Примеры решения задач по теме «Электростатика»

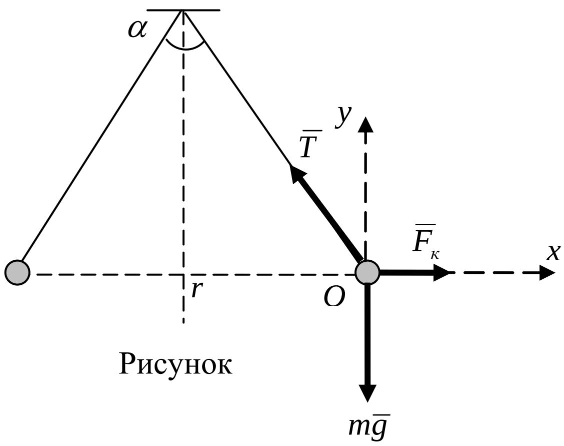
Задача 1. Два шарика массой по *1 г* каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити *10 см*. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол 60^0?

Дано: $m_1 = m_2 = m = 10^{-3}$ *кг*; $l = 0{,}1$ *м*; $\alpha = 60^0$.

Найти: $q_1 = q_2 = q$.

Решение

Условие равновесия шариков означает, что сумма всех сил, действующих на шарик равна нулю. Это условие запишем в виде:



Рисунок

$$m\vec{g} + \vec{F}_к + \vec{T} = 0,$$

где $\vec{F}_к$ – кулоновская сила, $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $m\vec{g}$ - сила тяжести. В проекциях на оси Ox и Oy это условие примет вид:

$$OX:\ F_к - T\sin\frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$OY:\ -mg + T\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Выражаем из первого уравнения T

$$T = \frac{F_к}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и подставляем во второе уравнение:

$$-mg + \frac{F_к}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

или

$$-mg + F_к \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

Поскольку $F_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$, то подставляя в последнее уравнение, получаем

$$-mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

Находим из рисунка $r = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Подставляем

$$-mg+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0$$

Отсюда находим искомый заряд

$$q^2=16\pi\varepsilon_0 l^2 mg\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$q=4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя числовые данные, получим $q=7{,}95\cdot10^{-8}$ *Кл*.

Ответ: $q=4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=79{,}5\,нКл$.

Задача 2. Два точечных электрических заряда $q_1=10^{-9}\,Кл$ и $q_2=-2\cdot10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии d=10 *см* друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке *A* (рисунок), если $r_1=9\,см$ и $r_2=7\,см$.

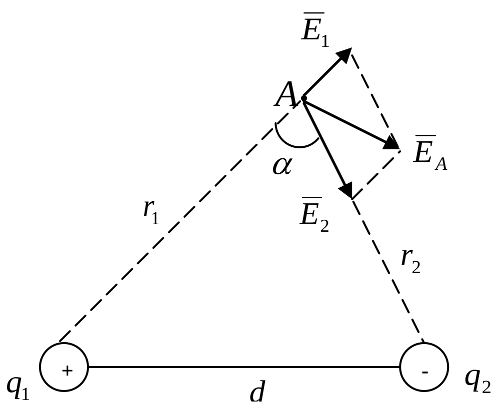
Дано: $q_1=10^{-9}\,Кл$; $q_2=-2\cdot10^{-9}\,Кл$; $d=10\,см$; $r_1=9\,см$; $r_2=7\,см$.

Найти: E_A,φ_A.

Решение

Напряженность результирующего поля в точке *A* равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2, т.е.

$$\vec{E}_A=\vec{E}_1+\vec{E}_2.$$



Рисунок

На рисунке вектор $\vec{E}_1$ направлен от заряда q_1, так как этот заряд положительный, вектор $\vec{E}_2$ направлен в сторону заряда q_2, так как этот заряд отрицательный. Вектор $\vec{E}_A$ напряженности результирующего поля определяется как геометрическая сумма $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Модуль этого вектора найдем по теореме косинусов

$$E_A=\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\alpha},$$

где

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2},\ E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2},\ \cos\alpha=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}.$$

Или

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^{\ 2}}{r_1^4} + \frac{q_2^{\ 2}}{r_2^4} - 2\frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2}\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}}$$

Подставляя исходные числовые данные в указанные формулы, получим $E_A = 3{,}58 \cdot 10^3\ В/м$.

Потенциал φ_A результирующего поля, созданного двумя зарядами q_1 и q_2, равен алгебраической сумме потенциалов:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1},\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}.$$

Подставляя, получаем:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right),$$

Потенциал φ_1 является положительным, так как поле создано положительным зарядом q_1; потенциал φ_2 является отрицательным, так как поле создано отрицательным зарядом q_2. Подставляя числовые данные, получим:

$$\varphi_A = 100 - 257 = -157\,В.$$

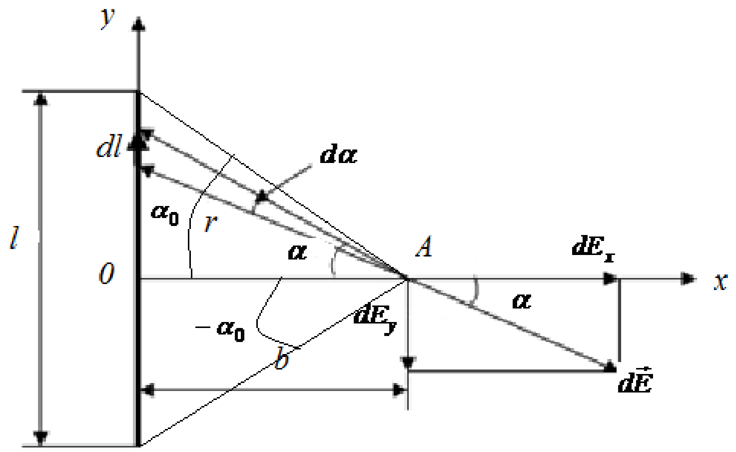
Ответ: $E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^{\ 2}}{r_1^4} + \frac{q_2^{\ 2}}{r_2^4} - 2\frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2}\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}}$

$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$

$E_A = 3{,}58\,кВ/м,\ \ \varphi_A = -157\,В.$

Задача 3. Определить напряжённость поля, создаваемого зарядом, равномерно распределённым по тонкому прямому стержню с линейной плотностью τ, в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном в середине стержня, на расстоянии b от его середины. Длина стержня l.

