

4. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Система автоматического управления называется дискретной, если выходная величина какого – либо ее элемента имеет дискретный характер.

Большое внимание к теории и практике дискретных систем объясняется все большим использованием в замкнутом контуре управления цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Это обеспечивает системе большие вычислительные возможности, высокую стабильность, простоту перестройки ее структуры и параметров.

4.1 Теория цифровых САУ. Z – преобразование, ζ -преобразование.

Информация о состоянии объекта управления, как правило, является непрерывной, и перед подачей на вход ЦВМ ее необходимо преобразовать в дискретную форму. Эту задачу выполняет преобразователь “аналог – код” который, в теории автоматического управления принято называть **импульсным элементом**” (ИЭ). Дискретизация осуществляется путем квантования непрерывного сигнала по времени и по уровню. Это означает, что аналоговый сигнал в ИЭ через равные промежутки T заменяется дискретными по уровню значениями, ближайшими к значениям непрерывного сигнала (рис.4.1). Параметр T в дальнейшем будем называть периодом квантования.

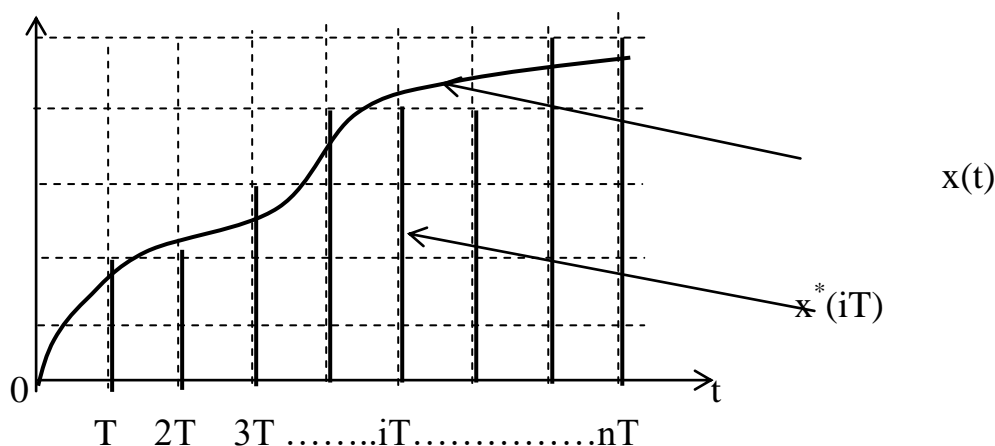


Рис.4.1. Дискретизация непрерывного сигнала

В результате дискретизации непрерывный сигнал заменяется серией импульсов бесконечно малой длительности, амплитуда которых близка к значениям непрерывного сигнала в моменты дискретизации. Ошибки дискретизации по уровню определяются только точностью представления чисел в ЦВМ, и они настолько малы, что ими в практических приложениях можно пренебречь. Это дает возможность рассматривать ИЭ только как дискретизатор по времени. На структурных схемах ИЭ изображается в виде ключа. Серия импульсов $x^*(iT)$ на выходе импульсного элемента называется **решетчатой функцией**. После производства вычислений на выходе ЦВМ информация появляется также в виде решетчатой функции. Перед подачей

этой информации на исполнительную систему, которая является аналоговой, ее необходимо преобразовать из дискретной в непрерывную. Эту задачу решают преобразователи “код – аналог”, которые в теории автоматического управления получили название **экстраполяторов**. В полном соответствии со своим наименованием, эти устройства экстраполируют значение сигнала на такт вперед. Наиболее часто используется экстраполятор нулевого порядка, который реализует операцию

$$x(iT + T) = x(iT). \quad (4.1)$$

Экстраполятор такого типа часто в литературе называют фиксатором нулевого порядка.

Работа экстраполятора нулевого порядка иллюстрируется рис.4.2.

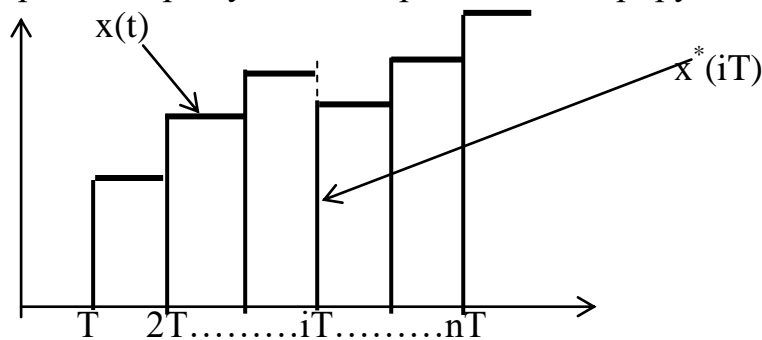


Рис.4.2. Работа экстраполятора нулевого порядка

В некоторых более сложных случаях для восстановления аналогового сигнала на интервале $iT \leq t < (i+1)T$ используются значения $X(i-1), X(i-2), \dots, X(i-l)$. В этом случае говорят об экстраполяторе порядка l .

4.1.1 Для анализа и синтеза дискретных САУ используется дискретное преобразование Лапласа. Наибольшее распространение в научной литературе получило дискретное преобразование в форме **Z – преобразования**. Рассмотрим определение и основные свойства такого преобразования.

Решетчатая функция $x^*(t)$, полученная из непрерывной функции $x(t)$, может быть записана в виде

$$x^*(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \delta(t-iT), \quad (4.2)$$

где $\delta(t-iT)$ – дельта – функция.

Найдем преобразование Лапласа от выражения (4.2).

$$L\{x^*(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) L\{\delta(t-iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-isT}. \quad (4.3)$$

Обозначим $z = e^{sT}$. Тогда можно записать

$$L\{x^*(iT)\} = Z\{x(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}. \quad (4.4)$$

Это и есть Z – преобразование функции $x(t)$.

Пример. Найти Z – преобразование функции $x(t) = e^{-at}$.

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-iaT} z^{-i} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots + e^{-kaT} z^{-k} + \dots$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с показателем

$q = e^{-aT} z^{-1}$. Сумма геометрической прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$, где a_1 – первый

член прогрессии. Получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Рассмотрим некоторые основные теоремы Z – преобразования.

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений.

2. Теорема о начальном значении оригинала

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (4.5)$$

3. Теорема о конечном значении оригинала

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z). \quad (4.6)$$

4. Теорема запаздывания

$$Z\{x(iT - nT)\} = X(z)z^{-n}. \quad (4.7)$$

В литературе по ТАУ приводятся таблицы преобразования Лапласа и Z – преобразования от типовых непрерывных функций.

4.1.2 Для того, чтобы получить возможность анализировать процессы между моментами квантования вводится **модифицированное Z – преобразование**.

Предположим, что импульсный элемент выбирает значения функции $X(t)$ не в моменты $t_i = iT$, а в моменты $t_i = iT + \varepsilon T$, где $0 \leq \varepsilon < 1$

Тогда модифицированное Z – преобразование для сигнала $X(t)$, обозначаемое как $Z_{\varepsilon}\{x(t)\}$ представляет собой Z – преобразование для

решетчатой функции $x^*(iT, \varepsilon) = x^*(iT + \varepsilon T)$, которое может быть вычислено как

$$Z_{\varepsilon}\{x(t)\} = Z\{x^*(iT, \varepsilon)\} = \sum_{i=0}^{\infty} X(iT + \varepsilon T)z^{-i}. \quad (4.8)$$

Для вычисления модифицированного Z-преобразования также существуют подробные таблицы

4.1.3 В современной литературе по цифровым системам часто применяют ζ -преобразование, которое получается путем замены z^{-i} на ζ

$$L\{x^*(iT)\} = Z\{x(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)\zeta^i. \quad (4.9)$$

Во многих случаях использование ζ -преобразования дает значительные преимущества по сравнению с классическим Z -преобразованием, особенно при синтезе регуляторов.

4.2 Передаточные функции дискретных САУ.

Для линейных дискретных систем возможно ввести понятие передаточной функции так же, как и для непрерывных систем. Для дискретных систем вместо преобразования Лапласа можно использовать Z -преобразование.

Рассмотрим общую схему дискретной (цифровой) САУ показанной на рис.4.3.

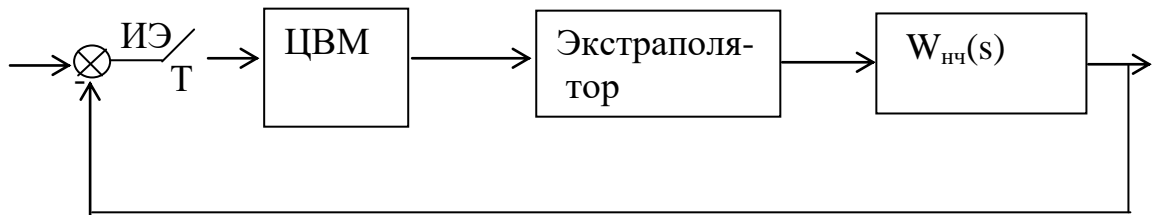


Рис. 4.3. Схема дискретной САУ

На схеме под $W_{нч}(s)$ подразумевается непрерывная часть системы. Следует отметить, так как в состав системы входят как дискретные, так и аналоговые элементы, то такие системы правильно называть дискретно – непрерывными или гибридными.

