_x,$$
$$m_2 a_{2x} = T_{2x}.$$
Так как нить невесома и нерастяжима, то $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, откуда следует $T_{1x} = -T,\ \ T_{2x} = T$. По этой же причине $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$, $a_{1x} = a,\ \ a_{2x} = a$. Кроме того $F_x = F$. Тогда
$$m_1 a = F - T,$$
$$m_2 a = T.$$
Из этих уравнений исключаем a и выражаем F:
$$a = \frac{T}{m_2},$$
$$m_1\frac{T}{m_2} = F - T,$$
$$F = T\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$
Нить оборвется, если
$$T = T_{max}.$$
Подставляем это значение в уравнение $F = T\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$ и получаем ответ:
$$F_{max} = T_{max}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Ответ: $F_{max} = T_{max}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$.

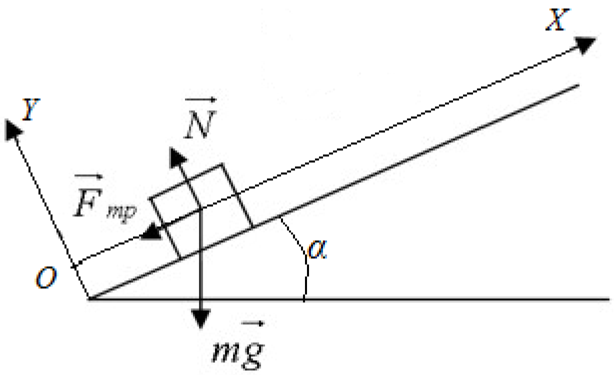
Задача 7. Тело находится у основания наклонной плоскости с углом при основании α = 30°. Коэффициент трения тела о поверхность равен μ = 0.6 и масса тела m = 2 кг. Сколько времени тело будет подниматься вверх по наклонной плоскости, если его толкнуть вверх вдоль плоскости с начальной скоростью $v_0 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Какое расстояние S тело при этом пройдет?

Дано: $\alpha = 30°$, $m = 2$ кг, $v_0 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, μ = 0.6, $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: $t_{под}$, S

Решение:

Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (система координат изображена на рисунке)



Запишем второй закон Ньютона для тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр},$$

где $m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}$ - сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ - сила трения.

Проекции второго закона Ньютона на координатные оси OX и OY есть:

$$OX: \quad ma_x = -mg\sin\alpha - F_{тр}$$

$$OY: \quad 0 = -mg\cos\alpha + N$$

Из второго уравнения находим N:

$$N = mg\cos\alpha$$

Зная N можно найти величину силы трения:

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Данное выражение подставляем в уравнение $ma_x = -mg\sin\alpha - F_{тр}$ и из него находим проекцию ускорения на ось OX:

$$ma_x = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Из последней формулы видно, что $a_x < 0$, т.е. движение тела вдоль оси OX является равнозамедленным.

Мы нашли ускорение движения тела по наклонной плоскости.

Теперь воспользуемся уравнениями кинематики поступательного равноускоренного движения тела:

$$r = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$
где $\vec{r}$ - радиус вектор тела (материальной точки) в момент времени t, $\vec{r}_0$ - радиус вектор тела (материальной точки) в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{v}$ - скорость тела (материальной точки) в момент времени t, $\vec{v}_0$ - скорость тела (материальной точки) в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{a}$ - ускорение тела.

Спроектируем данные уравнения на ось движения тела – ось OX:
$$x = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2},$$
$$v_x = v_0 + a_x t.$$
В момент времени $t = t_{под}$ тело остановилось, поэтому в этот момент времени $v_x = 0 \Rightarrow v_0 + a_x t_{под} = 0$.
Отсюда
$$t_{под} = -\frac{v_0}{a_x}.$$
Подставляя сюда $a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ получаем:
$$t_{под} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

В этот момент времени $x = S$, или
$$S = v_0 t_{под} + \frac{a_x t_{под}^{\ \ 2}}{2}$$
Подставляя сюда $t_{под} = -\frac{v_0}{a_x}$ находим
$$S = -v_0\frac{v_0}{a_x} + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_0}{a_x}\right)^2 = -\frac{v_0^{\ 2}}{2a_x}$$
Подставляя сюда $a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ находим
$$S = \frac{v_0^{\ 2}}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$
Ответ: $t_{под} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$, $S = \frac{v_0^{\ 2}}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

