Разбор практических задач по теме «Кинематика поступательного и вращательного движения».

Сначала разберем две задачи средней сложности. Обратите внимание на пояснения!

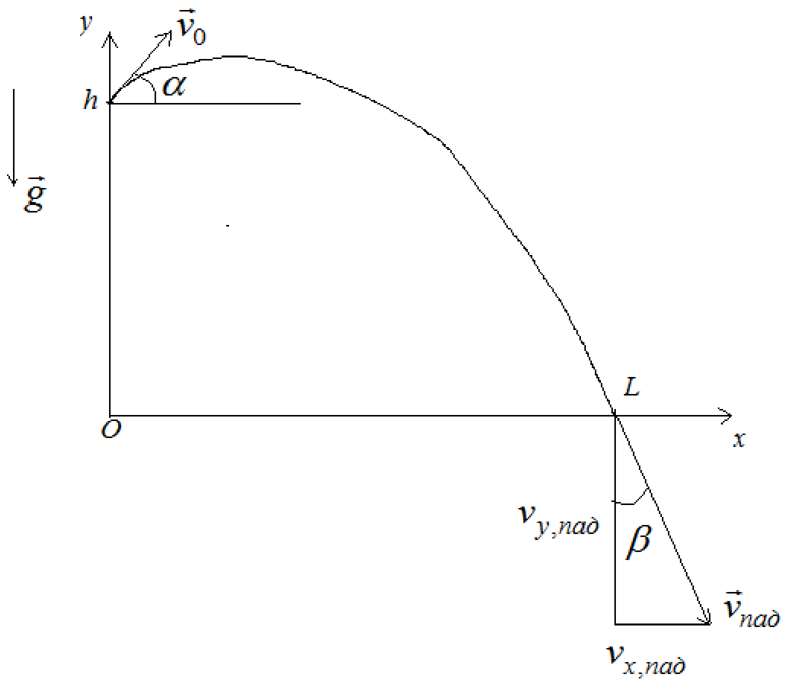
Задача 1. Тело сбросили с балкона 10 этажа дома, находящегося на высоте $h = 30$ м от поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти:

1. Время полета (или момент времени падения)
2. Расстояние от дома до места падения тела.
3. Скорость тела в момент падения.
4. Тангенциальное и нормальное ускорение тела в момент падения.

Дано: $h = 30$, $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: $t_{пад}$, L, $v_{пад}$, $a_{n,пад}$, $a_{\tau,пад}$

Решение. Выберем систему отсчета *Oxy* и сделаем рисунок



Здесь обозначено $\vec{v}_{пад}$, $v_{x,пад}$, $v_{y,пад}$ скорость в момент падения и ее проекции на оси *Ox* и *Oy*.

Будем решать задачу координатным методом.

Запишем общие уравнения равноускоренного движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (2)$$

Теперь запишем проекции этих уравнений на координатные оси *Ox* и *Oy*. Уравнения (1) и (2) в проекции на координатные оси запишутся в виде

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (3)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \qquad (4)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (5)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad (6)$$

Заметим, что $\vec{a} = \vec{g}$ и проекции ускорения на координатные оси *Ox* и *Oy* равны соответственно

$$a_x = 0,\ a_y = -g\ . \qquad (7)$$

Проекции вектора начальной скорости $\vec{v}_0$ на координатные оси *Ox* и *Oy* равны соответственно

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha\,,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \qquad (8)$$

Начальные координаты x_0 и y_0 равны

$$x_0 = 0,\ y_0 = h \qquad (9)$$

Учитывая (7), (8) и (9), мы перепишем уравнения (3), (4), (5) и (6) в виде

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad (10)$$

$$y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \qquad (11)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad (12)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad (13)$$

Уравнения (10), (11), (12) и (13) полностью описывают движение тела и позволяют найти любую величину, относящуюся к этому движения.

Сначала найдем момент времени $t_{пад}$, в который тело упало на землю. В данный момент времени $y = 0$, поэтому из уравнения (11) имеем

$$0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

или

$$gt_{пад}^2 - 2v_0 \sin\alpha \cdot t_{пад} - 2h = 0$$

Решаем данное квадратное уравнение относительно $t_{пад}$:

$$D = 4v_0^2 \sin^2\alpha + 8gh$$

$$t_{пад} = \frac{2v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2\alpha + 8gh}}{2g} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Мы должны выбрать перед корнем знак «+», в противном случае $t_{пад}$ будет отрицательным, что не допустимо.