Определим передаточную функцию дискретной системы или какого – либо ее звена, по аналогии с непрерывными системами, как отношение Z – изображения выходного сигнала к Z – изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях. Обозначим входной сигнал ЦВМ как $E(z)$, а выходной – $Y(z)$, тогда можно записать:

$$W_{цвм}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}.$$

Будем считать, что в системе используется экстраполятор нулевого порядка и определим его передаточную функцию. На вход экстраполятора поступает дельта – функция с амплитудой $Y(0)$. Экстраполятор запоминает это значение на один такт и формирует прямоугольный импульс (рис. 4.4). Для решения задачи искусственно продлим этот импульс в бесконечность, т.е. условно посчитаем, что экстраполятор формирует ступенчатый сигнал

$Y(0)I(t)$, а для сохранения истинного положения дополним рисунок ступенчатым воздействием $-Y(0)I(t-T)$.

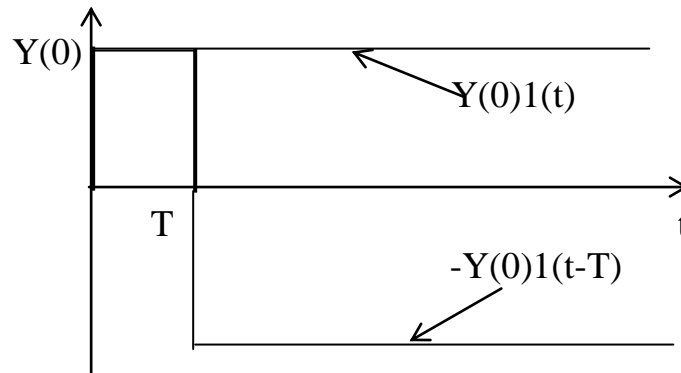


Рис. 4.4. Преобразование сигнала в экстраполяторе

Теперь выходной сигнал экстраполятора можно определить как

$$Y_T(t) = Y(0)I(t) - Y(0)I(t-T).$$

Передаточная функция экстраполятора нулевого порядка примет вид

$$W_{\vartheta}(s) = \frac{L\{Y_T(t)\}}{L\{Y(0)\delta(t)\}} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

С учетом ранее сделанного обозначения $e^{-sT} = z$, окончательно получим

$$W_{\vartheta}(s) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{s}. \quad (4.10)$$

Множитель $\frac{1}{s}$ относят к непрерывной части системы и считают, что ее передаточная функция определяется выражением

$$W_{нч}^*(s) = \frac{1}{s} W_{нч}(s).$$

Теперь структурную схему дискретной системы можно изобразить в виде, показанном на рис.4.5. Основная трудность дальнейших преобразований, имеющих целью получение Z- передаточной функции всей системы, заключается в получении Z – передаточной функции приведенной непрерывной части $W_{нч}^*(s)$. При этом необходимо помнить, что **если непрерывная часть системы задана в виде соединения каких – либо звеньев, то нельзя**

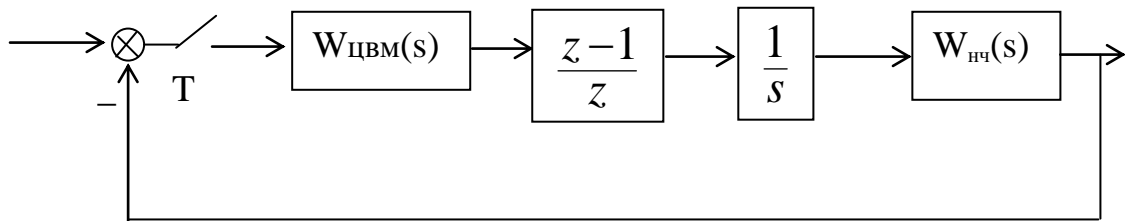


Рис. 4.5. Структурная схема дискретной САУ

определить Z – передаточную функцию каждого звена, а затем воспользоваться правилами о соединениях динамических звеньев. Z – преобразование необходимо определять от всей передаточной функции $W_{нч}^*(s)$. Исключение из этого правила составляют приближенные методы получения Z – преобразования, например, методы подстановки и подбора корня.

Для получения точного Z – преобразования по непрерывной передаточной функции можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо найти полюсы непрерывной передаточной функции и представить ее в виде суммы элементарных динамических звеньев с неопределенными коэффициентами в числителе. После приведения к общему знаменателю составляется и решается система уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Для каждого элементарного звена по таблицам можно определить его Z – передаточную функцию и затем, для получения передаточной функции приведенной непрерывной части, в соответствии с теоремой 1 просуммировать эти передаточные функции.

Если определены полюсы s_i приведенной непрерывной части, то для получения ее Z – изображения можно воспользоваться теоремой о вычетах.

$$\begin{aligned}
 W_{нч}(z) &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \frac{z}{z - e^{s_i T}} W_{нч}^*(s) \right\}_{s=s_i} = \\
 &= \frac{z}{z-1} \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=0}^n \left(\frac{z}{z - e^{s_i T}} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

В этом выражении $B(s)$ и $A(s)$ - полиномы числителя и знаменателя передаточной функции непрерывной части системы, а $A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}$.

После определения Z - передаточной функции непрерывной части, легко определяются передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы:

- $W(z) = W_{\text{цвм}}(z) \frac{z-1}{z} Z \left\{ W_{\text{нч}}^*(s) \right\}$ - передаточная функция разомкнутой системы;
- $\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}$ - передаточная функция замкнутой системы;
- $\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1+W(z)}$ - передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

4.3 Исследование устойчивости и качества переходных процессов в дискретных САУ. Понятия робастности и стабилизируемости системы.

4.3.1 Сформулируем критерии устойчивости для линейных систем, имеющих непрерывную и дискретную части в соответствии с теоремами устойчивости А. М. Ляпунова. Будим полагать, что передаточная функция замкнутой системы построена. Тогда по аналогии с непрерывными системами уравнение

$$D(z) = 1 + W(z) = 0 \quad (4.12)$$

назовём характеристическим уравнением замкнутой системы. При исследовании непрерывных систем было установлено, что для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы каждый корень характеристического уравнения $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ имел отрицательную вещественную часть. Учитывая, что $z = e^{sT}$, для каждого корня уравнения (4.12) можно записать

$$z_i = e^{\alpha_i T} (\cos \beta_i T + j \sin \beta_i T). \quad (4.13)$$

Это выражение есть уравнение окружности радиуса $R = |z_i| = e^{\alpha_i T}$.

Нетрудно видеть, что при нахождении системы на границе устойчивости, когда $\alpha_i = 0$, радиус $R = 1$, и это есть уравнение границы устойчивости дискретной системы. Для устойчивой непрерывной системы $\alpha_i < 0$, что соответствует значению радиуса $R < 1$.

Для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю строго меньше единицы или, что тоже самое, лежали внутри круга единичного радиуса.

Исследовать устойчивость дискретной системы путем определения корней характеристического уравнения неудобно и непродуктивно с точки зрения определения путей стабилизации системы. Желательно, как и ранее, иметь критерии устойчивости, позволяющие оценивать устойчивость без нахождения полюсов системы, определять запасы устойчивости, вычислять критические значения параметров и т.д. Критерии устойчивости, разработанные для дискретных систем, сложны и неудобны в использовании. Поэтому практическое применение нашли методы, полученные для непрерывных систем, которые можно использовать после преобразования передаточной функции дискретной системы, которое осуществляется подстановкой

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) определяет так называемое билинейное преобразование, которое отображает внутренность единичного круга на плоскости z в левую полуплоскость плоскости w .

Для преобразованного характеристического уравнения $D(w) = 0$ условием устойчивости является нахождение всех его корней в левой полуплоскости. Поэтому после билинейного преобразования для оценки устойчивости дискретной системы можно использовать все критерии, разработанные для непрерывных систем.

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы задана выражением

$$W(z) = \frac{k(z+0.5)(z+1.065)}{(z-1)(z-0.135)(z-0.0183)}.$$

Требуется:

- 1) для значения $k=0.3$ оценить устойчивость замкнутой системы;
- 2) определить критическое значение коэффициента усиления.

Для решения поставленных задач используем критерий Гурвица. Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\Phi(z) = \frac{k(z+0.5)(z+1.065)}{z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3},$$

где $d_1 = k - 1.153$, $d_2 = 0.156 + 1.565k$, $d_3 = 0.533k - 0.00247$. Для $k = 0.3$ получим $d_1 = -0.853$, $d_2 = 0.525$, $d_3 = 0.157$. В характеристическом уравнении

замкнутой системы сделаем замену $z = \frac{1+w}{1-w}$ и после несложных

преобразований получим

$$D(w) = 2.32w^3 + 3.7w^2 + 1.051w + 0.929.$$

Для системы 3-го порядка условие устойчивости, вытекающее из критерия Гурвица, определяется выражением

$$d_1 d_2 - d_0 d_3 > 0.$$

Подставим численные значения коэффициентов в это выражение и получим

$$3.7 * 1.051 - 2.32 * .929 > 0.$$

Замкнутая система при заданном значении коэффициента усиления прямой цепи устойчива.

