Примеры решения задач по теме Молекулярная физика и термодинамика

Задача 1. Определить молярную массу μ вещества X, молекула которого состоит из n_1 атомов одноатомного вещества X_1 и n_2 атомов одноатомного вещества X_2, если известны молярные массы веществ X_1 и X_2, равные μ_1 и μ_2 соответственно.

Дано: n_1, n_2, μ_1, μ_2

Найти: μ

Решение.

Молярная масса численно равна массе одного моля вещества, то есть массе вещества, содержащего число молекул, равное числу Авогадро N_A. Пусть мы имеем N_A молекул вещества X, причем масса одной молекулы вещества X равна m. Тогда

$$\mu = mN_A,$$

$$m = \frac{\mu}{N_A} \qquad (1)$$

Пусть масса одного атома вещества X_1 равна m_1, а масса одного атома вещества X_2 равна m_2. Тогда для веществ X_1 и X_2 можем записать:

$$m_1 = \frac{\mu_1}{N_A}, \quad m_2 = \frac{\mu_2}{N_A} \qquad (2)$$

Поскольку для одной молекулы вещества X

$$m = n_1 m_1 + n_2 m_2 = n_1 \frac{\mu_1}{N_A} + n_2 \frac{\mu_2}{N_A},$$

или, с учетом (1),

$$\frac{\mu}{N_A} = n_1 \frac{\mu_1}{N_A} + n_2 \frac{\mu_2}{N_A},$$

откуда

$$\mu = n_1\mu_1 + n_2\mu_2.$$

Ответ: $\mu = n_1\mu_1 + n_2\mu_2$

Задача 2. Найти молярную массу μ смеси кислорода массой m_1=25 г и азота массой m_2=75 г.

Дано: m_1, m_2, μ_1, μ_2

Найти: μ

Решение.

Молярная масса смеси μ есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν т. е.

$$\mu = \frac{m}{\nu}$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси:

$$m = m_1 + m_2,$$

где m_1 и m_2 есть соответственно масса кислорода и азота.

Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества кислорода ν_1 и азота ν_2

$$\nu = \nu_1 + \nu_2.$$

Поэтому

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}$$

Поскольку для кислорода и азота в отдельности

$$\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}, \quad \nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2},$$

то

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \mu_1\mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_2 m_1 + \mu_1 m_2}$$

Ответ: $\mu = \mu_1\mu_2 \dfrac{m_1 + m_2}{\mu_2 m_1 + \mu_1 m_2}$

Задача 3. В баллоне объемом V находится гелий под давлением p_1 при температуре T_1. После того как из баллона был выпущен гелий массой m, температура в баллоне понизилась до T_2. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано: V, p_1, T_1, T_2, m, μ

Найти: p_2

Решение.

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа. Для начального состояния уравнение имеет вид

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1$$

а для конечного состояния

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2$$

где m_1 и m_2 есть массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из этих двух уравнений:

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1}, \quad m_2 = \frac{\mu p_2 V}{R T_2}$$

Массы m_1 и m_2 по условию задачи должны удовлетворять соотношению

$$m_1 - m_2 = m$$

Подставляя в последнее выражение формулы для m_1 и m_2, получаем

$$\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - \frac{\mu p_2 V}{RT_2} = m$$

Отсюда выражаем p_2

$$\frac{\mu p_2 V}{RT_2} = \frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m$$

$$p_2 = \frac{RT_2}{\mu V}\left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m\right) = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{RmT_2}{\mu V}$$

Ответ: $p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{RmT_2}{\mu V}$

Задача 4. Пылинки массой m=10^{-18} г взвешены в воздухе. Определить толщину слоя воздуха Δz, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на $\varepsilon = 0.01 = 1$ %. Температура T воздуха во всём объеме одинакова и равна 300 К.

Дано: m, $\varepsilon = 0.01$, T, g

Найти: Δz

Решение.

