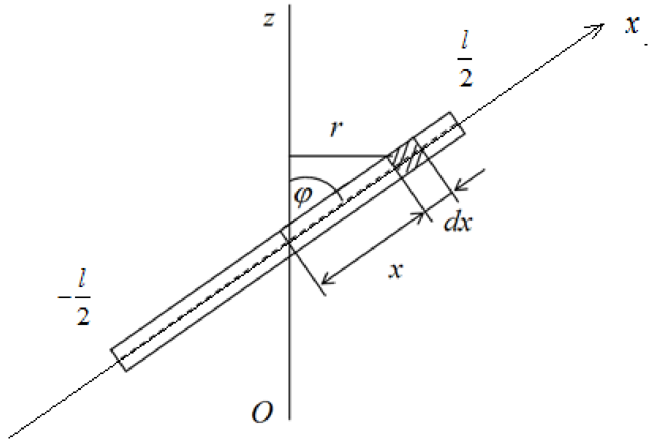
Примеры решения задач по теме Динамика твердого тела

Задача 1. Однородный тонкий стержень длиной l и массой m может вращаться под углом φ относительно вертикальной оси Oz (рисунок). Определить момент инерции стержня J относительно этой оси. При каком значении $\varphi = \varphi_{\max}$ этот момент инерции максимален и чему он равен?

Дано: l, m, φ

Найти: J, $\varphi = \varphi_{\max}$, $J_{\max}$

Решение.



Для определения момента инерции необходимо разбить весь стержень на бесконечно малые участки. Рассмотрим один из таких участков. Пусть его масса равна dm. Момент инерции этого участка относительно оси Oz равен

$$dJ = dm \cdot r^2,$$

где через r мы обозначили расстояние от оси вращения до выделенного участка (см. рисунок). Из рисунка видно, что

$$r = x \sin\varphi.$$

Т.к. стержень однородный и тонкий, то

$$dm = \rho_{\text{лин}} dx,$$

где $\rho_{\text{лин}} = \dfrac{m}{l}$ - линейная плотность распределения массы по стержню, т.е. масса, приходящаяся на единицу длины стержня. Тогда

$$dm = \frac{m}{l} dx.$$

Поэтому

$$dJ = \frac{m}{l} \sin^2\varphi \cdot x^2 dx.$$

Учитывая, что момент инерции есть величина аддитивная, просуммируем dJ по всем бесконечно малым участкам, и, заменяя сумму интегралом, найдём момент инерции всего стержня:

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} \sin^2\varphi \cdot x^2 dx = \frac{m}{l} \sin^2\varphi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cdot x^2 dx =$$

$$= \frac{m}{l}\sin^2\varphi \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2\varphi$$

Из этой формулы видно, что момент инерции стержня максимален при угле

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

$$J_{\max} = \frac{1}{12} ml^2 .$$

Ответ: $J = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2\varphi$

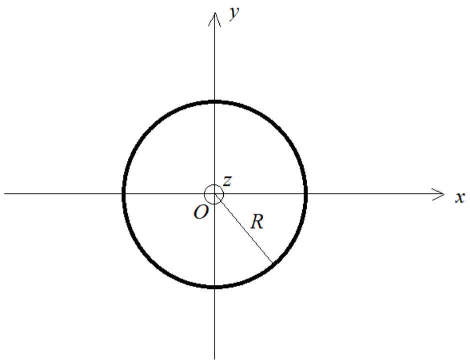
$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$

$J_{\max} = \frac{1}{12} ml^2$

Задача 2. Определить момент инерции J тонкого проволочного кольца массы m и радиусом R относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

Дано: m, R

Найти: J



Решение. Выберем систему $Oxyz$ координат так, как показано на рисунке. Наше кольцо лежит в плоскости Oxy, и, таким образом, является плоским телом. Из лекций известно, что имеется связь между моментами инерции относительно осей Ox, Oy и Oz для плоского тела, лежащего в плоскости Oxy

$$J_x + J_y = J_z ,$$

где J_x, J_y, J_z есть моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно. Применим эту формулу к нашей задаче.