Для неизвестного значения коэффициента усиления после билинейного преобразования получим

$$d_0 = 2.311 + 0.032k, \quad d_1 = -0.966k + 4, \\ d_2 = 1.698 - 2.164k, \quad d_3 = 3.098k + 0.0053.$$

Из анализа выражений для коэффициентов характеристического уравнения следует, что необходимое условие устойчивости для коэффициентов d_0 и d_3 выполняется всегда, коэффициент $d_1 > 0$, если $k < 4.14$, а $d_2 > 0$, если $k < 0.785$. Условием нахождения системы 3-го порядка на колебательной границе устойчивости является равенство

$$d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0.$$

Подставим значения коэффициентов и после элементарных преобразований получим квадратное уравнение относительно коэффициента усиления

$$k^2 - 8.767k + 3.41 = 0.$$

Решение уравнения дает два значения: $k = 0.408$ и $k = 8.36$.

Сравнивая эти результаты с полученными выше, можно сделать вывод, что

$$(k)_{kp} = 0.408.$$

Для оценки устойчивости дискретно системы можно использовать и частотные характеристики, получающиеся после замены $z = e^{j\omega T}$. Однако, полученные таким путем характеристики выражаются сложными трансцендентными функциями и их определение и использование связано со сложными вычислениями. Поэтому, для использования частотных характеристик, вначале к передаточной функции применяют билинейное преобразование (4.14). Из (4.14) также следует

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{(\cos \omega T - 1) + j \sin \omega T}{(\cos \omega T + 1) + j \sin \omega T} = \\ = j \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = j \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2}}{2 \cos^2 \frac{\omega T}{2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

Сравнивая полученный результат с заменой $s = j\omega$, можно сделать вывод, что по форме они совершенно одинаковы. Назовем псевдочастотой величину

$v = tg \frac{\omega T}{2}$ и, для получения характеристик дискретной системы относительно псевдо частоты, будем использовать подстановку $w = jv$. Псевдо частота и круговая частота связаны соотношением

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg v. \quad (4.15)$$

Из полученных выражений видно, что частотные характеристики дискретных САУ относительно круговой частоты являются периодическими функциями с периодом $\pm \frac{\pi}{T}$. Нетрудно убедиться, что при изменении круговой частоты

в указанных пределах, псевдо частота изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Так как частотные характеристики периодические функции, то достаточно строить их в пределах $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$. Частотные характеристики дискретных систем

строятся относительно псевдо частоты и после этого, для оценки устойчивости, к ним применимы частотные критерии устойчивости. Построение частотных характеристик дискретных систем связано с большим объемом преобразований и вычислений. В то же время использование частотных характеристик предпочтительно в случаях, когда нужно не только оценить собственно устойчивость системы, но и определить запасы устойчивости и наметить пути стабилизации системы. Для расчета и построения частотных характеристик дискретных систем используются различные прикладные программы вычислений. На рис.4.6 показаны ЛЧХ, построенные для передаточной функции разомкнутой системы из предыдущего примера.

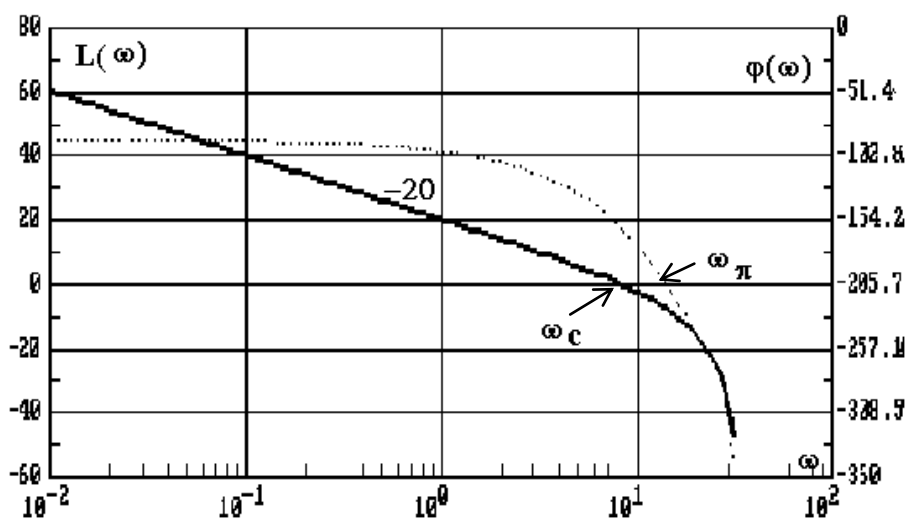


Рис.4.6. ЛЧХ системы

Из рисунка следует, что $\omega_c < \omega_{\pi}$, а значит замкнутая система устойчива. В тоже время запасы устойчивости, определенные из графиков, $\gamma = 16^\circ$,

$H = 2.67$ дб., явно недостаточны. Отметим также, что на приведенном рисунке на оси частот указаны значения круговых частот.

4.3.2 Показатели качества дискретной системы наиболее просто определяются по кривой переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием

$$1(t) \rightarrow \frac{z}{z-1}.$$

Изображение переходной функции будет

$$H(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Дискретные значения переходного процесса могут найдены путем разложения изображения $H(z)$ в ряд Лорана, которое реализуется простым делением числителя изображения переходной функции на ее знаменатель. После деления получим

$$H(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_i z^{-i} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{-i}. \quad (4.16)$$

С другой стороны, по определению Z – преобразования

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(iT) z^{-i}. \quad (4.17)$$

Сравнивая (4.17) с (4.16), можно заключить, что коэффициенты разложения C_i равны дискретным значениям $h(iT)$ переходной функции.

Пример. Передаточная функция замкнутой системы задана выражением

$$\Phi(z) = \frac{0.3(z+0.5)(z+1.065)}{z^3 - 0.853z^2 + 0.625z + 0.157}.$$

Считая, что $T=0.1$, построить переходную функцию. Для изображения переходной функции получим

$$H(z) = \frac{0.3z^3 + 0.4695z^2 + 0.15975z}{z^4 - 1.853z^3 + 1.4786z^2 - 0.468z - 0.157}.$$

Разделим числитель на знаменатель

$$H(z) = 0.3z^{-1} + 1.0255z^{-2} + 1.614z^{-3} + 1.62z^{-4} + 1.14z^{-5} + 0.634z^{-6} + .503z^{-7} + 0.783z^{-8} + 1.183z^{-9} + 1.37z^{-10} + \dots$$

Отложив на графике ординаты дискретных значений h_i , соединив их плавной кривой, получим переходную функцию системы (рис.4.7).

Продлив вычисления дальше, можно определить все показатели качества, но уже и так ясно, что переходный процесс неудовлетворителен, т.к. перерегулирование превышает 60%, что является следствием малых запасов устойчивости.

По аналогии с непрерывными системами точность дискретных САУ в установившемся режиме можно оценивать с помощью коэффициентов ошибок. В общем случае коэффициенты ошибок дискретной системы определяются выражением

$$K_i = i! \frac{d^i}{ds^i} \Phi_\varepsilon(e^{sT}) \Big|_{s=0} \quad (4.18)$$

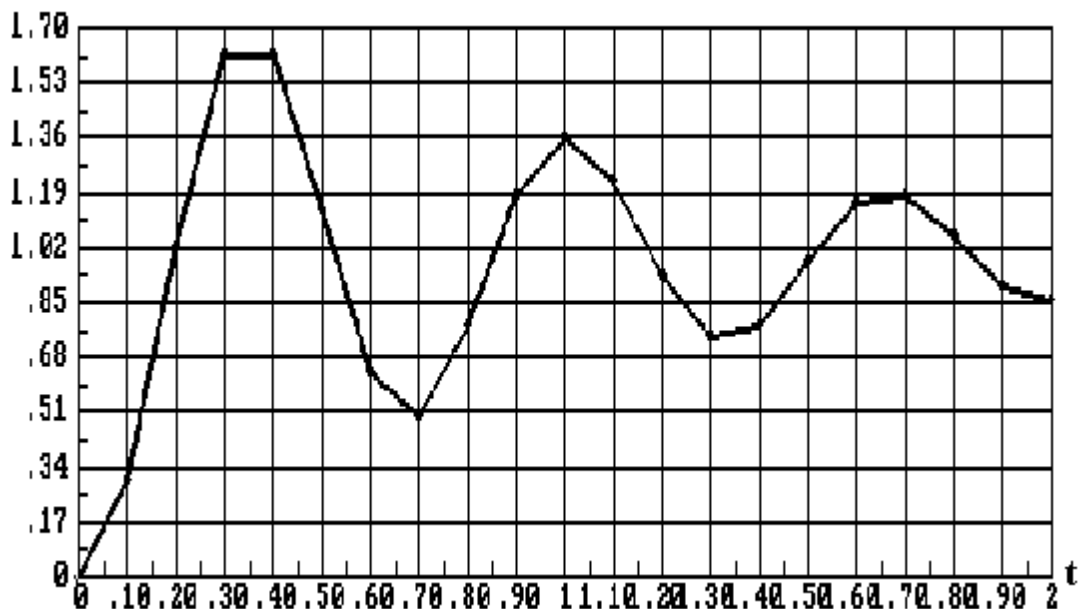


Рис.4.7. Переходная функция системы

Для вычисления практически используемых коэффициентов K_0, K_1, K_2 выведены формулы

$$\begin{aligned} K_0 &= \Phi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1}, \\ K_1 &= zT \frac{d}{dz} \Phi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1}, \\ K_2 &= 2zT \left[T \frac{d}{dz} \Phi_\varepsilon(z) + zT \frac{d^2}{dz^2} \Phi_\varepsilon(z) \right] \Big|_{z=1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Введением в передаточную функцию прямой цепи звена $\frac{z}{z-1}$, что соответствует введению интеграла, системе можно придать астатизм. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае имеет вид

$$W(z) = \left(\frac{z}{z-1} \right)^{\nu} \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (4.20)$$

Здесь ν - порядок астатизма. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке будет равна

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{(z-1)^{\nu} A(z)}{(z-1)^{\nu} A(z) + z^{\nu} B(z)}. \quad (4.21)$$

Очевидно, что при $\nu = 1$, коэффициент ошибки по положению $K_0 = 0$. При астатизме второго порядка ($\nu = 2$) получим, что $K_0 = 0$, $K_1 = 0$ и т.д.