Решение



Разобьем стержень на бесконечно малые элементы $dl = dy$, y – координата данного элемента. Заряд элемента равен $dq = \tau dy$, элемент можно считать точечным зарядом. Напряженность поля, созданного зарядом dq в точке A на расстоянии r от заряда, равна:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dy}{r^2}$$

$$r = \frac{b}{\cos\alpha}$$

α – угол между перпендикуляром к стержню и радиус-вектором r элемента стержня, проведенным из точки А. Направление вектора напряженности. Так как

$$y = b\mathrm{tg}\alpha$$

то

$$\frac{dy}{d\alpha} = b\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Отсюда выразим dy

$$dy = \frac{b}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Теперь найдем dE

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}dy\frac{1}{b^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}b\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{b^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b} \qquad (1)$$

Найдем проекции вектора $d\vec{E}$ на координатные оси:

$$dE_x = dE\cos\alpha, \quad dE_y = dE\sin\alpha$$

Проекции полной напряженности на оси рассчитываются интегрированием:

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\alpha, \quad E_y = \int dE_y = \int dE\sin\alpha \qquad (2)$$

причем интегрирование производится по всей длине стержня. Здесь использован принцип суперпозиции в проекциях на оси. Полная напряженность вычисляется по теореме Пифагора:

$$E=\sqrt{E_x{}^2+E_y{}^2} \quad (3)$$

Чтобы подсчитать E_x и E_y надо взять интегралы:

$$E_x=\int dE\cos\alpha=\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\cos\alpha$$

$$E_y=\int dE\sin\alpha=\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\sin\alpha$$

Здесь угол α изменяется от $-\alpha_0$ до α_0, где

$$\alpha_0=\operatorname{arctg}\frac{l}{2b}$$

С учетом (1) и (2) получим:

$$E_x=\int dE\cos\alpha=\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\cos\alpha=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}d\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\sin\alpha_0-\left(-\sin\alpha_0\right)\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\sin\alpha_0$$

$$E_y=\int dE\sin\alpha=\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\sin\alpha=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}d\alpha\sin\alpha=$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(-\cos\alpha_0-\left(-\cos\alpha_0\right)\right)=0$$

Окончательно получаем для напряженности:

$$E=\sqrt{E_x{}^2+E_y{}^2}=\left|E_x\right|=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2b}\right)\right)$$

Воспользуемся формулой

$$\sin\left(\operatorname{arctg}(x)\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Тогда получаем

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\frac{\left(\frac{l}{2b}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2b}\right)^2}}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{l}{\sqrt{b^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

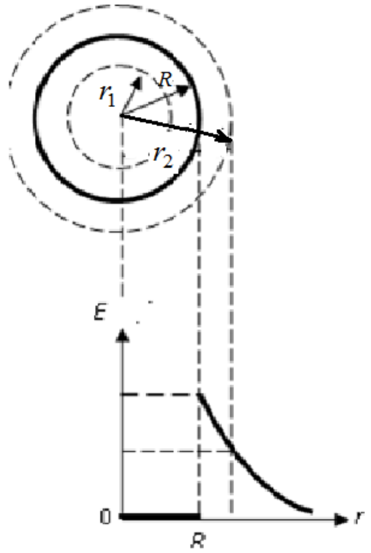
Ответ: $E=\dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{l}{\sqrt{b^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$

Задача 4. По металлической сфере радиусом R равномерно распределен заряд q. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r<R$ от центра сферы; 2) на расстоянии $r \geq R$ от центра сферы. Построить график зависимости напряженности от расстояния.

Дано: R, q, r.

Найти: $E(r)$

Решение



Согласно теореме Гаусса $\oint\limits_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$.

Найдем напряженность электрического поля внутри сферы. Построим концентрическую сферу радиусом $r = r_1 < R$. Заряд внутри этой сферы равен нулю. Тогда по теореме Гаусса поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен 0. С другой стороны этот поток равен $\oint\limits_S E_n dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r_1^2$. Приравнивая это выражение к нулю, получаем $\vec{E} = 0$.

Найдем напряженность электрического поля вне сферы. Построим концентрическую сферу радиусом $r = r_2 \geq R$. Заряд внутри этой сферы равен q. Гаусса поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$. С другой стороны этот поток равен $\oint\limits_S E_n dS = E \cdot 4\pi r_2^2$. Обозначим r_2 через r.

Приравнивая, получаем $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

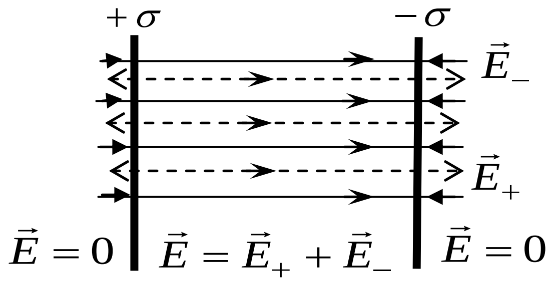
Ответ: $E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}$

Задача 5. Найти напряженность электрического поля между двумя бесконечно протяженными, разноименно заряженными параллельными плоскостями с поверхностной плотностью заряда σ и $-\sigma$.

Решение

Рассмотрим две параллельные заряженные плоскости (рисунок ниже). Пусть σ и $-\sigma$ - поверхностные плотности зарядов каждой из плоскостей (плоскости заряжены одинаковым по величине и противоположным по знаку зарядом). Каждая из плоскостей создает около себя электрическое поле, модуль напряженности которого равен

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Вне внутреннего промежутка, $\vec{E} = 0$ т. к. поля, созданные разноименно заряженными параллельными пластинами, направлены противоположно друг другу.