$$t_{пад} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{14}$$

Расстояние L от дома до места падения тела равно координате x тела в момент времени $t_{пад}$. Поэтому подставляя (14) в (10), получаем:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t_{пад} = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} =$$

$$= v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right) \tag{15}$$

Чтобы найти скорость тела в момент падения, нужно найти координаты скорости в момент падения $v_{x,пад}$, $v_{y,пад}$. Эти величины можно найти, подставив в уравнения для проекций скоростей (12) и (13) время падения (14):

$$v_{x,пад} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{y,пад} = v_0 \sin\alpha - g\,\frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} =$$

$$= -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \tag{16}$$

Знак «-» в формуле (16) показывает, что проекция вектора скорости на ось *Oy* направлен против оси *Oy*.

Значение модуля $v_{пад}$ вектора скорости $\vec{v}_{пад}$ определяем по теореме Пифагора:

$$v_{пад} = \sqrt{v_{x,пад}^2 + v_{y,пад}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \tag{17}$$

Тангенциальное ускорение тела в момент падения есть проекция полного ускорения $\vec{g}$ на касательную к траектории. Из рисунка видно, что

$$a_{\tau,пад} = g \cos\beta$$

С другой стороны из рисунка видно, что

$$\cos\beta = \frac{\left| v_{y,пад} \right|}{v_{пад}} = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Поэтому

$$a_{\tau,пад} = g\,\frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \tag{17}$$

Нормальное ускорение найдем условия, что квадрат полного ускорения равен сумме квадратов нормального и тангенциального ускорения:

$$g^2 = a_{\tau,пад}^2 + a_{n,пад}^2$$

Отсюда

$$a_{n,пад} = \sqrt{g^2 - a_{\tau,пад}^2} = \sqrt{g^2 - \left(g\,\frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)^2} =$$

$$= g\sqrt{1 - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}{v_0^2 + 2gh}} = g\sqrt{\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{v_0^2 + 2gh}} \qquad (17)$$

Ответ:

$$t_{пад} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

$$L = v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$$

$$v_{пад} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$a_{\tau,пад} = g\,\frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$a_{n,пад} = g\sqrt{\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{v_0^2 + 2gh}}$$

Задача 2. Материальная движется в плоскости *Oxy* и в данной системе отсчета координаты материальной точки зависят от времени по закону:

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

$$y(t) = dt^3$$

где a, b, c, d - константы, которые равны $a = -2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $b = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $c = 1\,\text{м}$,

$d = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^3}$

Найти модуль скорости, модуль ускорения, нормальное и тангенциальное ускорение в момент времени $t_1 = 1\,\text{с}$.

Дано: $x(t) = at^2 + bt + c$

$y(t) = dt^3$

$a = -2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $b = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $c = 1\,\text{м}$, $d = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^3}$

$t_1 = 1\,\text{с}$

Найти: $v(t_1)$, $a(t_1)\; a_n(t_1)$, $a_\tau(t_1)$

Решение. В данной задаче рисунок не требуется.

Известно, что координаты вектора скорости материальной точки есть производные по времени от ее координат, т.е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Вычисляя производные, находим:

$$v_x = 2at + b\,, \quad v_y = 3dt^2$$

Модуль вектора скорости вычисляем по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2at+b)^2 + \left(3dt^2\right)^2} = \sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}$$

Подставляя вместо t значение t_1 получаем:

$$v = \sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}$$

Также известно, что координаты вектора ускорения материальной точки есть производные по времени от координат вектора скорости материальной точки, т.е.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x\,, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y$$

Вычисляя производные, находим:

$$a_x = 2a\,, \quad a_y = 6dt$$

Модуль вектора ускорения вычисляем по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2}}$$

Для того чтобы найти тангенциальное ускорение a_τ, вспомним, что a_τ есть первая производная от модуля вектора скорости по времени, то есть

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Подставляя в эту формулу выражение $v = \sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}$ и беря производную по времени (как производную сложной функции) получаем:

$$a_\tau = \frac{1}{2}\,\frac{2(2at+b)\cdot 2a + 36d^2t^3}{\sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}}\,.$$

В момент времени $t = t_1$ получаем

$$a_\tau = \frac{(2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}}{\sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$$

Нормальное ускорение определяем по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

Или, подставляя формулы $a == \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2}}$, $a_\tau = \dfrac{(2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}}{\sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$,

получаем

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2} - \frac{\left((2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}\right)^2}{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$$