4.3.3 Робастность

Под робастностью системы понимается ее свойства сохранять все существенные характеристики (устойчивость, показатели качества) при изменении параметров объекта и внешних возмущений.

Законы движения реального объекта всегда отличаются от модели, используемой разработчиком. Кроме этого, объект может менять свои характеристики в зависимости от режима работа или времени. Поэтому при проектировании систем управления важно учитывать неопределенность информации об объекте и возмущениях.

Неопределенность может быть параметрическая и непараметрическая. При рассмотрении параметрической неопределенности предполагается, что сама модель известна точно, но ряд параметров меняются внутри некоторой области.

Непараметрическая неопределенность задается в частотной области в виде ограничивающей функции. Например, модель объекта управления может быть задана в виде аддитивной неопределенности

$$F(s) = F_0(s) + \Delta(s),$$

или мультипликативной неопределенности

$$F(s) = F_0(s)(1 + \Delta(s))$$

Здесь $F_0(s)$ -номинальная модель, а частотная характеристика $\Delta(s)$ ограничена сверху $|\Delta(j\omega)| \leq \Delta_{\max}(\omega)$. При этом требуется чтобы неопределенность $\Delta(j\omega)$ не должна добавлять новых неустойчивых полюсов в объект управления.

В теории управления различают несколько характерных задач, связанных с робастностью.

1.Робастная устойчивость- регулятор должен обеспечивать устойчивость замкнутой системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной модели.

2.Робастное качество - регулятор должен обеспечивать заданное значение показателей качества замкнутой системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной модели.

3.Гарантирующее управление - регулятор должен обеспечивать заданное значение показателей качества замкнутой системы при всех допустимых значениях параметров внешних возмущений.

4.3.4 Стабилизируемость

Стабилизируемой называется система, для которой существует регулятор, обеспечивает устойчивость замкнутого контура по всем координатам при любых начальных условиях. Такой регулятор называют стабилизирующим.

Пусть передаточная функция дискретного объекта задана в виде отношения полиномов

$$W(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

При использовании регулятора $C(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ и замыкании контура

отрицательной обратной связью характеристический полином замкнутой системы будет иметь вид

$$R(z) = A(z)N(z) + B(z)D(z) \quad (4.22)$$

Если полином $R(z)$ задан, а полиномы $A(z)$ и $B(z)$ неизвестны, последнее равенство представляет собой полиномиальное уравнение.

Пусть полиномы $N(z)$ и $D(z)$ не имеют общих множителей. Из теории полиномиальных уравнений известно, что в этом случае для любого $R(z)$ можно найти полиномы $A(z)$ и $B(z)$, при которых всегда выполняется равенство (4.22). Поскольку в (4.22) всегда можно выбрать устойчивый полином $R(z)$, такой объект всегда стабилизируем.

Рассмотрим случай, когда полиномы $A(z)$ и $B(z)$ имеют общий множитель. Пусть

$$N(z) = G(z)N_0(z), D(z) = G(z)D_0(z)$$

Где $G(z)$ – общий полиномиальный множитель, а полиномы $N_0(z), D_0(z)$ взаимно простые, не имеющие общих корней. Тогда полиномиальное уравнение (4.22) будет иметь решение только при таком полиноме $R(z)$, который делится на $G(z)$ без остатка. Следовательно, если полином $G(z)$ имеет неустойчивые корни, тогда при любом выборе полиномов $A(z)$ и $B(z)$ система будет неустойчивой, а объект $W(z)$ нестабилизируемым. Для стабилизации объекта необходимо

проанализировать систему на предмет наблюдаемости и, если это возможно, дополнить систему дополнительной обратной связью.

Во многих задачах важно выбрать лучший в некотором смысле регулятор из всех стабилизирующих регуляторов. Для этого необходимо параметризовать множество стабилизирующих регуляторов. При этом если все стабилизирующие регуляторы описываются единой формулой, в которую входит некоторая функция – параметр, которая должна быть устойчивой. Выбирая соответствующим образом эту функцию, можно построить любой стабилизирующий регулятор с заданными свойствами.

4.4 Синтез дискретных САУ

Синтез дискретных САУ состоит в разработке такой программы обработки информации в ЦВМ, при которой синтезированная система удовлетворяет поставленным требованиям.

При синтезе дискретных систем необходимо учитывать некоторые требования, обеспечивающие необходимые условия функционирования замкнутой САУ с точки зрения устойчивости, важнейшим из которых является условие грубости.

4.4.1 Условие грубости системы.

Для изложения основных положений условия грубости САУ нам потребуется ввести определение некоторых специфических звеньев непрерывной неизменяемой части системы. Минимально-фазовой называются звенья системы корни числителя (нули) и знаменателя (полюса) которых, лежат в левой полуплоскости. Неминимально-фазовой называются звенья корни числителя которых, лежат в правой полуплоскости.

Желаемая передаточная функция замкнутой системы $\Phi_{\text{жс}}(z)$ не может быть выбрана произвольно, она должна удовлетворять определенным требованиям. Прежде всего, должно выполняться условие физической реализуемости, которое заключается в том, что бы порядок знаменателя был больше порядка числителя передаточной функции $\Phi_{\text{жс}}(z)$ ($n > m$).

Условие физической реализуемости является необходимым, но в общем случае недостаточным. При практической реализации дискретных (цифровых) корректирующих цепей их характеристики могут несколько отличаться от необходимых. Если это отличие вызовет малое изменение процессов в замкнутой САУ, то такая САУ представляет собой грубую систему. Если же малое отличие характеристик качественно изменит процесс, то система будет не грубой. Следовательно, всякая синтезированная система должна удовлетворять условию грубости.

Предположим, что параметры дополнительной корректирующей цепи несколько отличаются от расчетных. Тогда передаточная функция замкнутой

системы $\Phi(z)$ будет несколько отличаться от желаемой $\Phi_{\text{жс}}(z)$. Оценим отклонение (вариацию) $\Phi(z)$ от $\Phi_{\text{жс}}(z)$:

$$\delta\Phi(z) = \Phi(z) - \Phi_{\text{жс}}(z) \quad (4.23)$$

Обозначим как $W_k(z)$ передаточную функцию корректирующей цепи. Тогда, по определению вариации, можно записать

$$\delta\Phi(z) = \frac{\partial\Phi(z)}{\partial W_k(z)} \delta W_k(z) \quad (4.24)$$

Для последовательной коррекции в прямой цепи

$$\Phi(z) = \frac{W_0(z)W_k(z)}{1+W_0(z)W_k(z)}, \quad (4.25)$$

где $W_0(z)=B(z)/C(z)$ - передаточная функция неизменяемой части системы. В соответствии с выражением (4.24) получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= \frac{W_0(z)[1+W_0(z)W_k(z)] - W_0(z)W_k(z)W_0(z)}{[1+W_0(z)W_k(z)]^2} \delta W_k(z) = \\ &= \frac{W_0(z)}{[1+W_0(z)W_k(z)]^2} \delta W_k(z). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Передаточную функцию корректирующей цепи можно представить в виде

$$W_k(z) = \frac{C(z) \Phi_{\text{жс}}(z)}{B(z) 1 - \Phi_{\text{жс}}(z)} \quad (4.27)$$

Вариация $W_k(z)$, вызванная изменениями полиномов $C(z)$ и $B(z)$ равна

$$\delta W_k(z) = \frac{\partial W_k(z)}{\partial C(z)} \delta C(z) + \frac{\partial W_k(z)}{\partial B(z)} \delta B(z). \quad (4.28)$$

Учитывая выражение (4.27) для $W_k(z)$ из (4.28) можно получить

$$\delta W_k(z) = \frac{\Phi_{\text{жс}}(z) C(z)}{1 - \Phi_{\text{жс}}(z) B(z)} \left[\frac{\delta C(z)}{C(z)} - \frac{\delta B(z)}{B(z)} \right]. \quad (4.29)$$

Подставим это выражение в (4.26) и, учитывая (4.27) и $W_0(z)$, после преобразований получим окончательное выражение для вариации передаточной функции замкнутой системы

$$\delta\Phi(z) = \Phi_{\text{жс}}(z) [1 - \Phi_{\text{жс}}(z)] \left[\frac{\delta C(z)}{C(z)} - \frac{\delta B(z)}{B(z)} \right]. \quad (4.30)$$

Если передаточная функция неизменяемой части не имеет нулей и полюсов по модулю больших единицы (устойчивая и минимально-фазовая

неизменяемая часть), то и вариация $\delta\Phi(z)$ не будет содержать неустойчивых полюсов, и передаточная функция

$$\Phi(z) = \Phi_{ж}(z) + \delta\Phi(z) \quad (4.31)$$

будет соответствовать устойчивой замкнутой САУ. Чем меньше по абсолютной величине будут вариации $\delta C(z)$ и $\delta B(z)$, тем меньше будет отличаться передаточная функция замкнутой системы от желаемой и тем меньше будет отличаться процесс в системе от желаемого.