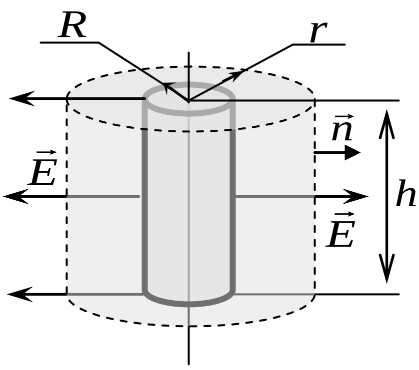
Между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Задача 6. Найти напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра, радиусом R, если заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра равен τ

Решение:

Заряженный цилиндр радиуса R, (см. рисунок), окружим коаксиальной цилиндрической поверхностью радиуса r; поток $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ вектора $\vec{E}$ через основания равен нулю, т. к. $\vec{E} \perp \vec{n}_{осн}$, где $\vec{n}_{осн}$ – внешняя нормаль к основаниям цилиндра; поток через боковую поверхность $\Phi_E = E \cdot S_{БОК} = E 2\pi r h$, здесь h – высота цилиндра. Согласно теореме Гаусса, при $r \geq R$ имеем $E 2\pi r h = \frac{q}{\varepsilon_0}$;



$$E = \frac{1}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{q}{h} = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0},$$

где $\tau = q/h$ — линейная (погонная) плотность заряда, которая измеряется в *Кл/м.*

Когда $r < R$, то $E = 0$.

Задача 7. Найти напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного шара радиуса R, если заряд шара равен q.

Решение:

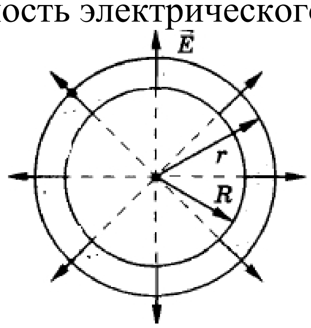
Сделаем рисунок.

Поскольку шар равномерно заряжен по объему, то на единицу его объема приходится заряд, равный

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Эта величина называется объемной плотностью заряда.

Сначала найдем напряженность электрического поля вне шара.

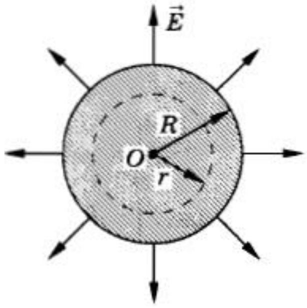


Построим концентрическую сферу радиусом $r \geq R$. Заряд внутри этой сферы равен заряду шара q. Поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ согласно теореме Гаусса. С другой стороны этот поток равен $\oint\limits_S E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$.

Приравнивая, получаем $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Найдем напряженность электрического поля внутри шара.



Выберем внутри шара концентрическую сферу радиуса $r < R$ и подсчитаем заряд, содержащийся внутри этой сферы. Этот заряд будет равен

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$$

Тогда по теореме Гаусса поток через эту сферу равен

$$\Phi_E = q\frac{r^3}{R^3}$$

Величина Φ_E считается также как и для заряженной сферы

$$\Phi_E = E4\pi r^2$$

Приравнивая правые части двух последних формул, получаем:

$$q\frac{r^3}{R^3} = E4\pi r^2,$$

откуда

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Ответ: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, если $r \geq R$ и $E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, если $r \leq R$.

Задача 7 (Воробьев, Чертов, задача 15.15).

На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное длине этого проводника.

Решение:

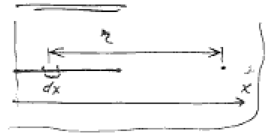
Решение в интернете:

Дано

$\tau = 10\,нКл/м = 10^{-8}\,Кл/м$

$\varphi = ?$

15.15



Потенциал распределённого заряда

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{dl}{r} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx}{2l - x} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln|x - 2l|\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln|-l| - \ln|-2l|\right) = \frac{\tau \ln 2}{4\pi\varepsilon_0} =$$

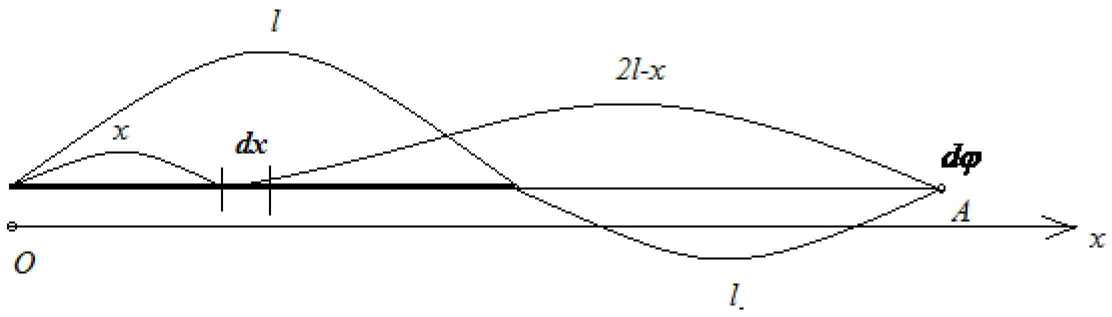
$$= \frac{10^{-8}\,\frac{Кл}{м}\cdot \ln 2}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}} = 62{,}3\ В$$

Ответ: $\varphi = 62{,}3\ В$

За такое решение – максимум 3 балла! Нет объяснений!

Решение.

Сделаем рисунок. Пусть длина стержня равна l. Выберем координатную ось Ox, начало которой совпадает с началом стержня. Обозначим через А точку, в которой нам нужно найти потенциал. Выберем на стержне бесконечно малый участок длиной dx. Пусть x - расстояние от начала координат до участка. Обозначим все расстояния на рисунке.