В силу симметрии осей Ox и Oy относительно кольца можно сделать вывод, что

$$J_y = J_x$$

и тогда

$$2J_y = J_z .$$

Далее, момент инерции кольца относительно оси Oz, проходящей через его центр, перпендикулярной плоскости кольца также известен из лекций:

$$J_z = mR^2 .$$

Тогда

$$J_y = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{2} mR^2 \equiv J$$

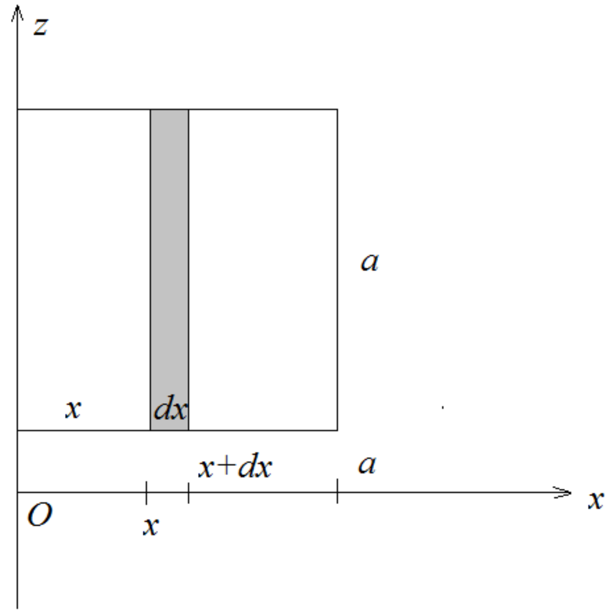
Ответ: $J = \frac{1}{2} mR^2$

Задача 3. Определить момент инерции J тонкой квадратной плоской пластины массой m со стороной a относительно оси, проходящей через одну из ее сторон.

Дано: m, a

Найти: J

Решение.



Сделаем рисунок. Выберем систему координат, как показано на рисунке. Будем искать момент инерции пластины относительно оси Oz. Разобьем пластину на узкие полоски бесконечно малой ширины dx и рассмотрим одну из таких полосок (изображенную серым цветом на рисунке). Пусть x есть координата положения такой полоске, отмеченная на оси Ox. Поскольку полоска имеет бесконечно малую ширину, то все точки этой полоски находятся на равном расстоянии от оси вращения, равным x. Тогда момент инерции такой полоски считается также как момент инерции материальной точки, то есть равен

$$dJ_z = dmx^2,$$

где dm - масса полоски.

Чтобы найти массу полоски, сначала найдем поверхностную плотность пластинки σ, то есть массу, приходящуюся на поверхность единичной площади. Для этого массу всей пластинки нужно поделить на ее площадь S:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{a^2}.$$

Тогда для полоски площадью $dS = adx$ имеем:

$$dm = \sigma dS = \sigma adx.$$

Таким образом

$$dJ_z = \sigma ax^2 dx.$$

Учитывая, что момент инерции есть величина аддитивная, просуммируем dJ_z по всем бесконечно тонким полоскам, и, заменяя сумму интегралом, найдём момент инерции всей пластины:

$$J_z = \int_0^a \sigma a x^2 dx = \sigma a \int_0^a x^2 dx = \sigma a \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a = \sigma a \frac{a^3}{3} = \sigma a^2 \frac{a^2}{3} = \sigma S \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3} m a^2 \equiv J$$

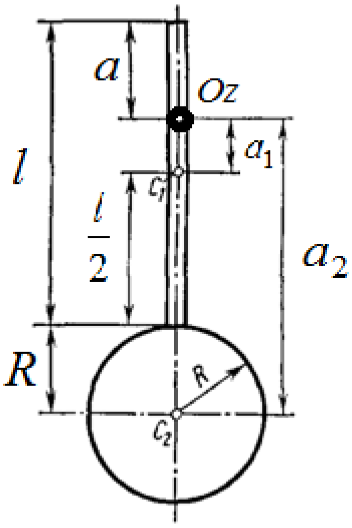
Ответ: $J = \frac{1}{3} m a^2$

Задача 4. Физический маятник представляет собой стержень длиной l и массой m_1 с прикрепленным к одному из его концов диском массой m_2 и радиуса R. Определить момент инерции J_z такого маятника относительно оси Oz, проходящей через точку O на стержне перпендикулярно плоскости чертежа, отстоящей от его свободного конца на расстояние a.