Введем вертикальную ось Oz с началом у поверхности Земли. Согласно формуле распределения Больцмана, при равновесном распределении пылинок концентрация их зависит только от координаты z по оси, направленной вертикально, поскольку потенциальная энергия пылинок $U = mgz$ зависит только от z. Согласно данной формуле мы имеем (см. лекцию):

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right),$$

где n_0 - концентрация пылинок у поверхности Земли, $n(z)$ - концентрация пылинок на высоте z, k - постоянная Больцмана.

Пусть при изменении высоты на величину Δz концентрация пылинок изменяется на величину Δn. По условию задачи, изменение Δn концентрации с высотой мало по сравнению с n:

$$\frac{\Delta n}{n} = \varepsilon = 0.01 \ll 1$$

поэтому без существенной погрешности изменение концентрации Δn можно заменить бесконечно малой величиной dn. Тогда, дифференцируя выражение $n(z)=n_0\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$ по z, получим

$$\frac{dn}{dz}=n'(z)=-\frac{mg}{kT}n_0\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)=-\frac{mg}{kT}n,$$

то есть

$$\frac{dn}{dz}=-\frac{mg}{kT}n,$$

откуда

$$\frac{dn}{n}=-\frac{mg}{kT}dz$$

Переходя обратно от бесконечно малых величин dn и dz к конечным, но достаточно маленьким величинам Δn и Δz мы запишем приближенно

$$\frac{\Delta n}{n}\approx-\frac{mg}{kT}\Delta z$$

Или

$$\varepsilon\approx-\frac{mg}{kT}\Delta z,$$

откуда

$$\Delta z\approx\frac{kT}{mg}\varepsilon$$

Ответ: $\Delta z\approx\frac{kT}{mg}\varepsilon$

Задача 5.

В сосуде содержится газ, количество вещества ν которого равно $\nu=1.2\,\text{моль}$. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число ΔN молекул, скорости v которых меньше $\varepsilon v_\text{в}$, где $v_\text{в}$ - наиболее вероятная скорость, $\varepsilon=0.001$

Дано: $\nu=1.2\,\text{моль}$, $\varepsilon=0.001$, $v<\varepsilon v_\text{в}$

Найти: ΔN

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по скоростям (формула из лекции):

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Смысл этой функции следующий. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv, то на каждый интервал скорости будет приходиться число молекул $dN(v)$, равное

$$dN(v)=f(v)Ndv,$$

где N - полное число молекул.

Тогда число молекул, скорости которых лежат в пределах от 0 до $\varepsilon v_\text{в}$ будет равно

$$\Delta N = \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} f(v) N dv$$

или

$$\Delta N = \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) N dv =$$

$$\Delta N = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Поскольку газа ν молей, то
$N = \nu N_A$, где N_A есть число Авогадро, поэтому

$$\Delta N = 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Вычисление такого интеграла затруднительно. Тем не менее, заметим, что (из лекций) $v_\text{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Выражение под интегралом в экспоненте очень мало:

$$\frac{mv^2}{2kT} \le \frac{m(\varepsilon v_\text{в})^2}{2kT} = \frac{m\varepsilon^2}{2kT}\frac{2kT}{m} = \varepsilon^2 = 0.000001 << 1$$

Поэтому мы можем использовать приближенную формулу:

$$\exp(-x) \approx 1 - x \approx 1 \quad \text{при } x << 1$$

Тогда $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \approx 1$ и мы получаем

$$\Delta N = 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \approx$$

$$\approx 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 dv =$$

$$= 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{(\varepsilon v_\text{в})^3}{3} =$$

$$= 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{\varepsilon^3}{3} =$$

$$= 4\nu N_A \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ \frac{\varepsilon^3}{3}$$

Ответ: $\Delta N = 4\nu N_A \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ \frac{\varepsilon^3}{3}$

Задача 6. Найти функцию $\tilde{f}(p)$ распределения молекул по импульсам и определить среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$

Дано: $f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$

Найти: $\tilde{f}(p)$, $\langle p^2 \rangle$

Решение.