Будем считать участок длины dx точечным зарядом. Вычислим потенциал $d\varphi$, создаваемый эти участком в точке. Поскольку заряд этого участка есть $dq = \tau dx$, то согласно формуле для потенциала точечного заряда, потенциал поля в точке *A*, создаваемого этим участком, равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{2l-x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{2l-x}$$

Чтобы найти потенциал от всего стержня нужно просуммировать потенциалы, создаваемые всеми участками стержня, или, что то же самое, взять интеграл:

$$\varphi = \int\limits_{\text{по всем участкам}} d\varphi$$

Подставляя в интеграл формулу для $d\varphi$ и выбирая переменную интегрирования x, которая меняется от 0 до *l*, мы получаем

$$\varphi = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{2l-x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx}{2l-x}$$

Поскольку $\int_0^l \frac{dx}{2l-x} = -\ln(2l-x)\Big|_0^l = -\ln(l) + \ln(2l) = \ln 2|$,

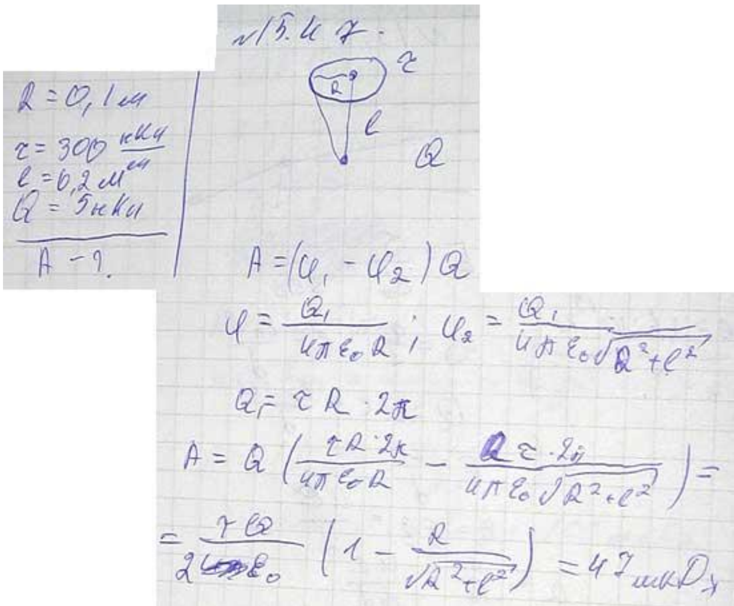
то получаем ответ:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

Задача 8. (Воробьев, Чертов, задача 15.47).

Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом *R*=10 см. Он заряжен с линейной плотностью *τ*=300 нКл/м. Какую работу А надо совершить, чтобы перенести заряд *Q*=5 нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии *l*=20 см от центра его?

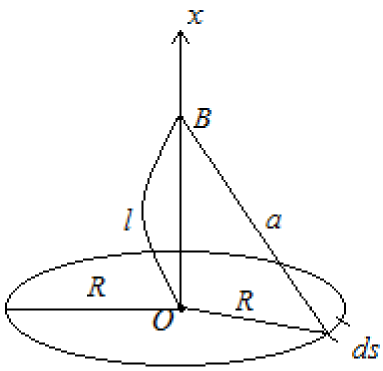
Решение из интернета:



За такое решение – тоже максимум 3 балла! Нет объяснений!

Решение:

Сделаем рисунок. Центр кольца обозначим через *O*, а точку, в которую переносят заряд – через *B*.



Работа будет равна разности потенциалов в точках *B* и *O*, умноженной на заряд *Q*:

$$A = (\varphi_O - \varphi_B)Q .$$

Найдем φ_O и φ_B.

Разобъем кольцо на бесконечно малые участки, длиной ds и будем считать каждый участок точечным зарядом. Величина каждого такого заряда равна

$$dq = \tau ds .$$

По формуле потенциала поля точечного заряда, потенциал поля, создаваемого бесконечно малым участком в точке *O* равен

$$d\varphi_O = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{R}$$

По той же формуле потенциала поля точечного заряда, потенциал поля, создаваемого бесконечно малым участком в точке *B* равен

$$d\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dxs}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

Для того, вычислить потенциалы φ_O и φ_B. поля, создаваемого всеми участками кольца, нужно сложить потенциалы все участков, или взять интеграл:

$$\varphi_O = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}2\pi R = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}$$

$$\varphi_B = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\sqrt{R^2+l^2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\sqrt{R^2+l^2}\,R}2\pi R = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

В итоге получаем ответ

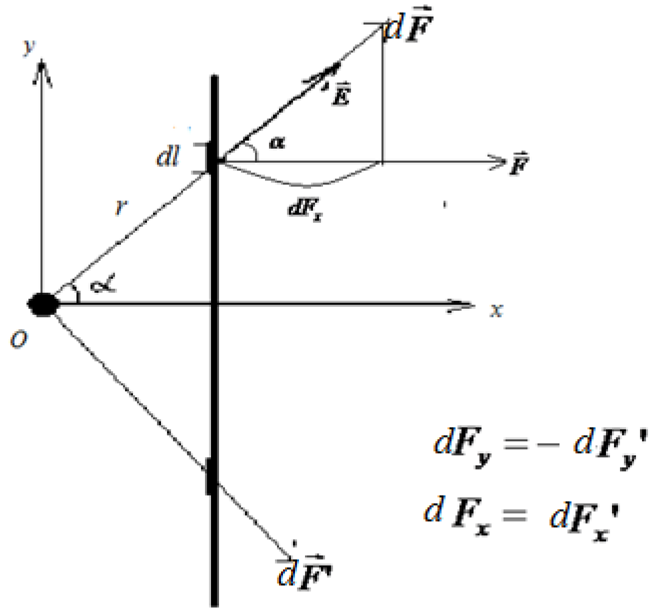
$$A = (\varphi_O - \varphi_B)Q = \left(\frac{\tau}{2\varepsilon_0} - \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)Q = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)Q$$

Задача 9 (Воробьев, Чертов, задача 14.48).

Две бесконечно длинные равномерно заряженные тонкие нити с линейной плотностью заряда τ скрещены под прямым углом друг к другу. Определить силу F их взаимодействия.

Решение:

Сделаем рисунок.