Дано: $l,\ m_1,\ m_2,\ R,\ a$

Найти: J_z

Решение.



Общий момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_{1z} и диска J_{2z}.

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} \qquad (1)$$

Формулы, по которым вычисляются моменты инерции стержня $J_{1\,\text{цм}\,z}$ и диска $J_{2\,\text{цм}\,z}$ относительно осей, проходящих через их центры масс, мы знаем из лекций:

$$J_{1\,\text{цм}\,z} = \frac{1}{12} m_1 l^2$$

$$J_{2\,\text{цм}\,z} = \frac{1}{2} m R^2$$

Чтобы определить моменты инерции J_{1z} и J_{2z}, надо воспользоваться теоремой Штейнера. Тогда момент инерции стержня относительно нашейоси вращения равен:

$$J_{1z} = J_{1\text{см}\,z} + m_1 a_1^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 a_1^2$$

где a_1 есть расстояние между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс C_1 стержня, которое равно:

$$a_1 = \frac{1}{2} l - a$$

Поэтому

$$J_{1z} = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{1}{2} l - a \right)^2$$

Момент инерции диска в соответствии с теоремой Штейнера равен

$$J_{2z} = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 {a_2}^2$$

где R радиус диска, $R = \frac{1}{4} l$, a_2 есть расстояние между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс диска, которое равно:

$$a_2 = R + l - a$$

С учетом этого запишем

$$J_{2z} = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (R + l - a)^2$$

Подставив полученные выражения в формулу (1), найдем

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{1}{2} l - a \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (R + l - a)^2$$

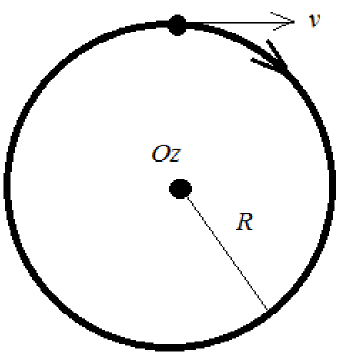
Ответ: $J_z = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{1}{2} l - a \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (R + l - a)^2$

Задача 5. Платформа в виде диска радиусом R и массой m_1 вращается по инерции около вертикальной оси с угловой скоростью ω. В центре платформы стоит человек массой m_2. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Дано: R, m_1, m_2, ω

Найти: v

Решение.



Пусть ось Oz есть ось вращения платформы. Обозначим:

L_{1z} - проекция на ось вращения Oz момента импульса платформы в момент времени, когда человек находился в центре платформы;

L_{2z} - проекция на ось вращения Oz момента импульса человека в момент времени он находился в центре платформы;

L'_{1z} - проекция на ось вращения Oz момента импульса платформы после перемещения человека на край платформы;

L'_{2z} - проекция на ось вращения Oz момента импульса человека после его перемещения на край платформы.

Запишем закон сохранения момента импульса для системы «платформа+человек» в проекции на ось вращения:

$$L_{1z} + L_{2z} = L'_{1z} + L'_{2z}$$

Воспользуемся формулой для момента импульса вращающегося тела:

$$L_{1z} = J_{1z}\omega^2,\ L_{2z} = J_{2z}\omega^2,\ L'_{1z} = J_{1z}\omega'^2,\ L'_{2z} = J'_{2z}\omega'^2,$$