Из лекции мы знаем функцию распределения молекул по скоростям:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Смысл этой функции следующий. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv, то на каждый интервал скорости будет приходиться число молекул $dN(v)$, равное

$$dN = f(v)Ndv, \tag{1}$$

где N - полное число молекул.

Рассмотрим функцию распределения молекул по импульсам $\tilde{f}(p)$ (которую мы не знаем). Тогда смысл этой функции должен быть следующий. Если разбить диапазон импульсов молекул на малые интервалы, равные dp, то на каждый интервал импульса будет приходиться число молекул dN, равное

$$dN = \tilde{f}(p)Ndp, \tag{2}$$

где N - полное число молекул.

Приравнивая (1) и (2) получим

$$f(v)Ndv = \tilde{f}(p)Ndp$$

или

$$\tilde{f}(p) = f(v)\frac{dv}{dp}$$

Поскольку $p = mv$, то $v = \frac{p}{m}$ и $\frac{dv}{dp} = \frac{1}{m}$, поэтому

$$\tilde{f}(p) = f(v)\frac{1}{m} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\frac{1}{m} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right)$$

Найдем среднее значение квадрата импульса. По определению среднего значения:

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \int_0^\infty p^2 \tilde{f}(p) dp$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \int_0^\infty p^2\, 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) dp =$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \int_0^\infty p^4 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) dp$$

Интеграл вычислим с помощью формулы в конце задачника Воробьева-Чертова

$$\int_0^\infty x^4 \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\, a^{-5/2} \,,$$

положив $a = \dfrac{1}{2mkT}$, то есть

$$\int_0^\infty p^4 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} \right) dp = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} (2mkT)^{5/2}$$

Тогда

$$\left\langle p^2 \right\rangle = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \frac{3}{8}\sqrt{\pi} (2mkT)^{5/2} = 3mkT$$

Ответ: $\tilde{f}(p) = 4\pi \left(\dfrac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 \exp\left(-\dfrac{p^2}{2mkT} \right)$

$\left\langle p^2 \right\rangle = 3mkT$

Задача 7. Средняя длина свободного пробега молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна $\langle l \rangle$=40 нм. Определить среднюю арифметическую скорость (средний модуль скорости) $\langle v \rangle$ молекул и среднее число соударений $\langle z \rangle$, которые испытывает молекула за единицу времени (т.е. в 1 с).

Дано: $\langle l \rangle$, μ, T, p

Найти: $\langle v \rangle$, $\langle z \rangle$

Решение.

Из лекций известно, что средняя арифметическая скорость (или средний модуль скорости) молекул определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \,,$$

где μ - молярная масса вещества и это есть первый ответ.

По смыслу отношение средней длины свободного пробега к средней скорости есть среднее время между соударениями молекулы:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Поскольку одно соударение между молекулами происходит в среднем за время $\langle t \rangle$, то за единицу времени происходит число соударений, равное

$$\langle z \rangle = \frac{1}{\langle t \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}$$

Или

$$\langle z \rangle = \frac{1}{\langle l \rangle}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Ответ: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

$\langle z \rangle = \frac{1}{\langle l \rangle}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

Задача 8. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление p=79 кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с t_1=5°С до t_2=1°С. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Дано: p, $T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$, p_0, μ

Найти: Δh

Решение.

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT}h\right),$$

где p и p_0 – давления газа на высотах h и h = 0, μ - масса одного моля воздуха. Барометр может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h_1 (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев.