Напряженность электрического поля, создаваемая бесконечно длинной заряженной нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Рассмотрим бесконечно малый элемент dl на одной нити. Напряженность электрического поля, создаваемого другой нитью, в этом элементе равна

$E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, поэтому сила dF, действующая на него равна $dF = E\tau dl = \dfrac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Поскольку нити бесконечные, то для любого такого участка найдется другой участок такой же длины, на который действует такая же по величине сила (см. рисунок). Когда мы будем считать силу, действующую на нить, мы будем суммировать векторы сил, действующие на каждый участок. Составляющие силы, параллельные оси *Oy* сократятся, и останутся только проекции сил на ось *Ox*. Поэтому нам достаточно рассмотреть только проекции сил на ось *Ox*.
Вычислим проекцию силы, действующей на элемент *dl*, на ось *Ox:*

$$dF_x = E\tau dl\cos\alpha = \frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\alpha$$

Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \ dl = dy\,, \text{ то}$$

$$dF_x = \frac{\tau^2 x dy}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2\right)}$$

Полная сила равна

$$F = \int\limits_{\textit{по}\ \text{нити}} dF_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^2 x dy}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2\right)} = \frac{\tau^2 x}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{x}$$

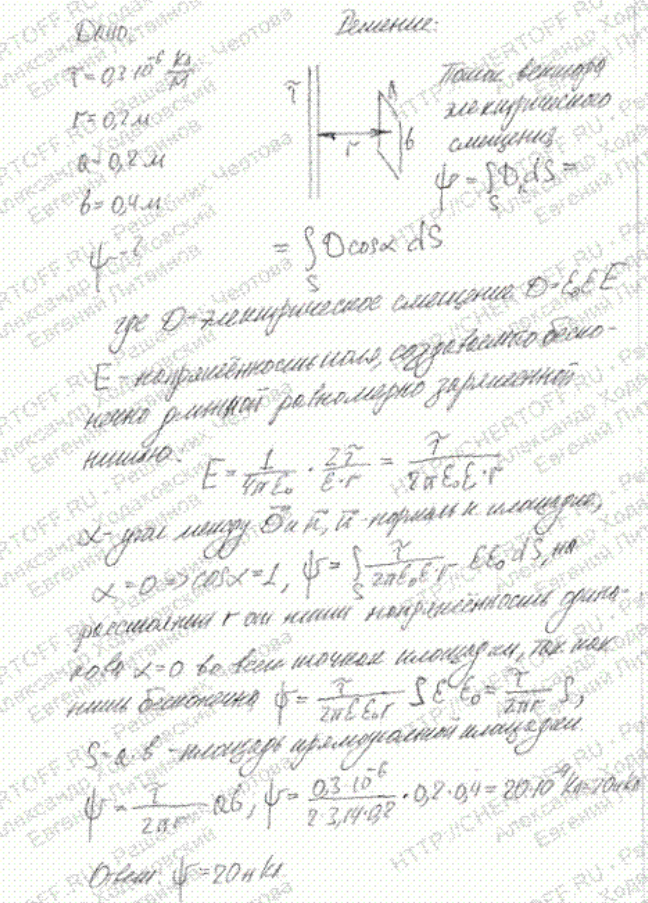
то

$$F == \frac{\tau^2 x}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{x} = \frac{\tau^2}{2\varepsilon_0}\,.$$

Это – ответ.

Задача 10 (Воробьев, Чертов, задача 14.56).
Электрическое поле создано бесконечной прямой равномерно заряженной линией (τ=0,3 мкКл/м). Определить поток Ф вектора электрического смещения через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной линии и одинаково удалены от нее на расстояние *r*=20 см. Стороны площадки имеют размеры *a*=20 см, *b*=40 см.

Решение из интернета:



Дано:
$\tau = 0{,}3\cdot10^{-6}\ \frac{Кл}{м}$
$r = 0{,}2$ м
$a = 0{,}2$ м
$b = 0{,}4$ м
ψ - ?

Решение:

Поток вектора электрического смещения $\psi = \int_S D\,dS = \int_S D\cos\alpha\, dS$

где D - электрическое смещение $D = \varepsilon_0\varepsilon E$

E - напряжённость поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью. $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\tau}{\varepsilon\cdot r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot r}$

α - угол между $\vec{D}$ и $\vec{n}$, $\vec{n}$ - нормаль к площадке,

$\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$, $\psi = \int_S \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}\,\varepsilon\varepsilon_0\, dS$, на расстоянии r от нити напряжённость одинакова, т.к. $\alpha = 0$ во всех точках площадки, так как нить бесконечна $\psi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} S\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{\tau}{2\pi r} S$,

$S = a\cdot b$ - площадь прямоугольной площадки

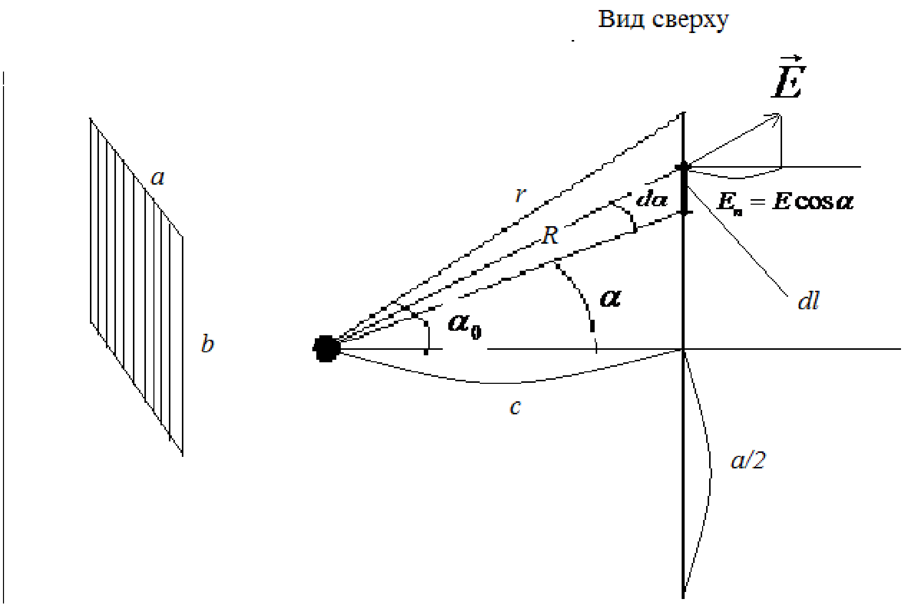
$\psi = \frac{\tau}{2\pi r} ab$, $\psi = \frac{0{,}3\cdot10^{-6}}{2\cdot3{,}14\cdot0{,}2}\cdot0{,}2\cdot0{,}4 = 20\cdot10^{-9}$ Кл $= 20$ нКл

Ответ: $\psi = 20$ нКл

Задача решена неправильно, оценка 0 баллов.

Правильное решение:

Сделаем рисунок. Также изобразим вид сверху.