Если же передаточная функция неизменяемой части системы имеет нули или полюсы, по модулю большие единицы, что соответствует неминимально-фазовой или неустойчивой неизменяемой части, то эти нули и полюсы будут совпадать с полюсами вариации (4.30) замкнутой системы, как бы ни были малы вариации $\delta C(z)$ и $\delta B(z)$. Следовательно, передаточная функция замкнутой системы, определяемая выражением (4.31) будет соответствовать неустойчивой системе. В этом случае система является негрубой, ибо при небольшом отличии параметров корректирующей цепи от заданных замкнутая САУ становится неустойчивой. Отсюда следует, что корректирующая цепь не должна содержать нулей и полюсов, которые близки к неустойчивым нулям и полюсам передаточной функции неизменяемой части системы. Иначе говоря, для обеспечения грубости замкнутой САУ нельзя сокращать неустойчивые нули и полюсы передаточной функции неизменяемой части разомкнутой системы с полюсами и нулями передаточной функции корректирующей цепи.

Этот вывод накладывает определенные ограничения на желаемую передаточную функцию замкнутой системы.

Представим числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части системы в виде

$$\left. \begin{aligned} B(z) &= B^+(z)B^-(z) \\ C(z) &= C^+(z)C^-(z) \end{aligned} \right\},$$

где $B^+(z)$ и $C^+(z)$ имеют все нули по модулю меньшими единицы, а полиномы $B^-(z)$ и $C^-(z)$ - большими единицы. Тогда

$$W_0(z) = \frac{B^+(z) B^-(z)}{C^+(z) C^-(z)}. \quad (4.32)$$

Для устойчивой неизменяемой части системы $C^-(z) = I$, а для минимально-фазовой неизменяемой части разомкнутой САУ $B^-(z) = 1$. Если неизменяемая часть разомкнутой системы неустойчива и неминимально-фазовая, то передаточную функцию цепи коррекции (4.31) можно представить в виде

$$W_k(z) = \frac{C^+(z) \Phi_{\text{жс}}(z) C^-(z)}{B^+(z) B^-(z) (1 - \Phi_{\text{жс}}(z))}. \quad (4.33)$$

Для того, чтобы $W_k(z)$ не содержала неустойчивых нулей и полюсов $W_0(z)$, неустойчивые нули передаточной функции $W_0(z)$, т.е. нули $B^-(z)$, как видно из (4.30), должны входить в число нулей $\Phi_{\text{жс}}(z)$, а неустойчивые полюсы $W_0(z)$, т.е. нули $C^-(z)$, должны входить в число нулей передаточной функции замкнутой системы по ошибке $\Phi_\varepsilon(z) = 1 - \Phi_{\text{жс}}(z)$.

Действуя аналогично можно определить условия грубости для систем с последовательной коррекцией в цепи обратной связи и для параллельной коррекции. В результате можно получить следующие выводы.

1. Для минимально-фазовой и устойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ условия грубости заведомо выполняются, и поэтому выбор желаемой передаточной функции замкнутой системы не стеснен ограничениями.

2. Для неминимально-фазовой и устойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ условия грубости одинаковы при любом виде коррекции и накладывают определенные ограничения на выбор $\Phi_{\text{жс}}(z)$ - она должна содержать неустойчивые нули передаточной функции $W_0(z)$.

3. Для минимально-фазовой и неустойчивой неизменяемой части разомкнутой системы возникают дополнительные ограничения на выбор $\Phi_{\text{жс}}(z)$, вытекающие из условия грубости, для последовательной коррекции в прямой цепи и параллельной коррекции (см. 4.30).

4. Для неминимально-фазовой и неустойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ ограничения на выбор желаемой передаточной функции замкнутой системы возникают при всех видах коррекции.

Выше мы рассматривали замкнутую систему при одном внешнем воздействии, приложенном к входу импульсного элемента. Изменение точки приложения входного воздействия изменяет вид передаточной функции замкнутой системы. Поэтому, в силу неизбежных флюктуаций в различных точках замкнутой САУ, следует выбирать $\Phi_{\text{жс}}(z)$, исходя из наиболее жестких условий грубости, выведенных из анализа формулы 4.30. Таким образом, для всех видов коррекции $\Phi_{\text{жс}}(z)$ должна содержать нули $B^-(z)$, а $\Phi_\varepsilon(z) = 1 - \Phi_{\text{жс}}(z)$ - нули $C^-(z)$.

4.4.2 Методы синтеза дискретных САУ

Как и в случае непрерывных систем, возможны две постановки задачи синтеза дискретных систем управления:

1. синтез параметров при фиксированной структуре;

2. синтез управляющего устройства (ЦВМ) при произвольной структуре.

Типовые законы управления в дискретном случае определяются следующим образом.

Пропорциональный закон (П-регулятор):

$$W_{цвм}(z) = k_P$$

Пропорционально-суммарный закон (ПИ-регулятор):

$$W_{цвм}(z) = k_P + k_C \frac{z}{z-1}$$

Пропорционально-разностный закон (ПР-регулятор):

$$W_{цвм}(z) = k_P + k_P \frac{z-1}{z}$$

Пропорционально-суммарно-разностный закон (ПСП-регулятор):

$$W_{цвм}(z) = k_P + k_C \frac{z}{z-1} + k_P \frac{z-1}{z}$$

Задача синтеза систем с фиксированной структурой ставится следующим образом: задан объект и выбрана структура регулятора; требуется определить параметры регулятора, обеспечивающие заданные требования к качеству синтезируемой системы.

Структура регулятора определяется в основном из требований устойчивости и качеству синтезируемой системы в установившемся режиме. Параметры регулятора определяются исходя из требования к качеству системы в переходных режимах.

Задача синтеза системы при произвольной (не фиксируемой) структуре является многогранной и более сложной. В литературе нашли следующие методы и подходы.

А. Метод полиномиального синтеза .

В его основе лежит подход, предполагающий использование полиномиальных уравнений при поиске желаемой передаточной функции замкнутой системы с учетом требований условия физической реализуемости и условия грубости системы.

Б. Синтез с помощью билинейного преобразования.

Данный метод относится к приближенным методам и предполагает использование билинейного преобразования Тастина для преобразования дискретной передаточной функции в непрерывную. При этом в определенном диапазоне частот синтезируемую систему можно

рассматривать как псевдодискретную и использовать классические методы проектирования непрерывных регуляторов в том числе с использованием логарифмических частотных характеристик .

ЛЧХ для частотной передаточной функции строится в плоскости псевдочастоты, связанной с круговой частотой соотношением (4.15). При решении задачи синтеза учитываются ограничения: требуемая точность и запас устойчивости или показатель колебательности.

Выбрав требуемую коррекцию, можно определить передаточную функцию замкнутой непрерывной системы и ее импульсную переходную характеристику $k(iT) = k(t)|_{t=iT}$. По ней можно определить желаемую передаточную функцию дискретной системы

$$\Phi(z) = Z \{ k(iT) \}. \quad (4.34)$$

Далее определяется передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad (4.35)$$

С другой стороны, передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = W_{цвм}(z) \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} W_0(s) \right\}. \quad (4.36)$$

Выражения (4.35) и (4.36) позволяют определить передаточную функцию ЦВМ, то есть программу ее работы.

4.4.3. Рассмотрим более подробно методику полиномиального синтеза дискретной САУ по критерию быстродействия, когда основным является требование, чтобы выходной сигнал имел конечную и минимальную длительность.

Примем следующие обозначения:

$W_0(z)$ – передаточная функция неизменяемой части;

$D(z)$ – передаточная функция ЭВМ.

Тогда для передаточных функций разомкнутой и замкнутой системы можно записать:

$$W(z) = W_0(z)D(z),$$

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{W_0(z)D(z)}{1+W_0(z)D(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (4.37)$$

Если передаточные функции неизменяемой части и замкнутой системы известны, то из (4.37) следует:

$$D(z) = \frac{1}{W_0(z)} \frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)} = \frac{W(z)}{W_0(z)}. \quad (4.38)$$

Представим передаточную функцию неизменяемой части в следующем виде:

$$W_0(z) = \frac{B(z)}{C(z)} = \frac{B^-(z)B^+(z)}{C^-(z)C^+(z)}. \quad (4.39)$$

Полиномы с индексом “+” имеют все корни внутри круга единичного радиуса, а полиномы с индексом “-” вне этого круга. Операция представления передаточной функции в виде (4.39) называется факторизацией.