Ответ:

$$v=\sqrt{\left(2at_1+b\right)^2+9d^2t_1{}^4}$$

$$a=\sqrt{4a^2+36d^2t_1{}^2}$$

$$a_\tau=\frac{\left(2at_1+b\right)\cdot 2a+36d^2t_1{}^3}{\sqrt{\left(2at_1+b\right)^2+9d^2t_1{}^4}}$$

$$a_n=\sqrt{4a^2+36d^2t_1{}^2-\frac{\left(\left(2at_1+b\right)\cdot 2a+36d^2t_1{}^3\right)^2}{\left(2at_1+b\right)^2+9d^2t_1{}^4}}$$

Теперь разберем некоторые задачи из задачника Воробьева, Чертова

Задача 1.25. Точка движется по прямой согласно уравнению $x=At+Bt^3$, где A=6 м/с, B = -0,125 м/с³. Определить среднюю путевую скорость <v> точки в интервале времени от $t_1=2$ с до $t_2=6$ с

Решение из интернета

1.25. Точка движется по прямой согласно уравнению $x=At+Bt^3$, где A=6 м/с, B = –0,125 м/с^3. Определить среднюю путевую скорость $\langle v\rangle$ точки в интервале времени от $t_1=2$ с до $t_2=6$ с.

Дано:
$x=At+Bt^3$
A=6 м/с
B=–0,125 м/с^3
$t_1=2$ с
$t_2=6$ с

$\langle v\rangle$ – ?

Решение:

$$x_1=At_1+Bt_1^3=6\cdot 2-0{,}125\cdot 8=11м$$

$$x_2=At_2+Bt_2^3=6\cdot 6-0{,}125\cdot 6^3=9м$$

Движение меняет знак, поэтому нельзя пользоваться формулой $\langle V\rangle=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,тогда

$$V=\dot{x}=A+3Bt^2=0 \qquad A+3Bt^2=0$$

$$t_3=\sqrt{-\frac{A}{3B}}=4c$$

$$x_3=At_3+Bt_3^3=6\cdot 4-0{,}125\cdot 4^3=16м$$

$$\langle V\rangle=\frac{(x_3-x_1)+(x_3-x_2)}{t_1-t_2}=\frac{(16-11)+(16-9)}{4}=3м/c$$

Ответ: 3 м/с.

Ошибки:

1. Вычисление делаются перед получением ответа в общем виде.
2. Фраза «движение меняет знак» бессмысленна. Движение – это явление, а знак может менять величина.

3. Нет объяснений.

Правильное решение.

Дано:

x=At+Bt³, где А=6 м/с, В = -0,125 м/с³. $t_1 = 2$ с, $t_2 = 6$ с

Найти:

$v_{ср,пут}$

Решение.

Средняя путевая скорость материальной точки есть отношение пройденного пути Δs к промежутку времени Δt, за который точка прошла этот путь, то есть

$$v_{ср,пут} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Величина Δt есть

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Найдем Δs.

Для этого сначала проверим в какую сторону вдоль оси *Ox* движется точка. Для этого проверим знак проекции скорости v_x. Найдем v_x. Эта величина есть производная по времени от координаты *x*, то есть

$$v_x = A + 3Bt^2.$$

Эта величина равна нулю, когда $A + 3Bt^2 = 0$ или когда

$$t = t' = \sqrt{-\frac{A}{3B}}.$$

Эта величина численно равна

$$t' = \sqrt{-\frac{6}{-3 \cdot 0.125}} = \sqrt{\frac{2}{0.125}} = \sqrt{\frac{4}{0.25}} = \frac{2}{0.5} = 4 \text{ с}$$

При этом $v_x > 0$, то есть координата *x* возрастает при $t < t'$ и $v_x < 0$, то есть координата *x* убывает при $t > t'$. Таким образом, материальная точка движется в при временах от t_1 до t' вдоль ось *Ox*, а при временах от t' до t_2 она движется против оси *Ox*. Соответственно пройденный путь Δs за время от t_1 до t_2 разбивается на путь Δs_1 за время от t_1 до t' и путь Δs_2 за время от t' до t_2, т.е.