где J_{1z} - момент инерции платформы относительно оси вращения *Oz*; J_{2z}- момент инерции человека, стоящего в центре платформы, относительно оси вращения *Oz*; ω - угловая скорость платформы с человеком, стоящим в ее центре; J'_{2z} - момент инерции человека, стоящего на краю платформы; ω'- угловая скорость платформы с человеком, стоящим на ее краю. Тогда

$$(J_{1z} + J_{2z})\omega = (J_{1z} + J'_{2z})\omega',$$

откуда

$$\omega' = \frac{J_{1z} + J_{2z}}{J_{1z} + J'_{2z}}\omega$$

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью соотношением

$$v = \omega' R$$

Тогда

$$v = \frac{J_{1z} + J_{2z}}{J_{1z} + J'_{2z}}\omega R \qquad (1)$$

Момент инерции платформы рассчитываем как для диска:

$$J_{1z} = \frac{1}{2}m_1 R^2;$$

Момент инерции человека рассчитываем как для материальной точки, поэтому:

$$J_{2z} = 0$$

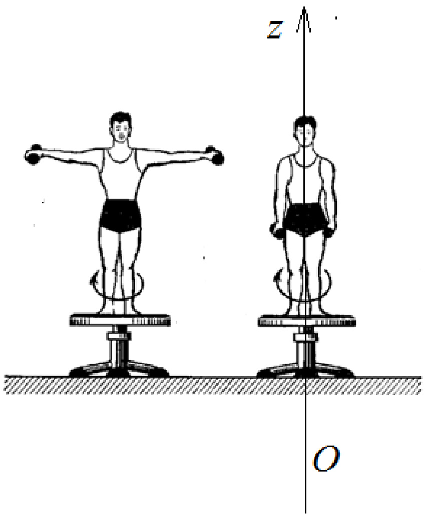
$$J'_{2z} = m_2 R^2$$

Подставляя в уравнение (1), получаем:

$$v = \frac{\frac{1}{2}m_1 R^2}{\frac{1}{2}m_1 R^2 + m_2 R^2}\omega R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}\omega R$$

Ответ: $v = \dfrac{m_1}{m_1 + 2m_2}\omega R$

Задача 6. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n. В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой m каждая. Расстояние между гирями l_1. Определить частоту вращения n', скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гирями станет равным l_2. Моментом инерции скамьи пренебречь. Считать, что момент инерции человека относительно оси вращения скамьи с вытянутыми и опущенными руками без гирь равен соответственно J и J'.



Дано: n, J, J', l_1, l_2, m

Найти: n'

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из человека, держащего гири и скамью. Сумма моментов внешних сил, действующих на эту систему в проекции на ось вращения Oz равна нулю. Поэтому полный момент импульса этой системы в проекции на ось вращения должен сохраняться.

Обозначим:

J_{1z} - момент инерции человека с вытянутыми руками;

J_{2z} - момент инерции человека с опущенными руками;

J_{3z} - момент инерции гирь на вытянутых руках;

J_{4z} - момент инерции гирь на опущенных руках;

ω - угловая скорость системы при вытянутых руках человека;

ω' - угловая скорость системы при опущенных руках человека.

Тогда момент импульса системы в проекции на ось вращения при вытянутых руках человека равен

$$L_z = J_{1z}\omega + J_{3z}\omega$$

В то же время момент импульса системы в проекции на ось вращения при опущенных руках человека равен

$$L'_z = J_{2z}\omega' + J_{4z}\omega'$$

Закон сохранения момента импульса в проекции на ось вращения есть

$$L_z = L'_z$$

или

$$J_{1z}\omega + J_{3z}\omega = J_{2z}\omega' + J_{4z}\omega',$$

откуда

$$\omega' = \frac{J_{1z} + J_{3z}}{J_{2z} + J_{4z}}\omega.$$

Поскольку частоты n и n' связаны с угловыми скоростями как

$$\omega = 2\pi n,\ \omega' = 2\pi n',$$

то

$$n' = \frac{J_{1z} + J_{2z}}{J_{1z} + J_{3z}} n$$

Найдем моменты инерции. По условию задачи:

$$J_{1z} = J$$

$$J_{2z} = J'$$

Считая гири материальными точками, имеем

$$J_{2z} = 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml_1^2$$

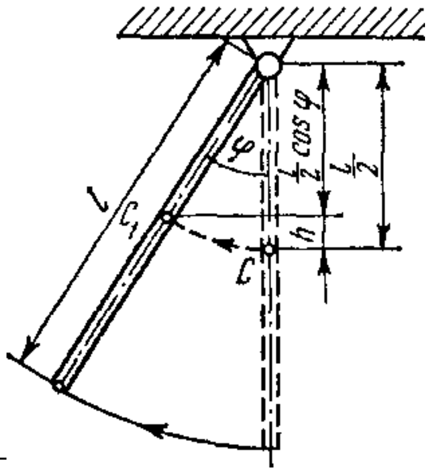
$$J_{4z} = 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml_2^2$$

Тогда

$$n' = \frac{J + \frac{1}{2}ml_1^2}{J' + \frac{1}{2}ml_2^2}\,n = \frac{2J + ml_1^2}{2J' + ml_2^2}\,n$$

Ответ: $n' = \dfrac{2J + ml_1^2}{2J' + ml_2^2}\,n$.

Задача 7. Стержень длиной l=1,5 м и массой M=10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рисунок). В середину стержня ударяет пуля массой m=10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v_0 =500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?



Дано: l=1,5 м; M=10 кг; m=10 г; v_0 =500 м/с, $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: φ

Решение. Удар пули следует рассматривать как абсолютно неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями как единое тело. Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию

$$E_к = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где J - момент инерции стержня относительно оси вращения стержня. Затем стержень поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс его поднимается на высоту

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$U = mgh = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенств $E_к = \frac{1}{2}J\omega^2$ и $U = mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi)$ получим:

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi),$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец

$$J = \frac{1}{3}Ml^2,$$

получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}$$

В этом выражении неизвестна величина ω. Найдем ее.

В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса. В начальный момент удара угловая скорость стержня равна $\omega_1 = 0$, поэтому его момент импульса в проекции на ось вращения (для простоты мы не пишем букву, обозначающую проекцию на ось) равен $L_1 = J\omega_1 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный момент импульса пули относительно оси вращения равен $L_2 = mv_0\frac{l}{2}$, где $r = \frac{l}{2}$ есть расстояние точки попадания от оси вращения. Тогда полный момент импульса системы «стержень+пуля» в начальный момент удара равен

$$L = L_1 + L_2 = mv_0 r$$

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля - линейную скорость v, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $v = \omega r$, то конечный момент импульса пули равен $L'_2 = mvr = m\omega r^2$. При этом конечный момент импульса стержня равен $L'_1 = J\omega$. Полный конечный момент импульса системы относительно оси вращения равен

$$L' = L'_1 + L'_2 = J\omega + m\omega r^2$$

Применив закон сохранения импульса, можем написать

$$L = L'$$

или

$$mv_0 r = J\omega + m\omega r^2,$$

откуда

$$\omega = \frac{mv_0 r}{J + mr^2}$$

С учетом момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец

$$J = \frac{1}{3}Ml^2$$

имеем

$$\omega = \frac{mv_0 r}{\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2} = \frac{3mv_0 r}{Ml^2 + 3mr^2}$$

Подставляем в формулу $\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}$:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}\left(\frac{3mv_0 r}{Ml^2 + 3mr^2}\right)^2$$

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{l\omega^2}{3g}\left(\frac{3mv_0 r}{Ml^2 + 3mr^2}\right)^2\right) =$$

$$= \arccos\left(1 - \frac{l\omega^2}{3g}\left(\frac{3mv_0 \frac{l}{2}}{Ml^2 + 3m\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2\right) =$$

$$= \arccos\left(1 - \frac{3l\omega^2}{g}\left(\frac{6mv_0 l}{4Ml^2 + 3ml^2}\right)^2\right)$$