Разобьем площадку на полоски бесконечной малой ширины dl. Будем считать, что полоски настолько тонкие, что в пределах полоски напряженность электрического поля, создаваемого линией, одинаковая. Рассмотрим одну из полосок, находящуюся на расстояние R от линии. В соответствие с известной из лекций формулой, напряженность электрического поля, создаваемого линией, на полоске будет равна

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}$$

Направление вектора $\vec{E}$ показано на рисунке. Проекция этого вектора на нормаль к поверхности полоски будет равна

$$E_n = E\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}\cos\alpha$$

Вектор электрического смещения в отсутствие среды ($\varepsilon = 1$) есть

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

Поэтому поток вектора электрического смещения через полоску будет равен

$$d\Psi = D_n dS = \varepsilon_0 E_n dS = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot dS = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot dl$$

где dS - площадь полоски, которая равна $dS = bdl$.

Выразим dl и R через $d\alpha$ и α (см. рисунок):

$$dl = \frac{Rd\alpha}{\cos\alpha}, \quad R = \frac{r}{\cos\alpha}$$

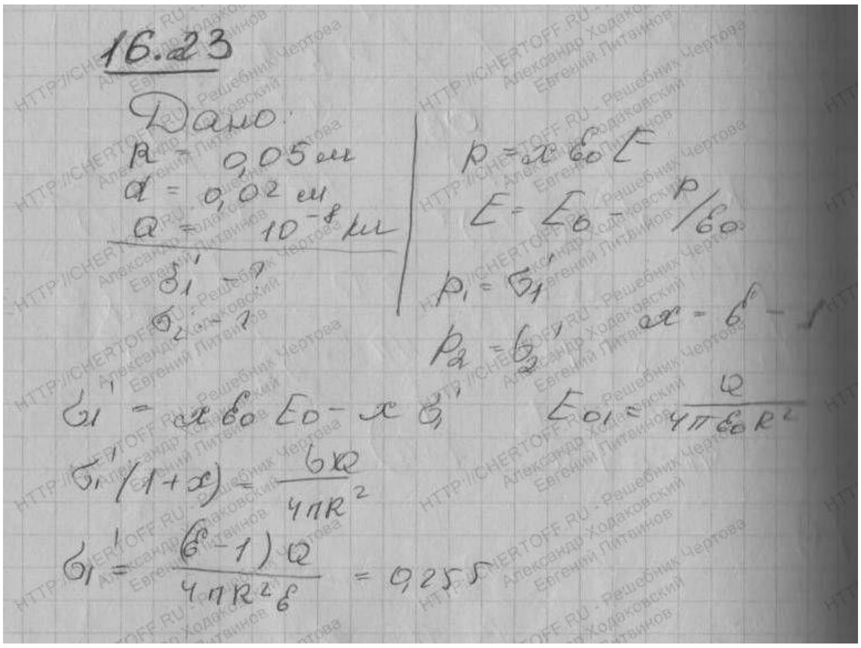
Тогда

$$d\Psi = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot dl = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot \frac{Rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\pi}\tau \cdot b \cdot d\alpha$$

Чтобы получить полный поток, нужно просуммировать по всем полоскам, или проинтегрировать по углу от $-\alpha_0 = -\arcsin\frac{a/2}{r}$ до $\alpha_0 = \arcsin\frac{a/2}{r}$

$$\Psi = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{1}{2\pi}\tau \cdot b \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi}\tau b\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\tau b 2\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\tau b\arcsin\frac{a}{2r}$$

Задача 11 (Воробьев, Чертов, задача 16.23). Металлический шар радиусом *R*=5 см окружен равномерно слоем фарфора толщиной *d*=2 см. Определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд *Q* шара равен 10 нКл.



16.23

Дано:

$R = 0{,}05$ м

$d = 0{,}02$ м

$Q = 10^{-8}$ Кл

$\sigma_1' - ?$

$\sigma_2' - ?$

$P = æ \varepsilon_0 E$

$E = E_0 - P/\varepsilon_0$

$P_1 = \sigma_1'$

$P_2 = \sigma_2'$ $æ = \varepsilon - 1$

$\sigma_1' = æ \varepsilon_0 E_0 - æ \sigma_1'$ $E_{01} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$\sigma_1'(1+æ) = \frac{\varepsilon Q}{4\pi R^2}$

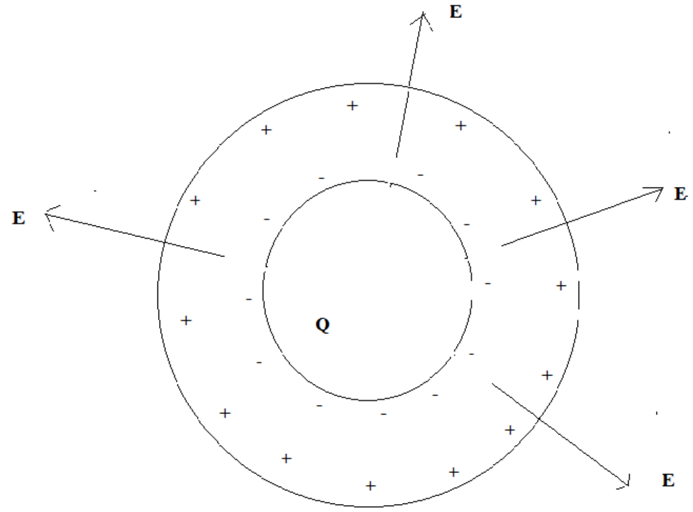
$\sigma_1' = \frac{(\varepsilon - 1) Q}{4\pi R^2 \varepsilon} = 0{,}25\varepsilon$

Оценка 2 балла (непонятно откуда что берется и нет ответа для σ_2)

Дано: R, d, Q, ε

Найти: σ_1, σ_2,

Решение:



Если бы не было диэлектрика, то напряженность электрического поля вне шара на расстоянии r от его центра была бы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

При наличии диэлектрика в нем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

У внутренней поверхности диэлектрика

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

У внешней поверхности диэлектрика

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{(R+d)^2}$$

Найдем вектор поляризации по модулю на внутренней и внешней стороне диэлектрика

$$P_1 = \chi\varepsilon_0 E_1, \quad P_2 = \chi\varepsilon_0 E_2,$$

где $\chi = \varepsilon - 1$ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Подставляем:

$$P_1 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}, \qquad P_2 = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_2 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(R+d)^2}$$