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$$

Поскольку координата зависит от времени по закону

$$x(t) = At + Bt^3,$$

то учитывая, что $x(t') > x(t_1)$ и $x(t') > x(t_2)$, мы имеем

$$\Delta s_1 = x(t') - x(t_1)$$

$$\Delta s_2 = x(t') - x(t_2)$$

Таким образом,

$$\Delta s = x(t') - x(t_1) + x(t') - x(t_2) = 2x(t') - x(t_1) - x(t_2) =$$

$$= 2\left(At' + 3Bt'^2\right) - \left(At_2 + 3Bt_2^{\ 2}\right) - \left(At_1 + 3Bt_1^{\ 2}\right)$$

Подставляя в формулу $v_{ср,пут} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, получаем ответ:

$$v_{ср,пут} = \frac{2\left(At' + 3Bt'^2\right) - \left(At_2 + 3Bt_2^{\ 2}\right) - \left(At_1 + 3Bt_1^{\ 2}\right)}{t_2 - t_1}.$$

$$v_{ср,пут} = \frac{2\left(A\sqrt{-\dfrac{A}{3B}} + 3B\dfrac{A}{3B}\right) - \left(At_2 + 3Bt_2^{\ 2}\right) - \left(At_1 + 3Bt_1^{\ 2}\right)}{t_2 - t_1}$$

Ответ: $v_{ср,пут} = \dfrac{2\left(A\sqrt{-\dfrac{A}{3B}} + 3B\dfrac{A}{3B}\right) - \left(At_2 + 3Bt_2^{\ 2}\right) - \left(At_1 + 3Bt_1^{\ 2}\right)}{t_2 - t_1}$

Задача 1.54 Диск радиусом r=10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε=0,5 рад/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

Решение из интернета:

Дано:
r = 10 см
e = 0,5 рад/с^2
t = 2 с

a_t – ?
a_n – ?
a – ?

Решение:

$$a_\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot R = \mathbf{0{,}05}\, м/с^2. = \mathbf{5}\, м/с^2$$
$$a_n = \boldsymbol{\omega}^2 R, где\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot t, \boldsymbol{\omega}_0 = 0$$
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot t$$
$$a_n = \boldsymbol{\varepsilon}^2 t^2 R = \mathbf{0{,}1}\, м/с^2 = \mathbf{10}\, см/с^2$$
$$a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = \mathbf{0{,}11}\, м/с^2 = \mathbf{11}\, см/с^2$$

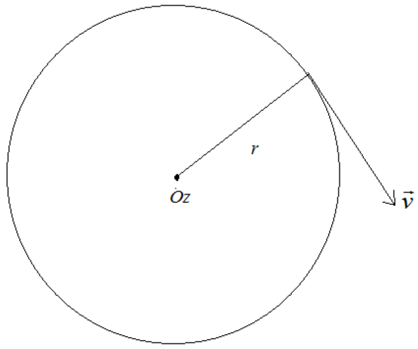
Ответ: 5 м/с^2 ; 10 м/с^2 ; 11 м/с^2

Ошибки:
1. Отсутствуют объяснения и обоснования формул.
2. Вычисления для a проводятся до получения ответа в общем виде.

Правильное решение.
Дано:
r=10 см=0.1 м
ε=0,5 рад/с^2
$t = 2$ с

Найти: a_n, a_τ

Решение. Рассмотрим одну точку на окружности диска. Это точка совершает вращательное движение относительно оси диска. Обозначим ось диска через Oz



При движении по окружности с постоянным угловым ускорением, нормальное ускорение точки равно центростремительному ускорению, т.е.

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где v - линейная скорость материальной точки. Модуль линейной скорости связан с модулем угловой скорости ω формулой

$$v = \omega r.$$

При движении по окружности с постоянным угловым ускорением, известны формулы для проекции угловой скорости ω_z на ось вращения

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t$$

Поскольку диск в начальный момент времени находился в состоянии покоя, то $\omega_{0z} = 0$. Далее, поскольку ось вращения неподвижна, $\varepsilon_z > 0$ и направление вектора углового ускорения не изменяется, то $\omega_z = \omega$, $\varepsilon_z = \varepsilon$ и мы имеем

$$\omega = \varepsilon t.$$

Поэтому

$$v = \varepsilon t r$$

и

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\varepsilon^2 t^2 r^2}{r} = \varepsilon^2 t^2 r$$

Чтобы найти тангенциальное ускорение, возьмем зависимость модуля v скорости от времени t и воспользуемся формулой

$$a_\tau = \dot{v},$$

то есть

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d(\varepsilon t r)}{dt} = \varepsilon r.$$

Полное ускорение определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\varepsilon^4 t^4 r^2 + \varepsilon^2 t^2}$$

Ответ:

$a_n = \varepsilon^2 t^2 r$

$a_\tau = \varepsilon r$

$a = \sqrt{\varepsilon^4 t^4 r^2 + \varepsilon^2 t^2}$

Задача 1.60. Винт аэросаней вращается с частотой n=360 мин-¹. Скорость υ поступательного движения аэросаней равна 54 км/ч. С какой скоростью u движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1 м?