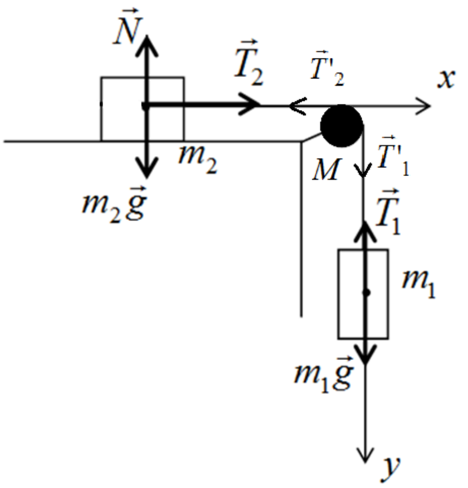
Ответ: $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{3l\omega^2}{g}\left(\frac{6mv_0 l}{4Ml^2 + 3ml^2}\right)^2\right)$

Задача 8. Блок в форме сплошного цилиндра, массой $M = 2$ кг укреплён на конце стола. Гири одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1кг$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение, с которым движутся гири и силу натяжения нити по разные стороны блока. Трением пренебречь.

Дано: $m_1 = m_2 = 1$ кг, $R = 0{,}1$ м, $M = 2$ кг, $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: a, T_1, T_2

Решение.



Делаем рисунок. Выбираем систему отсчета и систему координат (координатные оси *Ox* и *Oy*).

Расставляем приложенные к телам силы. Рассматриваем движение каждого тела отдельно и записываем уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждого тела.

На тело m_2 действуют: сила тяжести $m_2\vec{g}$, реакция стола $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Уравнение для этого тела движения имеет вид:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g}\,. \qquad (1)$$

К подвешенному грузу приложены силы $m_1\vec{g}$ и $\vec{T}_1$, уравнение движения в векторной форме для этого тела имеет вид

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1. \qquad (2)$$

Проектируем уравнения (1) и (2) на координатные оси.

Обозначим через $a = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ модуль ускорения системы. Кроме того заметим, что модули сил натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ не равны, т.е. $T_1 \neq T_2$.

Для уравнения (1):

$$\text{На ось } Ox \quad m_2 a = T_2\,, \qquad (3)$$

$$\text{На ось } Oy \quad 0 = m_2 g - N\,. \qquad (4)$$

Для уравнения (2):

$$\text{На ось } Ox \quad 0=0$$

$$\text{На ось } Oy \quad m_1 a = m_1 g - T_1. \qquad (5)$$

Уравнение (4) нами использовано не будет.

Далее рассмотрим блок и запишем для него уравнение динамики вращательного движения. Пусть ось *Oz* совпадает с осью вращения блока. Тогда в проекции на эту ось

$$J_z\varepsilon_z = RT'_1 - RT'_2\,,$$

где

$$J_z = \frac{1}{2}MR^2$$

(R - радиус блока) есть момент инерции блока относительно оси *Oz*, ε_z есть проекция углового ускорения блока на ось *Oz*, T'_1 и T'_2 есть модули сил, действующих со стороны нитей на блок, RT'_1 и RT'_2 есть проекции момента сил $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ на ось *Oz*.

Поскольку по 3 закону Ньютона

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1 \text{ и } \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2,$$

то $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ и мы имеем:

$$\frac{1}{2}MR^2\varepsilon_z = RT_1 - RT_2 \tag{6}$$

Поскольку угловое ускорение относительно оси Oz ε_z связано модулем ускорения грузов как

$$\varepsilon_z = \frac{a}{R},$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{1}{2}MRa = RT_1 - RT_2 \tag{7}$$

Далее рассмотрим систему уравнений (3), (5), (7):

$$m_2 a = T_2$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$

$$\frac{1}{2}MRa = RT_1 - RT_2 .$$

Это есть система 3-х уравнений с 3-мя неизвестными a, T_1, T_2, которая может быть легко решена:

Выражаем из первого и второго уравнения соответственно T_2 и T_1

$$T_2 = m_2 a$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a$$

и подставляем в третье уравнение:

$$\frac{1}{2}MRa = Rm_1 g - Rm_1 a - Rm_2 a$$

Отсюда находим a:

$$MRa = 2Rm_1 g - 2Rm_1 a - 2Rm_2 a$$

$$a = \frac{2m_1 g}{2m_1 + 2m_2 + M}.$$

Находим T_2 и T_1:

$$T_2 = m_2 a = \frac{2m_1 m_2 g}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = m_1 g - \frac{2m_1^2 g}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