Условие грубости системы требует, чтобы передаточная функция желаемой замкнутой системы содержала в качестве своих нулей нули полинома $B^-(z)$, а передаточная функция $1-\Phi(z)$ в качестве своих нулей содержала нули полинома $C^-(z)$.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{B^-(z)M(z)}{Q(z)}; \\ 1-\Phi(z) &= \frac{C^-(z)N(z)}{Q(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Выбор полиномов $M(z)$, $N(z)$ и $Q(z)$ обеспечивают получение заданных качественных показателей процесса регулирования в дискретные моменты времени.

При необходимости получить конечную длительность процесса регулирования выбирают характеристический полином замкнутой системы в виде:

$$Q(z) = z^l, \quad (4.41)$$

где l - целое положительное число.

В силу выражений (4.36) и (4.37) можно получить

$$D(z) = \frac{C^+(z)M(z)}{B^+(z)N(z)},$$

$$W(z) = \frac{B^-(z)M(z)}{C^-(z)N(z)}.$$

Тогда для характеристического полинома замкнутой системы можно записать:

$$Q(z) = C^-(z)N(z) + B^-(z)M(z) = z^l. \quad (4.42)$$

Соблюдение принципа физической реализуемости обеспечивается, если

$$\|C^-(z)\| + \|N(z)\| \geq \|B^-(z)\| + \|M(z)\|. \quad (4.43)$$

Знак $\|\cdot\|$ означает порядок полинома. При произвольных полиномах $C^-(z)$ и $B^-(z)$ это условие выполняется, если

$$\left. \begin{aligned} \|N(z)\| &\geq \|B^-(z)\| \\ \|M(z)\| &\geq \|C^-(z)\| - 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Из (4.40) и (4.41) следует, что минимальный порядок желаемого характеристического полинома замкнутой системы

$$l_{min} = \|C^-(z)\| + \|B^-(z)\| \quad (4.45)$$

При избранных порядках полиномов $N(z)$ и $M(z)$ полиномиальное уравнение (4.39) решается разворачиванием его в систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов указанных полиномов путем приравнивания членов с одинаковыми степенями оператора z в левой и правой части исходного уравнения.

Выбор $l = l_{min}$ определяет процесс минимальной и конечной длительности. В этом случае число уравнений полученной системы равно числу неизвестных коэффициентов и она имеет единственное решение. Чаще всего при таком выборе длительности процесса синтезированная система не обладает достаточными запасами устойчивости и имеет высокое перерегулирование.

Для исключения этого явления есть два пути. Первый заключается в сохранении конечной длительности переходного процесса при увеличении времени регулирования путем выбора $l > l_{min}$. В этом случае система алгебраических уравнений содержит неизвестных больше, чем уравнений и имеет бесчисленное количество решений. Разность между числом уравнений и числом неизвестных равна величине увеличения порядка системы по сравнению с минимальным. Каких-либо общих рекомендаций по выбору “лишних” неизвестных коэффициентов дать невозможно. Одной из возможностей решения этой проблемы является наложение ограничений на коэффициенты числителя передаточной функции замкнутой системы. Для этого необходимо получить изображение переходной функции и выбрать ее значения исходя из требований к переходному процессу. Эти значения являются функциями коэффициентов полиномов $B^-(z)$ и $M(z)$. Таким способом иногда удается подобрать приемлемые значения “лишних” коэффициентов и затем решить систему уравнений относительно оставшихся коэффициентов полиномов $M(z)$ и $N(z)$. Решение задачи и в этом случае неоднозначно и при невозможности получить желаемый переходный процесс приходится еще более увеличивать порядок системы.

Второй путь заключается в отказе и от конечной длительности

переходного процесса. В этом случае характеристический полином замкнутой системы выбирается в следующем виде:

$$Q(z) = z^k (z - a)^{l-k}. \quad (4.46)$$

Величину перерегулирования и длительность переходного процесса, определяемую заданным временем регулирования, часто удается получить и при минимальном порядке системы путем надлежащего выбора величин a и k .

Пример. Рассмотрим структурную схему цифрового автомата стабилизации, в которой демпфирование осуществляется по аналоговому каналу.

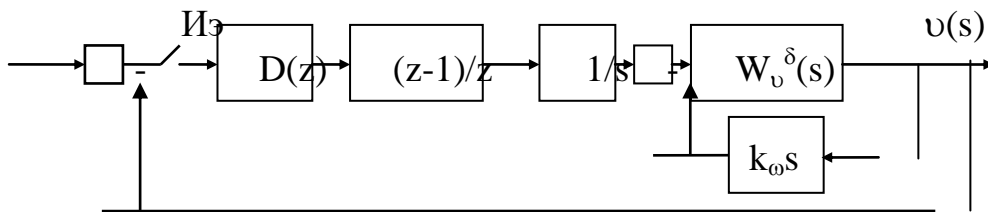


Рис 4.8. Структурная схема автомата стабилизации

Передаточная функция неизменяемой части определяется выражением

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{s} * \frac{W_g^\delta(s)}{1+k_\omega s W_g^\delta(s)} \right\}$$

При вычисленном выше коэффициенте демпфирования и заданных параметрах объекта получим

$$W_0(z) = \frac{1.495 * 10^{-2} (z^2 - 0.6397 z - 0.354)}{(z - 3.5 * 10^{-2})(z^2 - 2z + 1)}$$

Факторизация этой передаточной функции дает

$$P^+(z) = 11.495 * 10^{-2} (z^2 - 0.6397 z - 0.354);$$

$$P^-(z) = 1;$$

$$Q^+(z) = z - 3.5 * 10^{-2};$$

$$Q^-(z) = z^2 - 2z + 1.$$

В соответствии с приведенными выше соображениями $l_{min} = 2$. Для обеспечения минимальной длительности переходного процесса порядки полиномов $M(z)$ и $N(z)$ должны быть равны соответственно 1 и 0, т.е.

$$M(z) = m_0 z + m_1$$

$$N(z) = n_0.$$

Характеристический полином замкнутой системы примет вид

$$m_0 z + m_1 + (z^2 - 2z + 1)n_0 = z^2.$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях оператора z в левой и правой части получим

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= 1 \\ m_0 - 2n_0 &= 0 \\ m_1 + n_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $m_0 = 2, m_1 = -1$.

$$D(z) = \frac{C^+(z)}{B^+(z)} = \frac{2z-1}{1};$$

$$W(z) = \frac{2z-1}{z^2 - 2z + 1};$$

$$\Phi(z) = \frac{2z-1}{z^2}.$$

Переходный процесс в такой системе имеет вид, показанный на рисунке 4.9.

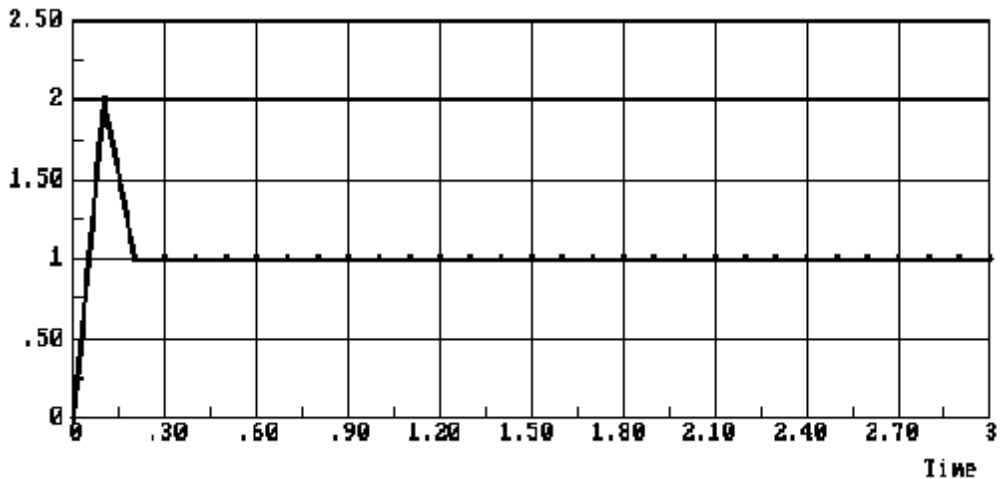


Рис.4.9.Переходный процесс минимальной и конечной длительности
Процесс действительно заканчивается на втором такте, но имеет очень большое перерегулирование.