Первый случай – температура за бортом T_1, высота самолета h_1

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT_1}h_1\right)$$

Второй случай – температура за бортом T_2, высота самолета h_2

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT_2} h_2\right)$$

Выразим h_1 и h_2

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu g}{RT_1} h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{RT_1}{\mu g}\ln\frac{p_0}{p},$$

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu g}{RT_2} h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{RT_2}{\mu g}\ln\frac{p_0}{p}$$

Получаем ответ

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{RT_2}{\mu g}\ln\frac{p_0}{p} - \frac{RT_1}{\mu g}\ln\frac{p_0}{p} = \frac{R}{\mu g}\left(\ln\frac{p_0}{p}\right)(T_2 - T_1)$$

Отметим, что $\Delta h < 0$, так как $T_2 < T_1$, т.е. самолет снизился.

Ответ: $\Delta h = \frac{R}{\mu g}\left(\ln\frac{p_0}{p}\right)(T_2 - T_1)$

Термодинамика

Задача 9. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли газов соответственно равны ω_1=0.8 и ω_2=0.2.

Дано: $\mu_{\text{неон}}$, $\mu_{\text{водор}}$, $i_{\text{неон}} = 3$, $i_{\text{водор}} = 5$, ω_1, ω_2.

Найти: $c_{v,\text{неон}}$, $c_{v,\text{водор}}$, $c_{p,\text{неон}}$, $c_{p,\text{водор}}$

Решение.

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме есть (согласно лекциям):

$$C_v = \frac{i}{2}R$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении есть (согласно лекциям):

$$C_p = \frac{i+2}{2}R$$

Здесь i есть число степеней свободы у молекулы газа.

Удельная теплоемкость есть теплоемкость 1 килограмма газа. Молярная теплоемкость есть теплоемкость одного моля газа. В одном моле газа содержится μ килограмм газа. Поэтому молярные C и удельные c теплоемкости связаны как

$$c = \frac{C}{\mu}.$$

В итоге находим:

$$c_{v,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}}}{2\mu_{\text{неон}}} R,$$

$$c_{v,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}}}{2\mu_{\text{водор}}} R,$$

$$c_{p,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}} + 2}{2\mu_{\text{неон}}} R,$$

$$c_{p,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}} + 2}{2\mu_{\text{водор}}} R$$

Рассмотрим смесь этих газов в соотношении $\dfrac{\omega_{\text{неон}}}{\omega_{\text{водор}}} = \dfrac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}$, $\omega_{\text{неон}} + \omega_{\text{водор}} = 1.$

Отсюда

$$\frac{\omega_{\text{неон}}}{1 - \omega_{\text{неон}}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}$$

$$\omega_{\text{неон}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}} \left(1 - \omega_{\text{неон}}\right)$$

$$\omega_{\text{неон}} \left(1 + \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}\right) = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}$$

Тогда

$$\omega_{\text{неон}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}},$$

Аналогично

$$\omega_{\text{водор}} = \frac{m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}}$$

Нагреем эту смесь при постоянном объеме так, чтобы ее температура изменилась на ΔT. Тогда теплота, необходимая для нагревания смеси на ΔT, есть:

$$Q = c_v \left(m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}\right) \Delta T$$

При этом

$$Q = Q_{\text{неон}} + Q_{\text{водор}}$$

где $Q_{\text{неон}}$ - та часть тепла, которая пошла на нагрев (увеличение внутренней энергии) неона, а $Q_{\text{водор}}$ - та часть тепла, которая пошла на нагрев (увеличение внутренней энергии) водорода.

Поскольку

$$Q_{\text{неон}} = c_{v,\text{неон}} m_{\text{неон}} \Delta T$$

$$Q_{\text{водор}} = c_{v,\text{водор}} m_{\text{водор}} \Delta T$$

Тогда получаем

$$c_v\left(m_{\text{неон}}+m_{\text{водор}}\right)\Delta T=c_{v,\text{неон}}m_{\text{неон}}\Delta T+c_{v,\text{водор}}m_{\text{водор}}\Delta T$$

$$c_v\left(m_{\text{неон}}+m_{\text{водор}}\right)=c_{v,\text{неон}}m_{\text{неон}}+c_{v,\text{водор}}m_{\text{водор}}$$