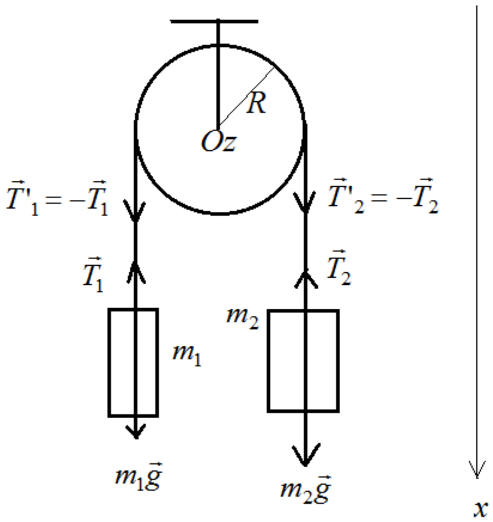
Ответ: $a = \dfrac{2m_1 g}{2m_1 + 2m_2 + M}$

$T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g}{2m_1 + 2m_2 + M}$ $\quad T_1 = m_1 g - \dfrac{2m_1^2 g}{2m_1 + 2m_2 + M}$

Задача 9. Через блок, укреплённый на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 и m_2. Масса блока m. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

Дано: m_1, m_2, m, g

Найти: a



Решение. Сделаем рисунок, выберем систему отсчета (систему координат). Ось Ox направим вниз, о ось Oz выберем совпадающей с осью вращения блока. Определим все силы. Пусть $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ есть соответственно силы, действующие на грузы со стороны нити. Тогда $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ есть соответственно силы, действующие на блок со стороны нити. Очевидно, что по третьему закону Ньютона

$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1$, $\vec{T}'_2 = -\vec{T}_2$.

Запишем основной закон динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) для грузов массой m_1 и m_2

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1,$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2.$$

В проекции на ось Ox эти уравнения примут вид

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1,$$

$$m_2 a_{2x} = m_2 g - T_2.$$

Поскольку направления ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны, то $a_{2x} = -a_{1x}$ и мы имеем:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1, \qquad (1)$$

$$-m_2 a_{1x} = m_2 g - T_2. \qquad (2)$$

Заметим, что $|a_{1x}| = a_1 = a_2$, поскольку нить нерастяжима. При этом знак проекции a_{1x} указывает на направление движения грузов.

Далее рассмотрим блок и запишем для него уравнение динамики вращательного движения. Пусть ось Oz совпадает с осью вращения блока. В проекции на ось Oz

$$J_z \varepsilon_z = RT'_1 - RT'_2,$$

где

$$J_z = \frac{1}{2}MR^2$$

есть момент инерции блока относительно оси Oz, ε_z есть проекция углового ускорения блока на ось Oz, T'_1 и T'_2 есть модули сил, действующих со стороны нитей на блок, RT'_1 и RT'_2 есть проекции момента сил $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ на ось Oz.
Поскольку по 3 закону Ньютона

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1 \text{ и } \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2,$$

то $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ и мы имеем:

$$\frac{1}{2} mR^2 \varepsilon_z = RT_1 - RT_2$$

Поскольку угловое ускорение относительно оси Oz ε_z связано модулем ускорения грузов как

$$\varepsilon_z = \frac{a_{1x}}{R}.$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = RT_1 - RT_2. \qquad (3)$$

В данном уравнении все знаки выбраны правильно. Проверить это нетрудно. Рассуждаем так. Если $RT_1 > RT_2$, то блок будет раскручиваться с ускорением против часовой стрелки и $\vec{a}_1$ будет направлено по оси Ox, поэтому в этом случае $a_{1x} > 0$.
Далее рассмотрим систему уравнений (1), (2), (3):

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1,$$
$$-m_2 a_{1x} = m_2 g - T_2,$$
$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = RT_1 - RT_2.$$