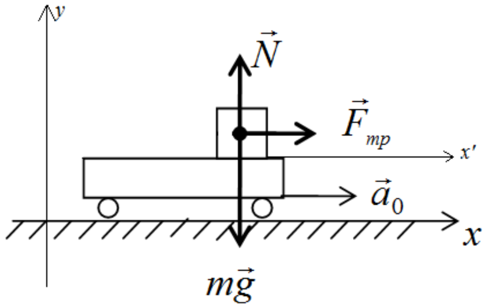
Задача 8. На край тележки длиной $l = 1{,}8$ м, движущейся горизонтально с ускорением $a_0 = 3$ м/с^2, положили брусок. Определите, за какое время брусок соскользнёт с доски, если коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu = 0{,}1$.

Дано: $l = 1{,}8\,\text{м}$, $a_0 = 2{,}1\,\text{м/с}^2$, $\mu = 0{,}1$, $g = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: t_c

Решение: Обозначим время, за которое время брусок соскользнёт с доски через t_c (время соскальзывания).

Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета, связанную с Землей.



Запишем второй закон Ньютона для бруска. На брусок действуют силы:
- сила тяжести $m\vec{g}$,

сила реакции опоры $\vec{N}$,

силы трения $\vec{F}_{тр}$, препятствующая относительному проскальзыванию тел.

При движении тележки в направлении оси Ox брусок будет двигаться в том же направлении, но с проскальзыванием, поэтому ускорение

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр},$$

где $\vec{a}$ - ускорение бруска относительно Земли. В проекции на координатные оси:

$$\text{На ось } Ox \quad ma = F_{тр} \tag{1}$$

$$\text{На ось } Oy \quad 0 = N - mg$$

Из второго уравнения получаем

$$N = mg.$$

Используем формулу, связывающую силу трения скольжения и силу нормальной реакции

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg.$$

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$ma = \mu mg,$$

откуда

$$a = \mu g. \tag{2}$$

Данная формула определяет модуль ускорения бруска относительно Земли. Найдем модуль ускорения a' бруска относительно тележки. Согласно классическому закону сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \tag{3}$$

где величины $\vec{v}$, $\vec{v}_0$, $\vec{v}'$ есть соответственно скорость бруска относительно Земли, скорость тележки относительно Земли, скорость бруска относительно тележки. Если взять производную от равенства (3) по времени, то мы получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}', \qquad (4)$$

где величины $\vec{a}$, $\vec{a}_0$, $\vec{a}'$ есть соответственно ускорение бруска относительно Земли, ускорение тележки относительно Земли, ускорение бруска относительно тележки.

Проектируя уравнение (4) на ось Ox, получаем

$$a = a_0 - a'.$$

Подставляя в данное уравнение выражение (2) для ускорения бруска относительно Земли, получаем

$$\mu g = a_0 - a',$$

откуда находим модуль ускорения бруска относительно тележки:

$$a' = a_0 - \mu g.$$

Запишем уравнение равноускоренного движения бруска в системе отсчета, связанной с тележкой (в проекции на ось Ox'), предполагая, что начальная координата и начальная скорость бруска равны нулю:

$$x' = \frac{a' t^2}{2}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$l = \frac{a' t_c^2}{2}$$

или

$$l = \frac{(a_0 - \mu g) t_c^2}{2},$$

откуда

$$t_c = \sqrt{\frac{2l}{a_0 - \mu g}},$$

Ответ: $t_c = \sqrt{\dfrac{2l}{a_0 - \mu g}}$.

Задача 9. При падении тела с большой высоты его скорость $v_{уст}$ при установившемся движении достигает 80 м/с. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найти:

1. Зависимость скорости тела от времени.
2. Время τ, в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной половине установившейся скорости.

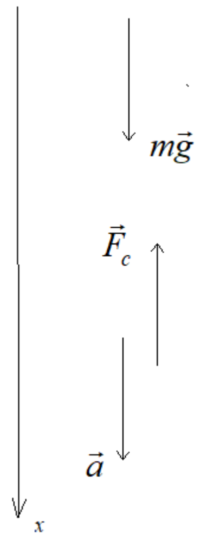
Дано: $v_{уст}$=80 м/с, $v(\tau) = \frac{1}{2} v_{уст}$, $F_c = kv$, g

Найти: τ, $v(t)$

Решение:

Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (ось Ox) как показано на рисунке. На тело действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления среды $\vec{F}_c$. Пусть m есть масса тела, $\vec{a}$ - его ускорение. Запишем 2 закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c$$



Спроектируем данное уравнение на ось Ox:

$$ma_x = mg + F_{c\,x},$$

где a_x - проекция ускорения на ось Ox, $F_{c\,x}$ - проекция силы сопротивления на ось Ox. Поскольку по условию задачи $F_c = kv$, $F_{c\,x} = -F_c = -kv_x$ то

$$ma_x = mg - kv_x. \qquad (1)$$

Запишем

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Тогда

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $v_x(t)$. Решим его. Пусть t текущее время и $v_x(t)$ есть скорость тела в момент времени t. Тогда в начальный момент времени $t=0$ по условию задачи $v_x(0)=0$. Далее запишем:

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x$$

$$\frac{dv_x}{mg - kv_x} = \frac{1}{m}dt$$

$$\int\limits_{v_x(0)}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{mg - kv_x} = \int\limits_0^t \frac{1}{m}dt$$

$$\frac{1}{-k}\ln\left(mg - kv_x\right)\Big|_{v_x(0)}^{v_x(t)} = \frac{1}{m}t\Big|_0^t$$

Поскольку $v_x(0)=0$, то

$$-\frac{1}{k}\ln\left(mg - kv_x(t)\right) + \frac{1}{k}\ln\left(mg\right) = \frac{1}{m}t\Big|$$

$$\ln\left(1 - \frac{kv_x(t)}{mg}\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$1 - \frac{kv_x(t)}{mg} = \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

$$v_x(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right).$$

В данной формуле нам неизвестен коэффициент сопротивления k. Найдем его из условия, что когда скорость установилась и стала равна $v_{\text{уст}}$, ускорение и тела равно нулю. Тогда из 2 закона Ньютона (1)

$$ma_x = mg - kv_x$$
$$0 = mg - kv_{\text{уст}}$$
$$k = \frac{mg}{v_{\text{уст}}}$$

И мы получаем

$$v_x(t) = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}t\right)\right).$$

Найдем τ из условия

$$v_x(\tau) = \frac{1}{2}v_{\text{уст}}$$

Или

$$\frac{1}{2}v_{\text{уст}} = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau\right)\right)$$
$$\frac{1}{2} = 1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau\right)$$
$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau\right)$$
$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau$$
$$\ln 2 = \frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau$$
$$\tau = \frac{v_{\text{уст}}\ln 2}{g}$$

Ответ: $v_x(t) = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}t\right)\right)$

$\tau = \frac{v_{\text{уст}}\ln 2}{g}$

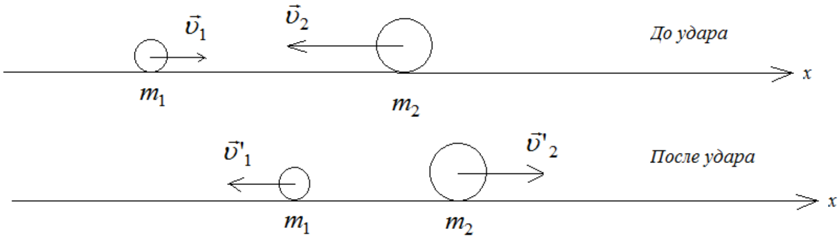
2. Законы сохранения

Задача 10. Происходит абсолютно упругий центральный удар двух шаров, массы которых m_1 и m_2, а скорости υ_1 и υ_2. Найти скорости шаров после удара.

Дано: m_1, m_2, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$

Найти: $\vec{\upsilon}'_1$, $\vec{\upsilon}'_2$

Решение: Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (координатная ось *Ox*):



Т.к. удар абсолютно упругий, то кроме закона сохранения импульса тел сохраняется и полная механическая энергия соударяющихся тел. Пусть до удара скорости шаров есть $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, а после удара $\vec{\upsilon}'_1$, $\vec{\upsilon}'_2$.

Запишем закон сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}.$$

Обозначим через υ_{1x}, υ_{2x} проекции скоростей шаров до удара, и через υ'_{1x}, υ'_{2x} проекции скоростей шаров после удара. Если υ_1 и υ_2 есть модули скоростей шаров до удара, то как видно из рисунка

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1,\ \upsilon_{2x} = -\upsilon_2.$$

При этом проекции υ'_{1x}, υ'_{2x} могут иметь любой знак в зависимости от того в какую сторону будут двигаться шары после удара.