Решение из интернета:

1.60. Винт аэросаней вращается с частотой n = 360 мин$^{-1}$. Скорость v поступательного движения аэросаней равна 54 км/ч, С какой скоростью u движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1 м?

Дано:
$n = 6$ с$^{-1}$
$v = 15$ м/с
$R = 1$ м

$u - ?$

Решение:

$$скорость \cdot винта \cdot v_1 = \omega \cdot R$$

$$U = \sqrt{v^2 + v_1^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v^2} =$$

$$= \sqrt{4\pi^2 n^2 R^2 + v^2} = 40{,}5 м/с$$

Ответ: 40,5 м/с

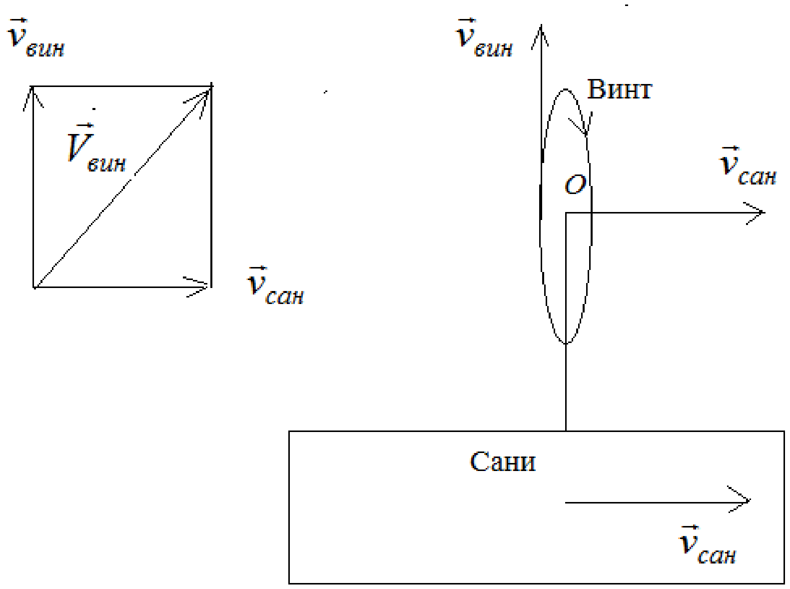
Ошибки:
Решения нет. По сути сразу записан ответ.

Правильное решение.
Дано:

$$n = 360\,\text{мин}^{-1} = 6\,\text{с}^{-1}$$
$$R = 1\,\text{м}$$
$$v_{сан} = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Найти: $\vec{V}_{вин}$

Решение. Сделаем рисунок



Что обозначают наши обозначения:

$\vec{v}_{сан}$ - скорость саней относительно земли или то же самое – скорость оси вращения винта относительно земли.
$\vec{v}_{вин}$ - скорость точки на конце винта относительно саней
$\vec{V}_{вин}$ - скорость точки на конце винта относительно земли.
Нам нужно найти $\vec{V}_{вин}$.
По правилу сложения скоростей, скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета плюс скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной.
Подвижная система отсчета – сани (или ось вращения винта).
Неподвижная система отсчета – земля.
Материальная точка – это точка на конце винта.
Поэтому

$$\vec{V}_{вин} = \vec{v}_{вин} + \vec{v}_{сан}$$

Поскольку направления скоростей $\vec{v}_{сан}$ и $\vec{v}_{вин}$ перпендикулярны, то модуль Модуль $V_{вин}$ вектора $\vec{V}_{вин}$ определяется по теореме Пифагора:

$$V_{вин} = \sqrt{v_{вин}^{2} + v_{сан}^{2}}$$

Найдем $v_{сан}$ и $v_{вин}$. Величина $v_{сан}$ известна из условия задачи. Величина $v_{вин}$ есть модуль линейной скорости точки, находящейся на краю винта, вращающейся по окружности радиуса R относительно оси вращения. Эта величина связана с модулем угловой скорости вращения ω уравнением

$$v_{вин} = \omega R$$

Величина ω связана с частотой вращения винта формулой

$$\omega = 2\pi n$$

Поэтому

$$v_{вин} = 2\pi n R$$

Подставляя в формулу $V_{вин} = \sqrt{v_{вин}^{2} + v_{сан}^{2}}$ получаем

$$V_{вин} = \sqrt{(2\pi n R)^2 + v_{сан}^{2}}$$

Ответ: $V_{вин} = \sqrt{(2\pi n R)^2 + v_{сан}^{2}}$