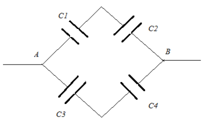
Из лекций известно, что на поверхности поляризованного диэлектрика

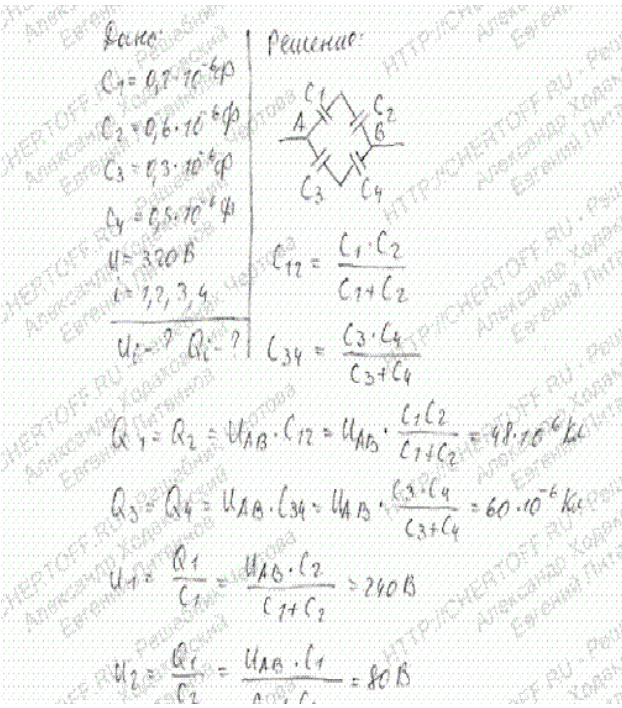
$$\sigma_1 = P_1, \ \sigma_2 = P_2,$$

Подставляя в данные формулы выражения для P_1 и P_2, получаем

$$\sigma_1 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(R+d)^2},$$

Задача 12 (Воробьев, Чертов, задача 17.21). Конденсаторы электроемкостями C1=0,2 мкФ, C2=0,6 мкФ, C3=0,3 мкФ, C4=0,5 мкФ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов *U* между точками A и B равна 320 В. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах каждого конденсатора (i=1, 2, 3, 4).




Дано:
$C_1 = 0{,}2\cdot 10^{-6}$ Ф
$C_2 = 0{,}6\cdot 10^{-6}$ Ф
$C_3 = 0{,}3\cdot 10^{-6}$ Ф
$C_4 = 0{,}5\cdot 10^{-6}$ Ф
$U = 320$ В
$i = 1, 2, 3, 4$
U_i - ? Q_i - ?

Решение:

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{34} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4}$$

$$Q_1 = Q_2 = U_{AB}\cdot C_{12} = U_{AB}\cdot\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 48\cdot 10^{-6}\text{ Кл}$$

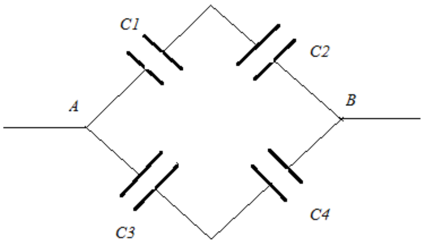
$$Q_3 = Q_4 = U_{AB}\cdot C_{34} = U_{AB}\cdot\frac{C_3\cdot C_4}{C_3 + C_4} = 60\cdot 10^{-6}\text{ Кл}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{U_{AB}\cdot C_2}{C_1 + C_2} = 240\text{ В}$$

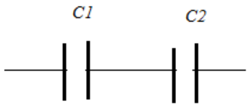
$$U_2 = \frac{Q_1}{C_2} = \frac{U_{AB}\cdot C_1}{C_1 + C_2} = 80\text{ В}$$

Оценка 3 балла (нет объяснения и нет ответов в общем виде)

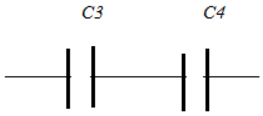
Решение:



Обозначим последовательное соединение конденсаторов C_1 и C_2



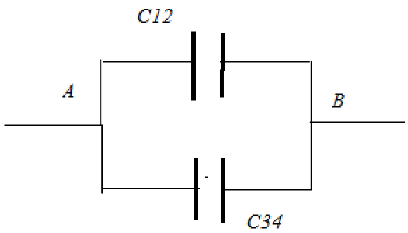
как конденсатор C_{12}, и обозначим последовательное соединение конденсаторов C_3 и C_4



как конденсатор C_{34}. Емкости C_{12} и C_{34} равны

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C4}$$

Тогда схема примет вид



Поскольку разность потенциалов на обкладках каждого из конденсаторов C_{12} и C_{34} равна U, то заряд на каждом из них равен

$$Q_{12} = C_{12}U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U, \quad Q_{34} = C_{34}U = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}U$$

При последовательном соединении заряды на обкладках конденсатором по модулю одинаковы. Поэтому на конденсаторах C_1 и C_2 $Q_1 = Q_2 = Q_{12}$. Поэтому

$$Q_1 = Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \ldots$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U$$

$$Q_3 = Q_4 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}U$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \ldots$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_2} = \ldots$$

Задача 13 (Воробьев, Чертов, задача 18.5). Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом *r*= 10 см каждая. Расстояние d_1 между пластинами равно 1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов *U* =1.2 кВ и отключили от источника тока. Какую работу А нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до d_2=3.5 см?

Пример идеально разобранной задачи в Интернете:

№ 18-5.

Дано:

$r = 10 см = 0{,}1 м$

$d_1 = 1 см = 0{,}01 м$

$U = 1{,}2 кВ = 1{,}2 \cdot 10^3 В$

$d_2 = 3{,}5 см = 0{,}035 м$

$A - ?$

Решение.

Систему двух заряженных и отключенных от источника тока пластин можно рассматривать как изолированную систему, по отношению к которой справедлив закон сохранения энергии. В этом случае работа внешних сил равна изменению энергии системы:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1, \qquad (1)$$

где W_2 - энергия поля конденсатора в конечном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_2); W_1 - энергия поля в начальном состоянии (пластины находятся на расстоянии d_1).