Уравнение для проекций импульсов на ось x

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_{1x} + m_2\upsilon'_{2x}.$$

Закон сохранения энергии перепишем в виде

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon'^2_{1x}}{2} + \frac{m_2\upsilon'^2_{2x}}{2}$$

Итак, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными: υ'_{1x} и υ'_{2x}.

Перепишем систему в таком виде:

$$m_1\left(\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}\right) = m_2\left(\upsilon'_{2x} + \upsilon_2\right) \qquad (1)$$

$$m_1\left(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2_{1x}\right) = m_2\left(\upsilon'^2_{2x} - \upsilon_2^2\right). \qquad (2)$$

Разделив почленно, второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\left(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2_{1x}\right)}{\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}} = \frac{\left(\upsilon'^2_{2x} - \upsilon_2^2\right)}{\upsilon'_{2x} + \upsilon_2},$$

откуда

$$\upsilon_1 + \upsilon'_{1x} = \upsilon'_{2x} - \upsilon_2.$$

Выразим из этого уравнения υ'_{2x}

$$\upsilon'_{2x} = \upsilon_1 + \upsilon'_{1x} + \upsilon_2 \qquad (3)$$

и подставим его в уравнение (1):

$$m_1(\upsilon_1-\upsilon'_{1x})=m_2(\upsilon_2+\upsilon_1+\upsilon'_{1x}+\upsilon_2)$$

Отсюда найдем υ'_{1x}:

$$m_1(\upsilon_1-\upsilon'_{1x})=m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1+\upsilon'_{1x})$$

$$\upsilon'_{1x}(m_1+m_2)=m_1\upsilon_1-m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)$$

$$\upsilon'_{1x}=\frac{m_1\upsilon_1-m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)}{m_1+m_2}. \qquad (4)$$

Отметим, что υ'_{1x} может иметь различный знак. Если $\upsilon'_{1x}>0$ (или если $m_1\upsilon_1>m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)$), то после удара шар 1 движется по оси Ox, а если $\upsilon'_{1x}<0$ (или если $m_1\upsilon_1<m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)$), то против оси Ox.

Подставляя (4) в (3), найдем υ'_{2x}:

$$\upsilon'_{2x}=\upsilon_1+\frac{m_1\upsilon_1-m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)}{m_1+m_2}+\upsilon_2=$$

$$=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_1+m_1\upsilon_1-m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)+m_1\upsilon_2+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1\upsilon_1+m_1\upsilon_1+m_1\upsilon_2-m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{-m_2\upsilon_2+m_1(2\upsilon_1+\upsilon_2)}{m_1+m_2}.$$

Также отметим, что υ'_{2x} может иметь различный знак. Если $\upsilon'_{2x}>0$ (или если $m_1(2\upsilon_1+\upsilon_2)>m_2\upsilon_2$), то после удара шар 2 движется по оси Ox, а если $\upsilon'_{2x}<0$ (или если $m_1(2\upsilon_1+\upsilon_2)<m_2\upsilon_2$), то против оси Ox.

Ответ: $\upsilon'_{1x}=\dfrac{m_1\upsilon_1-m_2(2\upsilon_2+\upsilon_1)}{m_1+m_2}$, $\upsilon'_{2x}=\dfrac{-m_2\upsilon_2+m_1(2\upsilon_1+\upsilon_2)}{m_1+m_2}$

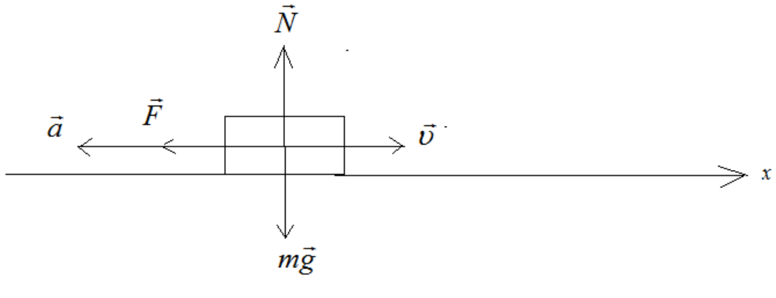
Задача 11. Двигатель тормозной системы некоторого тела развивает силу тяги, пропорциональную времени: $F=kt$, где $k=const$. В момент включения двигателя скорость тела составляла v_0. Считать, что масса тела равна m и масса двигателя много меньше массы тела. Пренебрегая трением, определить:

1. Через какое время τ от момента включения тормозного двигателя тело остановится.
2. Работу тормозного двигателя за произвольное время t после его включения.