$$c_v=\frac{c_{v,\text{неон}}m_{\text{неон}}+c_{v,\text{водор}}m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}}+m_{\text{водор}}}$$

$$c_v=c_{v,\text{неон}}\frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{неон}}+m_{\text{водор}}}+c_{v,\text{водор}}\frac{m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}}+m_{\text{водор}}}$$

$$c_v=c_{v,\text{неон}}\omega_{\text{неон}}+c_{v,\text{водор}}\omega_{\text{водор}}$$

$$c_v=\frac{i_{\text{неон}}R}{2\mu_{\text{неон}}}\omega_{\text{неон}}+\frac{i_{\text{водор}}R}{2\mu_{\text{водор}}}\omega_{\text{водор}}.$$

Рассуждая точно также, но при нагревании газа при постоянном давлении, мы получаем вместо последних двух формул

$$c_p=c_{p,\text{неон}}\omega_{\text{неон}}+c_{p,\text{водор}}\omega_{\text{водор}}$$

$$c_p=\frac{\left(i_{\text{неон}}+2\right)R}{2\mu_{\text{неон}}}\omega_{\text{неон}}+\frac{\left(i_{\text{водор}}+2\right)R}{2\mu_{\text{водор}}}\omega_{\text{водор}}$$

Ответ:

$$c_{v,\text{неон}}=\frac{i_{\text{неон}}}{2\mu_{\text{неон}}}R,$$

$$c_{v,\text{водор}}=\frac{i_{\text{водор}}}{2\mu_{\text{водор}}}R,$$

$$c_{p,\text{неон}}=\frac{i_{\text{неон}}+2}{2\mu_{\text{неон}}}R,$$

$$c_{p,\text{водор}}=\frac{i_{\text{водор}}+2}{2\mu_{\text{водор}}}R$$

$$c_v=\frac{i_{\text{неон}}R}{2\mu_{\text{неон}}}\omega_{\text{неон}}+\frac{i_{\text{водор}}R}{2\mu_{\text{водор}}}\omega_{\text{водор}}$$

$$c_p=\frac{\left(i_{\text{неон}}+2\right)R}{2\mu_{\text{неон}}}\omega_{\text{неон}}+\frac{\left(i_{\text{водор}}+2\right)R}{2\mu_{\text{водор}}}\omega_{\text{водор}}$$

Задача 10. Определить количество теплоты, поглощаемой водородом массой m при нагревании его от температуры T_1 до температуры T_2 при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано: m, T_1, T_2, $i=5$, μ

Найти: Q, ΔU, A

Решение.

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарическом нагревании от температуры T_1 до температуры T_2, определяется по формуле

$$Q = mc_p\left(T_2 - T_1\right),$$

где m - масса нагреваемого газа; c_p - его удельная теплоемкость при постоянном давлении.

$$c_p = \frac{C_p}{\mu},$$

где

$$C_p = \frac{i+2}{2}R$$

есть молярная теплоемкость газа при постоянном давлении. Тогда

$$c_p = \frac{i+2}{2\mu}R$$

и мы получаем:

$$Q = m\frac{i+2}{2\mu}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Внутренняя энергия выражается формулой (из лекции)

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

следовательно, изменение внутренней энергии есть

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT_2 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$A = Q - \Delta U = m\frac{i+2}{2\mu}R\left(T_2 - T_1\right) - \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Ответ: $Q = m\dfrac{i+2}{2\mu}R\left(T_2 - T_1\right)$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right)$$

$$A = \frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Задача 11. Кислород занимает объем V_1=1 м^3 и находится под давлением p_1=200 кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема V_2=3 м^2, а затем при постоянном объеме до давления p_2=500 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;

2) совершенную им работу A;

3) количество теплоты Q, переданное газу.

Дано: V_1, V_2, p_1, p_2, $i = 5$, μ

Найти: Q, ΔU, A

Решение.