Энергию в данном случае удобно выразить через заряд Q на пластинах, так как заряд пластин, отключенных от источника при их раздвижении, не изменяется. Подставив в равенство (1) выражения

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} \quad и \quad W_1 = \frac{Q^2}{2C_1}, \text{ получим:}$$

$$A = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1}, \quad или \quad A = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right).$$

Выразим заряд Q через разность потенциалов U между пластинами и начальную электроемкость C_1 по формуле: $Q = C_1 U$. Тогда,

$$A = \frac{C_1^2 U^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right). \qquad (2)$$

Электроемкости конденсатора в начальном и конечном состояниях равны соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \, , \qquad (3)$$

где ε_0 - электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м);
S - площадь пластин конденсатора.

Подставляя выражения (3) в формулу (2) получаем:

$$A = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 U^2}{2d_1^2} \cdot \left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 S} - \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} \right).$$

Сокращая на $\varepsilon_0 S$ и учитывая, что площадь пластин $S = \pi r^2$, получаем:

$$A = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2 U^2}{2d_1^2} \cdot (d_2 - d_1). \qquad (4)$$

Проверим размерность.

$$[A] = \frac{[\varepsilon_0] \cdot [r]^2 \cdot [U]^2 \cdot [d_2 - d_1]}{[d_1]^2} = \frac{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ В}^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}^2} =$$

$$= 1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ В}^2 = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot 1 \text{ В}^2 = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}$$

Произведя вычисления по формуле (4), найдем:

$$A = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot (1,2 \cdot 10^3)^2}{\ldots} \cdot (0,035 - 0,01) = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} =$$

Задача 14 (Воробьев, Чертов, задача 18.18). Сплошной парафиновый шар радиусом R=10 см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью ρ = 10 нКл/м3. Определить энергию W_1 электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию W_2 вне его.

Пример задачи, которая решена идеально правильно только наполовину:

№ 18-18

Дано:

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м

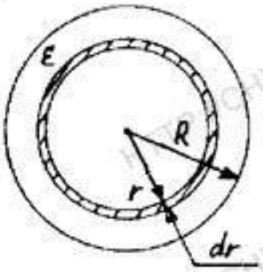
$\rho = 10\ \frac{нКл}{м^3} = 10^{-8}\ \frac{Кл}{м^3}$

$\varepsilon = 2$

$W_1 - ?;\ W_2 - ?$

Решение.

Найдем энергию W_1 поля внутри шара. Выделим в шаре элементарный сферический слой радиусом r $(r < R)$ и толщиной dr. В этом слое



сосредоточена энергия:

$$dW = \omega dV,$$ где ω - объемная плотность энергии.

Объем слоя равен: $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда,

$$dW = 4\pi r^2 \omega dr. \qquad (1)$$

Объемная плотность энергии электрического поля в шаре определяется выражением:

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2,$$ где E - напряженность поля; ε - диэлектрическая проницаемость парафина.

Напряженность поля, создаваемого заряженным шаром в точке на расстоянии r от центра шара определяется выражением: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где Q - заряд части шара, заключенной внутри поверхности радиуса r.

Поэтому,

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2 r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4} \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1) получаем:

$$dW = 4\pi r^2 \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} dr \qquad (3)$$

Заряд Q выразим через объемную плотность ρ заряда и объем части шара, заключенной внутри поверхности радиуса r: $Q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. С учетом этого выражение (3) принимает вид:

$$dW = \frac{16\pi^2 r^6 \rho^2}{9 \cdot 8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} dr = \frac{2\pi\rho^2 r^4}{9\varepsilon_0\varepsilon} dr$$

Интегрируя от $r_1 = 0$ до $r_2 = R$ получим энергию, сосредоточенную в шаре:

$$W_1 = \int_0^R \frac{2\pi\rho^2 r^4}{9\varepsilon_0\varepsilon}dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^R = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0\varepsilon} \quad (4)$$

Проверим размерность.

$$[W_1] = \frac{[\rho]^2\cdot[R]^5}{[\varepsilon_0]} = \frac{1\,Кл^2/м^6\cdot 1\,м^5}{1\,Ф/м} = \frac{1\,Кл^2}{1\,Кл/В} = 1\,Кл\cdot 1\,В = 1\,Дж$$

Далее решение идет неправильное, хотя ответ правильный

Энергия поля вне шара равна:

$W_2 = \frac{Q\varphi}{2}$, (5), где Q - заряд шара; φ - его потенциал.

Заряд шара выразим через объемную плотность ρ заряда и объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ по формуле

$$Q = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \quad (6)$$

Потенциал шара определяется выражением:

$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, или, с учетом (6):

$$\varphi = \frac{4\pi\rho R^3}{3\cdot 4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}, \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в формулу (5) получаем:

$$W_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3\cdot\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0} \quad (8)$$

Подставляя числовые значения в формулы (4) и (8) произведем вычисления.

$$W_1 = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot(10^{-7})^2\cdot 0{,}1^5}{45\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2} = 7{,}88\cdot 10^{-12}\,Дж = 7{,}88\,пДж$$

$$W_2 = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot(10^{-7})^2\cdot 0{,}1^5}{9\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 7{,}88\cdot 10^{-11}\,Дж = 78{,}8\,пДж$$

Ответ: $W_1 = 7{,}88$ пДж; $W_2 = 78{,}8$ пДж

Неправильность рассуждений заключается в том, что, поскольку шар не является проводником, то он не имеет потенциала и все его точки несут разный потенциал. Поэтому формула $W_2 = \frac{Q\varphi}{2}$ неприменима (эта формула есть формула для энергии заряженного проводника!!!)

Правильное решение:

Напряженность электрического поля вне шара равна $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, где Q - заряд всего шара, r - расстояние до центра шара. Заряд шара равен

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Поэтому

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Энергия вне шара в сферическом слое толщиной dr, находящемся на расстоянии r от центра шара равна

$$dW = wdV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV\ ,$$

где dV - объем слоя. Находим

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Поэтому

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi R^6\rho^2}{9\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2}$$

$$W_2 = \int\limits_{\text{вне шара}} dW = \int_R^\infty \frac{2\pi R^6\rho^2}{9\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi R^6\rho^2}{9\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi R^6\rho^2}{9\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{2\pi R^5\rho^2}{9\varepsilon_0}$$