Для повышения качества системы увеличим порядок ее до 4. На столько же возрастут порядки полиномов $M(z)$ и $N(z)$, т.е. получим, что $m=3, n=2$. Характеристический полином примет вид

$$m_0 z^3 + m_1 z^2 + m_2 z + m_3 + (n_0 z^2 + n_1 z + n_2)(z^2 - 2z + 1) = z^4.$$

Соответствующая система алгебраических уравнений будет

$$m_0 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} m_0 + n_1 &= 2 \\ m_1 - 2n_1 + n_2 &= -1 \\ m_2 + n_1 - 2n_2 &= 0 \\ m_3 + n_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

В системе 4 уравнения и 6 неизвестных. Зададим значения двух неизвестных, например, $n_1 = 0.8, n_2 = 0.4$. Тогда решение относительно неизвестных коэффициентов будет: $m_0 = 1.2, m_1 = 0.2, m_2 = 0, m_3 = -0.4$.

Переходный процесс в замкнутой системе при таком выборе порядка характеристического полинома показан на рисунке 4.10. Переходный процесс заканчивается на четвертом такте, но все еще имеет высокое перерегулирование (40%) и существенно уменьшить его подбором коэффициентов затруднительно.

Выберем теперь характеристический полином замкнутой системы в виде

$$Q(z) = (z - a)^l.$$

Выберем минимальный порядок системы $l = l_{min} = 2$ и выберем произвольно $a = 0.6$. Составив и решив систему алгебраических уравнений, получим

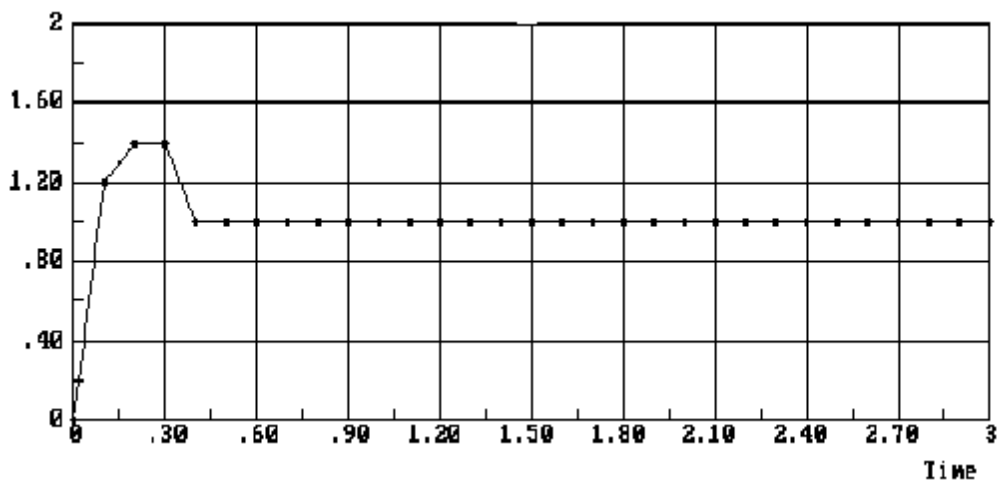


Рис.4.10.Переходный процесс конечной, но не минимальной длительности

$$n_0 = 1, \quad m_0 = 0.3, \quad m_1 = -0.2775.$$

Вычислив передаточную функцию, получим переходный процесс (рис.4.11).

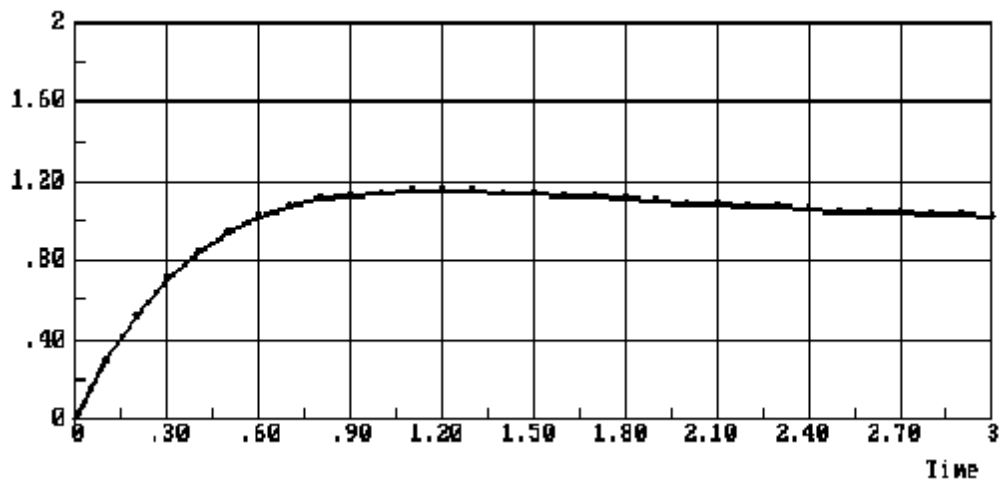


Рис.4.11.Переходный процесс не минимальной и неконечной длительности
Показатели качества такой системы ($\sigma=16\%$, $t_p=2.7c$) вполне приемлемы.

4.5 Операционные методы цифрового моделирования дискретно – непрерывных систем.

Для исследования дискретно – непрерывных САУ получило широкое распространено моделирование их динамики на ЦВМ. В основе математической модели для ее программирования используются системы в форме разностных уравнений. Разностное уравнение (уравнение в конечных разностях) является аналогом дифференциальных уравнений в дискретной области, и основываются на понятие конечной разности. Аналогом первой производной непрерывной функции для решетчатой функции является либо первая прямая разность

$$\Delta(iT) = x(iT + T) - x(iT)$$

либо первая обратная разность

$$\triangleleft(iT) = x(iT) - x(iT - T).$$

Прямая разность определяется в момент $t = iT$ по будущему значению решетчатой функции $t = (i + 1)T$, обратная разность определяется в момент $t = iT$ по прошлому значению решетчатой функции $t = (i - 1)T$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для решетчатой функции является вторая прямая и обратная разность:

$$\begin{aligned} \Delta^2(iT) &= \Delta(iT + T) - \Delta(iT) = \\ &= x(iT + 2T) - 2x(iT + T) + x(iT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^2(iT) &= \triangleleft(iT) - \triangleleft(iT - T) = \\ &= x(iT) - 2x(iT - T) + x(iT - 2T) \end{aligned}$$

Аналогично определяются и высшие прямая и обратная разности. Запишем для общего случая «к»-тую разность:

$$\Delta^k x(iT) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j x((i+k-j)T)$$

$$\triangleleft^k x(iT) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j x((i-j)T)$$
(4.47)

Где C_j^k -биномиальные коэффициенты:

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Формально переход от дифференциального уравнения к разностному уравнению осуществляется путем замены производных конечными разностями в соответствии с выражениями (4.47), при этом, если воспользоваться обратной разностью получим:

$$\frac{dx^{(k)}(t)}{dt^k} = \frac{\triangleleft^k(iT)}{T^k},$$
(4.48)

Пусть дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \dots + a_n x(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{(m-1)} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f(t).$$

Подставив вместо производных выражения вида (4.48) и учитывая формулу конечных разностей, после преобразований получим

$$a_0^* x(iT - nT) + a_1^* x(iT - (n-1)T) + \dots + a_n^* x(iT) =$$

$$= T^{n-m} (b_0^* f(iT - mT) + \dots + b_m^* f(iT)).$$
(4.49)

Это и есть уравнение системы в конечных разностях. В этом уравнении

$$a_j^* = f(a_0, \dots, a_n, T), \quad b_j^* = f(b_0, \dots, b_m, T).$$

Разностное уравнение дает возможность получить рекуррентную формулу для вычисления для вычисления i – того значения выходной величины по ее прошлым значениям и значениям входной величины

$$x(iT) = \frac{1}{a_n^*} \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j^* x(iT - (n-j)T) + \\ T^{n-m} \sum_{j=0}^m b_j^* f(iT - (m-j)T) \end{array} \right\}.$$
(4.50)

Рекуррентное выражение легко программируется для вычислений на ЦВМ. Недостатком такой математической модели является то, что начальное

значение выходной величины не равно нулю: $x(0) = \frac{T^{n-m} b_m^* f(0)}{a_n^*}$. При

малых значениях периода дискретизации эта ошибка невелика, и ею можно пренебречь. С увеличением числа тактов вычислений ошибка дискретной модели непрерывной системы быстро уменьшается. Начальную ошибку можно исключить ее вычитанием из правой части (4.49) при $i=0$.

Применив Z – преобразование к (4.49) и учитывая теорему запаздывания, получим передаточную Z – функцию непрерывной системы

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{T^{n-m} (b_0^* z^{-m} + b_1^* z^{-(m-1)} + \dots + b_m^*)}{a_0^* z^{-n} + a_1^* z^{-(n-1)} + \dots + a_n^*} \quad (4.51)$$

$$= \frac{T^{n-m} z^{2(n-m)} (b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_0^*)}{a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_0^*}.$$

Важным обстоятельством является то, что при имитационном моделировании операцию преобразования дифференциального уравнения в разностное можно применить отдельно к каждому элементу непрерывной части системы и полученные уравнения включить в общую систему разностных уравнений, моделирующую дискретно – непрерывную САУ.

Пример. Рассмотрим непрерывную линейную систему второго порядка, описываемую известной передаточной функцией :

$$W(s) = \frac{1}{T_g^2 s^2 + 2T_g \zeta s + 1}.$$

Требуется получить соответствующее разностное уравнение. При $T_g = 0.5$ и $\zeta = 0.3$ переходная функция непрерывного элемента имеет вид, показанный на рис.4.12.