Сначала идет процесс нагревания газа при постоянном давлении p_1. При этом процессе меняются температура и объем, т.е.:

$$(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$$

Затем происходит нагревание газа при постоянном объеме. При этом меняются температура и давление:

$$(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$$

Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния (p_1, V_1, T_1) в состояние (p_2, V_2, T_2) выражается формулой

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$$

Чтобы найти температуры напишем уравнение Менделеева-Клапейрона для состояний (p_1, V_1, T_1) и (p_2, V_2, T_2)

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$$

$$T_1 = \frac{\mu}{mR} p_1 V_1$$

$$T_2 = \frac{\mu}{mR} p_2 V_2$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(\frac{\mu}{mR} p_2 V_2 - \frac{\mu}{mR} p_1 V_1\right) = \frac{i}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Полная работа, совершаемая газом, равна

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 - работа в процессе $(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$, A_2 - работа в процессе $(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$.

В процессе $(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$ давление постоянно (p=const). Работа в этом случае выражается формулой

$$A_1 = p_1(V_2 - V_1)$$

В процессе $(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$ объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю, т.е. $A_2 = 0$. Таким образом,

$$A = A_1 = p_1(V_2 - V_1)$$

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_1(V_2 - V_1)$$

Ответ: $\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$

$A = p_1(V_2 - V_1)$

$Q = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_1(V_2 - V_1)$

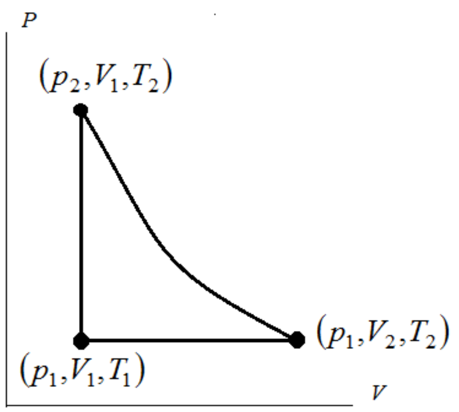
Задача 12. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества v=l моль, находится под давлением p_1=250кПа и занимает объем V_1==10 л. Сначала газ изохорически нагревают до температуры T_2=400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарического сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический КПД η цикла.

Дано: v, V_1, T_2, p_1, $i = 5$

Найти: η

Решение.

Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах p, V этот цикл имеет вид:



Характерные точки цикла обозначим состояниями (p_1, V_1, T_1), (p_2, V_1, T_2), (p_1, V_2, T_2).

Термический КПД любого цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, отданное газом за цикл охладителю. Заметим, что разность количеств теплоты $Q_1 - Q_2$ равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах p, V изображается площадью цикла (площадь внутренности изображенной фигуры).

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_1'на участке (p_1, V_1, T_1)-(p_2, V_1, T_2), (изохорический процесс) и Q_1'' на участке (p_2, V_1, T_2)- (p_1, V_2, T_2) (изотермический процесс). Таким образом:

$$Q_1 = Q_1' + Q_1''$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорическом процессе (p_1,V_1,T_1)-(p_2,V_1,T_2), равно

$$Q_1' = C_v \nu (T_2 - T_1)$$

где C_v - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; ν — количество вещества. Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделева для состояния (p_1,V_1,T_1):

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}$$

Тогда

$$Q_1' = C_v \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R} \right)$$

Поскольку $C_v = \frac{i}{2} R$, то

$$Q_1' = \frac{i}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R} \right)$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе (p_2,V_1,T_2)- (p_1,V_2,T_2), равно (лекции)

$$Q_1'' = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Объем V_2 найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделева для состояния (p_1,V_2,T_2):

$$V_2 = \frac{\nu R T_2}{p_1}$$

Тогда

$$Q_1'' = \nu R T_2 \ln\left(\frac{\frac{\nu R T_2}{p_1}}{V_1} \right) = \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1} \right)$$

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = \frac{i}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R} \right) + \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1} \right)$$