Это есть система 3-х уравнений с 3-мя неизвестными a, T_1, T_2, которая может быть легко решена:
Выражаем из первого и второго уравнения соответственно T_2 и T_1

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_{1x},$$
$$T_2 = m_2 g + m_2 a_{1x}$$

и подставляем в третье уравнение:

$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = Rm_1 g - Rm_1 a_{1x} - Rm_2 g - Rm_2 a_{1x}$$

Отсюда находим a_{1x}:

$$mRa_{1x} = 2Rm_1 g - 2Rm_1 a_{1x} - 2Rm_2 g - 2Rm_2 a_{1x}$$
$$a_{1x} = \frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m}.$$

Видно, что $a_{1x} > 0$ если $m_1 > m_2$ и $a_{1x} < 0$ если $m_1 < m_2$. При этом

$$a = \left| \frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m} \right|$$

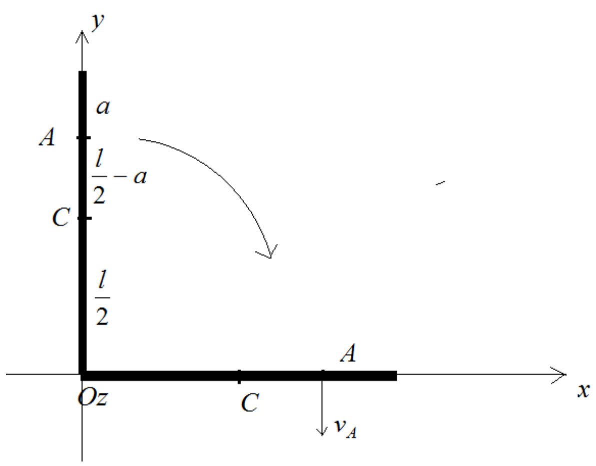
Ответ: $a = \left| \frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m} \right|$.

Задача 10. Карандаш длиной l, поставленный вертикально, падает на стол. Какую линейную скорость v_A будет иметь точка A, удаленная от верхнего конца карандаша на расстояние $a < \frac{l}{2}$ в конце падения. Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

Дано: l, $a < \frac{l}{2}$, g

Найти: v_A

Решение.



Сделаем рисунок. Выберем систему координат как показано на рисунке. Рассмотрим механическую систему – карандаш. На эту систему действует только консервативная сила – сила тяжести. Поэтому полная механическая энергия этой системы должна сохраняться. Рассмотрим два состояние карандаша. 1 состояние – положение «стоя». 2 состояние – положение «лежа». Найдем полную механическую энергию карандаша в этих положениях. Потенциальная энергия карандаша определяется положением его центра масс – точки C. Будем отсчитывать потенциальную энергию карандаша от положения его центра масс на столе (от положения $y = 0$). Тогда в положениях 1 и 2 потенциальная энергия карандаша соответственно равна:

$$U_1 = mg\frac{l}{2} \text{ и } U_2 = 0.$$

Кинетическая энергия карандаша в положениях 1 и 2 равна

$$E_{k1} = 0 \text{ и } E_{k2} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z - момент инерции карандаша относительно оси Oz, ω - модуль угловой скорости карандаша в момент его падения на стол. Поскольку

$$J_z = \frac{1}{3}ml^2,$$

то

$$E_{k2}=\frac{ml^2\omega^2}{6}.$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$E_{k1}+U_1=E_2+U_2$$

или

$$mg\frac{l}{2}=\frac{ml^2\omega^2}{6},$$

откуда находим угловую скорость карандаша в момент падения на стол:

$$\frac{g}{2}=\frac{l\omega^2}{6},$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Поскольку точка A удалена от оси вращения на расстояние $l-a$, то она совершает вращательное движение по окружности радиуса $l-a$. Тогда ее линейная скорость в момент падения карандаша равна угловой скорости в момент падения карандаша, умноженный на радиус $l-a$, то есть

$$v_A=\omega(l-a)=\sqrt{\frac{3g}{l}}(l-a).$$

Ответ: $v_A=\sqrt{\frac{3g}{l}}(l-a)$