Рис.4.12. Переходная функция непрерывного элемента

При заданных значениях параметров путем, описанных выше преобразований, получим разностное уравнение для $T=0.1$

$$0.29x(iT) - 0.53x(iT - T) + 0.25x(iT - 2T) = T^2 f(iT).$$

Отсюда для рекуррентного выражения можно записать

$$x(iT) = -0.862x(iT - 2T) + 1.828x(iT - T) + 0.034 f(iT).$$

Производя вычисления по полученной рекуррентной формуле с учетом вычитания начальной ошибки при $i=0$, получим для $f(t)=1(t)$ и $T=0.1$ переходную функцию, показанную на рис.4.13. Сопоставляя ординаты процессов,



Рис.8.13. Переходная функция непрерывного элемента, вычисленная по разностному уравнению

приведенных на рис.4.12 и 4.13 в точках квантования по времени, легко убедиться, что уже после пятого шага вычислений отличие дискретного процесса от точного не превышает 5%. Совершенно аналогичный результат получим, если для построения переходного процесса использовать передаточную функцию вида (4.51), предварительно умноженную на z^{-1} для обеспечения выполнения условия $x(0)=0$.

Рассмотрим задачу определения моделирующего разностного уравнения при заданной передаточной функции дискретной системы в виде Z – изображений.

Допустим, что каким – либо способом получена передаточная функция вычислительной машины и требуется получить для программирования соответствующее разностное уравнение.

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n}. \quad (4.52)$$

Разделим числитель и знаменатель в (4.52) на $d_0 z^n$. Получим

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{b_0^* z^{m-n} + b_1^* z^{m-n-1} + \dots + b_m^* z^{-n}}{1 + d_1^* z^{-1} + d_2^* z^{-2} + \dots + d_n^* z^{-n}}.$$

В этом выражении $b_i^* = \frac{b_i}{d_0}$, $d_i^* = \frac{d_i}{d_0}$.

Из полученного следует

$$(1 + d_1^* z^{-1} + d_2^* z^{-2} + \dots + d_n^* z^{-n})X(z) = (b_0^* z^{m-n} + \dots + b_m^* z^{-n})F(z).$$

Переходя к оригиналам, с учетом теоремы запаздывания, получим

$$x(iT) = - \sum_{j=1}^n d_j^* x(iT - jT) + \sum_{j=0}^m b_j^* f(iT + mT - (n - j)T) \quad (4.53)$$

Это и есть рекуррентная формула для вычисления дискретных значений выходной величины.

Очень часто дискретно – непрерывная система задана в виде структурной схемы и желательно получить разностные уравнения непрерывных динамических звеньев непосредственно по их передаточным функциям. Для этой цели нашли методы подстановки, связанные с заменой $s = f(z)$. При этом должны выполняться следующие требования:

1) если непрерывная передаточная функция $W(s)$ соответствует устойчивой системе, то и полученная передаточная функция $W(z)$ должна определять устойчивую систему;

2) способ должен допускать возможность отдельного применения к звеньям структурной схемы;

3) для постоянных сигналов коэффициент усиления дискретной цепи должен соответствовать тем же значениям коэффициента усиления непрерывной цепи.

Перечисленным требованиям наиболее полно удовлетворяет подстановка Тастина

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (4.54)$$

Подстановка Тастина дает хорошие результаты при $T \ll T_i$, где T_i – основная постоянная времени непрерывной системы. Этим требованиям не всегда удастся удовлетворить и в таких случаях можно использовать модифицированную подстановку Тастина

$$s = \frac{w}{tg \frac{wT}{2}} \frac{z-1}{z+1}. \quad (4.55)$$

При неизменном значении периода дискретизации удовлетворительное соответствие динамики непрерывной системы с ее дискретной моделью иногда можно получить подбором параметра Тастина w . Полученная подстановкой Z – передаточная функция описанным выше способом преобразуется в рекуррентную формулу.

Для получения дискретной модели непрерывной системы можно использовать метод подбора корня, который заключается в выполнении следующих операций:

- 1) определение нулей и полюсов передаточной функции непрерывной системы;
- 2) отображение нулей и полюсов s – плоскости в z – плоскости, используя соотношения

$$z_{\text{полюс}} = e^{s_{\text{полюс}}T}; \quad z_{\text{нуль}} = e^{s_{\text{нуль}}T}.$$

- 1) образование полиномов Z – передаточной функции с полюсами и нулями, определенными в п.2;
- 2) определение конечного значения реакции непрерывной системы на единичное ступенчатое воздействие;
- 3) определение конечного значения реакции дискретной системы на единичное ступенчатое воздействие;
- 4) подбор конечного значения дискретной системы в соответствии с конечным значением непрерывной системы введением постоянной в передаточную функцию, образованную в п.3;
- 5) добавление нулей в передаточную функцию дискретной системы до получения $m = n - 1$.
- б) Определение моделирующего разностного уравнения.

Для использования рассмотренного способа непрерывная система должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) быть асимптотически устойчивой и удовлетворять теореме о конечном значении;
- 2) конечное значение не должно равняться нулю.

Пример. Методом подбора корня получить разностное уравнение для моделирования на ЦВМ непрерывной системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{0.25s^2 + 0.3s + 1}.$$

Параметры передаточной функции те же, что и в предыдущем примере. Нулей передаточная функция не имеет, а полюсы комплексно сопряженные и равные $\alpha \pm j\beta$, где $\alpha = -0.6$, $\beta = 1.908$. Передаточную функцию моделирующей дискретной системы запишем в виде

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{0.25(z - e^{(\alpha + j\beta)T})(z - e^{(\alpha - j\beta)T})}.$$

После преобразований и умножения на пока неизвестный коэффициент k , получим

$$W(z) = \frac{4k}{z^2 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T + e^{2\alpha T}}.$$

Конечное значение реакции непрерывной системы на единичное ступенчатое воздействие будет

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) \frac{1}{s} = 1.$$

Конечное значение реакции дискретной системы на то же воздействие определится как

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W(z) \frac{z}{z-1} = \frac{4k}{1 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T + e^{2\alpha T}}.$$

Для того, чтобы конечные значения реакций непрерывной и дискретной систем были равны, коэффициент k должен быть равен

$$k = \frac{1 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T + e^{2\alpha T}}{4} = 0.009393.$$

Подставив коэффициент усиления, а так же значения α и β и дополнив передаточную функцию дискретной системы одним нулем, получим

$$W(z) = \frac{0.037572 z}{z^2 - 1.849 z + 0.887}$$

По этой передаточной функции можно получить моделирующее разностное уравнение и рекуррентную формулу, по которой и рассчитан переходный процесс, показанный на рис.4.14.

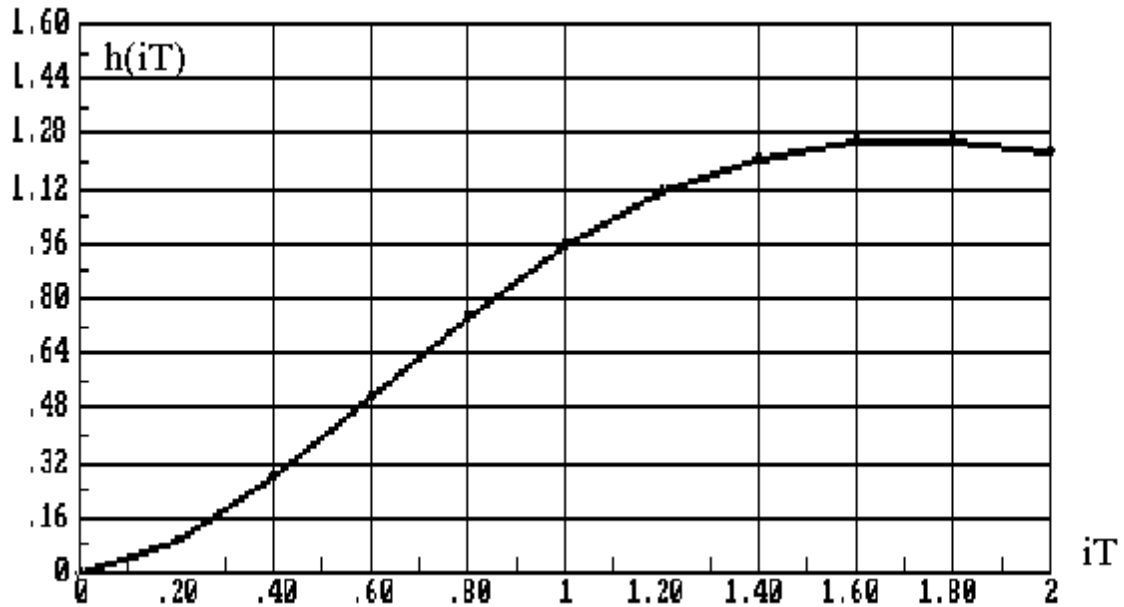


Рис.4.14. Переходный процесс, полученный при использовании метода подбора корня

Полученная переходная функция с достаточно высокой точностью соответствует переходной функции исходной непрерывной системы.