Дано: $F=kt$, где $k=const$, m, v_0

Найти: τ, $A(t)$

Решение: Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (ось Ox).



На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяги тормозного двигателя $\vec{F}$.
Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

В проекции на ось Ox

$$ma_x = F_x$$

Поскольку

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},$$

то

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x$$

Сила торможения направлена тоже против оси Ох, поэтому

$$F_x = -kt$$

Тогда

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kt$$

или

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}t$$

Чтобы найти $v_x(t)$ надо взять интеграл от этого уравнения по времени от начального значения $t = 0$ до текущего значения t. Учитывая, что $v_x(0) = v_0$ имеем:

$$\int_0^t \frac{dv_x}{dt}dt = -\int_0^t \frac{k}{m}tdt$$

$$v_x(t) - v_x(0) = -\frac{k}{m}\frac{t^2}{2}$$

$$v_x(t) = v_0 - \frac{kt^2}{2m}$$

Поскольку v_x изменяется от v_0 до 0, т.е. неотрицательна, то проекция скорости совпадает с модулем скорости $v_x = v$ и мы запишем

$$v(t) = v_0 - \frac{kt^2}{2m}$$

Полагая в этом уравнении $v(t) = 0$ мы найдем уравнение для определения времени движения:

$$0 = v_0 - \frac{k\tau^2}{2m}.$$

Отсюда находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}}\ .$$

Для вычисления работы используем теорему об изменении кинетической энергии физической системы, состоящей из материальных точек,

$$A = \Delta E_k = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv(t)^2}{2}.$$

$$A = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m}{2}\left(v_0 - \frac{kt^2}{2m}\right)^2 = \frac{kv_0t^2}{2} - \frac{k^2t^4}{8m}$$

Ответ: $\tau = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}}$

$$A = \frac{k\upsilon_0 t^2}{2} - \frac{k^2t^4}{8m}$$

Задача 12. Молот массой m_1=200 кг ударяет кусок железа, масса которого m_2 вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость v_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти:

1. Кинетическую энергию T_1 молота в момент удара;
2. Энергию T_2, переданную куску железа с наковальней;
3. Энергию T, затраченную на деформацию куска железа;
4. Коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о кусок железа.

Удар молота о железо рассматривать как абсолютно неупругий.

Дано: m_1=200 кг, m_2=2500 кг, v_1=2 м/с

Найти: T_1, T_2, T, η

Решение. Кинетическую энергию молота в момент удара найдем по формуле

$$T_1 = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

Чтобы определить энергию, переданную куску железа с наковальней, предварительно найдем скорость системы «молот+железо с наковальней» непосредственно после удара. Удар абсолютно неупругий, поэтому после удара система «молот+железо с наковальней» будет двигаться как единое целое со скоростью, которую мы обозначим через u. Тогда применим закон сохранения импульса, который состоит в том, что импульс системы до удара и после удара совпадают:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

Учтем, что скорость железа с наковальней до удара $\vec{v}_2$ равна 0 и спроектируем данное уравнение на ось системы координат, направление которой совпадает с направлением движения молота:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$$

Отсюда

$$u=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$$

При этом энергия T_2, переданная куску железа с наковальней есть

$$T_2=\frac{m_2u^2}{2}=\frac{m_2\left(\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right)^2}{2}=\frac{m_2m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)^2}$$

Молот до удара обладал энергией T_1. После удара вся система «молот+железо с наковальней» получила энергию

$$T'=\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right)^2}{2}=\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}$$

Следовательно, на деформацию куска железа использовалась энергия

$$T=T_1-T'.$$

Или

$$T=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}$$

Назначение молота - путем ударов о кусок железа, находящийся на наковальне, вызвать его деформацию. Следовательно, энергию T следует считать полезной. КПД удара молота о поковку равен отношению энергии T, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta=\frac{T}{T_1}$$

Или

$$\eta=\frac{\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}}{\frac{m_1v_1^2}{2}}=1-\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

Ответ: $T_1=\frac{m_1v_1^2}{2}$, $T_2=\frac{m_2m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)^2}$, $T=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)}$, $\eta=\frac{m_2}{m_1+m_2}$