На участке (p_1,V_2,T_2)-(p_1,V_1,T_1)газ отдает количество теплоты Q_2, равное

$$Q_2 = C_p \nu (T_2 - T_1) = C_p \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R} \right)$$

где C_p - молярная теплоемкость газа при изобарном процессе, равная

Поскольку $C_p = \frac{i+2}{2} R$, то

$$Q_2 = \frac{i+2}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)$$

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу для η:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{i+2}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{\frac{i}{2} R\nu\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$$

$$= 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{i\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + 2T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{i\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + 2T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$

Задача 13. В цилиндре под поршнем находится водород массой m при температуре T_1. Водород начал расширяться адиабатически, увеличив свой объем в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в $n_2 = 6$ раз. Найти температуру T_2, в конце адиабатического расширения и работу A, совершенную газом.

Дано: m, μ, γ, $\frac{V_2}{V_1} = n_1$, $\frac{V_2}{V_3} = n_2$ T_1, $i = 5$

Найти: T_2, A

Решение. Над газом совершается два процесса:

(p_1, V_1, T_1)-(p_2, V_2, T_2) - адиабатический процесс

(p_2, V_2, T_2)-(p_3, V_3, T_2) - изотермический процесс

Запишем уравнения для адиабатического процесса $TV^{\gamma-1} = const$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Отсюда

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\gamma-1} = T_1 n_1^{1-\gamma}$$

Работа A равна работе газа $A_1 > 0$ при адиабатическом расширении плюс работа газа $A_2 < 0$ при изотермическом сжатии, то есть

$$A = A_1 + A_2$$

Работа A_1 газа при адиабатическом расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2)$$

Поскольку $C_v = \frac{i}{2} R$, то

$$A_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2)$$

Поскольку $T_2 = T_1 n_1^{1-\gamma}$, то

$$A_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \left(T_1 - T_1 n_1^{1-\gamma}\right)$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2 = RT_2 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_3}{V_2} = -RT_2 \frac{m}{\mu} \ln n_2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \left(T_1 - T_1 n_1^{1-\gamma}\right) - RT_2 \frac{m}{\mu} \ln n_2$$

Ответ: $A = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \left(T_1 - T_1 n_1^{1-\gamma}\right) - RT_2 \frac{m}{\mu} \ln n_2$

Задача 14. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой $m = 1$ кг от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 373$ К и последующем превращении воды в пар той же температуры.

Дано: $m = 1$ кг, $T_1 = 273$ К, $T_1 = 373$ К, λ, c

Найти: ΔS

Решение. Найдем отдельно изменение энтропии $\Delta S'$ при нагревании воды и изменение энтропии $\Delta S''$ при превращении ее в пар. Полное изменение энтропии выразится суммой

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S''$$

Как известно, изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\delta Q = mcdT$, где m — масса тела; c — егоудельная теплоемкость. Подставив выражение δQ в равенство $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$, найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды:**.**

$$\Delta S' = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

При вычислении по формуле $\varDelta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ изменения энтропии во время превращения воды в пар той же температуры постоянная температура T выносится за знак интеграла. Вычислив интеграл, найдем

$$\varDelta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T_2}$$

где Q количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры T_2. Подставив в равенство $\varDelta S'' = \frac{Q}{T_2}$ выражение количества теплоты $Q = \lambda m$, где λ - удельная теплота парообразования, получим

$$\varDelta S'' = \frac{\lambda m}{T_2}$$

Окончательно получаем:

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_2}$$

Ответ: $\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_2}$

Задача 15. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой m от объема V_1 до объема V_2.

Дано: m, V_1, V_2, μ

Найти: ΔS

Решение. Так как процесс изотермический, то в общем выражении энтропии

$$\varDelta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

температуру выносят за знак интеграла. Выполнив это, получим

$$\varDelta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T}$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$ Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A$$

Работа A для этого (изотермического) процесса определяется по формуле (из лекций):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Тогда

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{A}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Ответ: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$