Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Кафедра физики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ по физике
с использованием программного комплекса
«Виртуальная лаборатория физики»
для студентов всех специальностей
дневной и заочной форм обучения

Часть 1. Механика и молекулярная физика

Составитель: А.П.Зубарев

Самара 2021

УДК 537
Методические указания к выполнению лабораторных работ по физике с использованием программного комплекса «Виртуальная лаборатория физики» для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения [Текст] / Составитель: Зубарев А.П., - Самара: Самарский университет, 2021. – 1135 с.

Содержит введение в измерительный практикум. Приведены краткие теоретические сведения, описания, методические указания, способы оценок погрешностей при выполнении лабораторных работ.

Составитель: А.П.Зубарев

Рецензенты:

Редактор:
Компьютерная верстка:
Подписано в печать
Формат 64x90 1/16
Бумага писчая. Печать оперативная. Усл. п.л. 8,25
Тираж 250. Заказ №

Лабораторная работа 1.0
Изучение теории обработки результатов измерений. Обработка результатов измерений на примере определения плотности твердых тел правильной геометрической формы

Часть 1. Изучение теории обработки результатов измерений.

1. Абсолютная и относительная ошибки

Никакую физическую величину невозможно измерить абсолютно точно: как бы тщательно ни был поставлен опыт, измеренное значение величины x будет отличаться от ее истинного значения X. Разность между этими значениями представляет собой ***абсолютную ошибку*** (или *абсолютную погрешность**) измерения Δx:

$$\Delta x = x - X. \tag{1.1}$$

Абсолютная погрешность является размерной величиной: она выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина (например, абсолютная погрешность измерения длины выражается в метрах, силы тока – в амперах и т.д.). Как следует из выражения (1.1), Δx может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Хотя величина Δx показывает, насколько измеренное значение отличается от истинного, одной лишь абсолютной ошибкой нельзя полностью характеризовать точность проделанного измерения. Пусть, например, известно, что абсолютная погрешность измерения расстояния равна 1 *м*. Если измерялось расстояние между географическими пунктами (порядка нескольких километров), то точность такого измерения следует признать весьма высокой; если же измерялись размеры помещения (не превышающие десятка метров), то измерение является грубым. Для характеристики точности существует понятие ***относительной ошибки*** (или *относительной погрешности*) E, представляющей собой отношение модуля абсолютной ошибки к истинному значению измеряемой величины:

$$E = \frac{|\Delta x|}{X}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что относительная погрешность – величина безразмерная, чаще всего ее выражают в процентах.

При определении ошибок измерений важно иметь в виду следующее. Выражения (1.1) и (1.2) содержат истинное значение измеряемой величины X, которое точно знать невозможно. Поэтому значения Δx и E в принципе не могут быть рассчитаны точно. Можно лишь *оценить* эти значения, т.е. найти их приближенно с той или иной степенью достоверности. Поэтому

* Термины «ошибка» и «погрешность» применительно к измерениям имеют один и тот же смысл.

все расчеты, связанные с определением погрешностей, должны носить приближенный (оценочный) характер.

2. Случайные и приборные погрешности

Разнообразные ошибки, возникающие при измерениях, можно классифицировать как по их происхождению, так и по характеру их проявления.

По происхождению ошибки делятся на инструментальные и методические.

Инструментальные погрешности обусловлены несовершенством применяемых измерительных приборов и приспособлений. Эти погрешности могут быть уменьшены за счет применения более точных приборов. Так, размер детали можно измерить линейкой или штангенциркулем. Очевидно, что во втором случае ошибка измерения меньше, чем в первом.

Методические погрешности возникают из-за того, что реальные физические процессы всегда в той или иной степени отличаются от их теоретических моделей. Например, формула для периода колебаний математического маятника в точности верна лишь при бесконечно малой амплитуде колебаний; формула Стокса, определяющая силу трения при движении шарика в вязкой жидкости, справедлива только в случае идеально сферической формы и т.д. Обнаружить и учесть методическую погрешность можно путем измерения той же величины совершенно иным независимым методом.

По характеру проявления ошибки бывают систематические и случайные.

Систематическими называют такие ошибки, значения которых при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по определенному закону. Систематическая погрешность может быть обусловлена как приборами, так и методикой измерения. Она имеет две характерные особенности. Во-первых, систематическая погрешность всегда либо положительна, либо отрицательна и не меняет своего знака от опыта к опыту. Во-вторых, систематическую погрешность нельзя уменьшить за счет увеличения числа измерений. Например, если при отсутствии внешних воздействий стрелка измерительного прибора показывает величину x_0, отличную от нуля, то во всех дальнейших измерениях будет присутствовать систематическая ошибка, равная x_0.

Случайные ошибки – это ошибки, значения которых изменяются непредсказуемым образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайная ошибка также может быть как инструментальной, так и методической. Причину ее появления установить трудно, а чаще всего – невозможно (это могут быть различные помехи, случайные толчки, вибрации, неверно взятый отсчет по прибору и т.д.). Случайная погрешность бывает и положительной и отрицательной, причем непредсказуемо изменяет свой знак от опыта к опыту. Значение ее можно уменьшить путем увеличения числа измерений.

Детальный анализ погрешностей измерения представляет собой сложную задачу, для решения которой не существует единого рецепта. Поэтому в каждом конкретном случае этот анализ проводят по-разному. Однако, в первом приближении, если исключена систематическая ошибка, то остальные можно условно свести к следующим двум видам: приборная и случайная.

Приборной погрешностью в дальнейшем будем называть систематическую ошибку, обусловленную измерительными приборами и приспособлениями, а ***случайной*** – ошибку, причина появления которой неизвестна. Приборную погрешность измерения величины x будем обозначать как δx, случайную – как $\Delta_s x$.

3. Оценка случайной погрешности. Доверительный интервал

Методика оценки случайной погрешности основана на положениях теории вероятностей и математической статистики. Оценить случайную ошибку можно только в том случае, когда проведено неоднократное измерение одной и той же величины.

Пусть в результате проделанных измерений получено n значений величины x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через $\bar{x}$ среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{1.3}$$

В теории вероятностей обосновывается, что при увеличении числа измерений n среднеарифметическое значение измеряемой величины приближается к ее истинному значению:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x} = X.$$

При небольшом числе измерений ($n \le 10$) среднее значение может существенно отличаться от истинного. Для того, чтобы знать, насколько точно значение $\bar{x}$ характеризует измеряемую величину, необходимо определить так называемый доверительный интервал полученного результата.

Поскольку абсолютно точное измерение невозможно, то вероятность правильности утверждения «*величина x имеет значение, в точности* равное $\bar{x}$» равна нулю. Вероятность же утверждения «*величина x имеет какое-либо значение*» равна единице. Таким образом, вероятность правильности любого промежуточного утверждения лежит в пределах от 0 до 1. Цель измерения – найти такой интервал, в котором с наперед заданной вероятностью α ($0 < \alpha < 1$) находится истинное значение измеряемой величины. Этот интервал называется ***доверительным интервалом***, а неразрывно связанная с ним величина α называется ***доверительной вероятностью*** (или *коэффициентом надежности*). За середину интервала принимается среднее значение, рассчитанное по формуле (1.3). Половина ширины доверительного интервала (или *полуширина* доверительного интервала) представляет собой случайную погрешность $\Delta_s x$ (рис. 1.1).

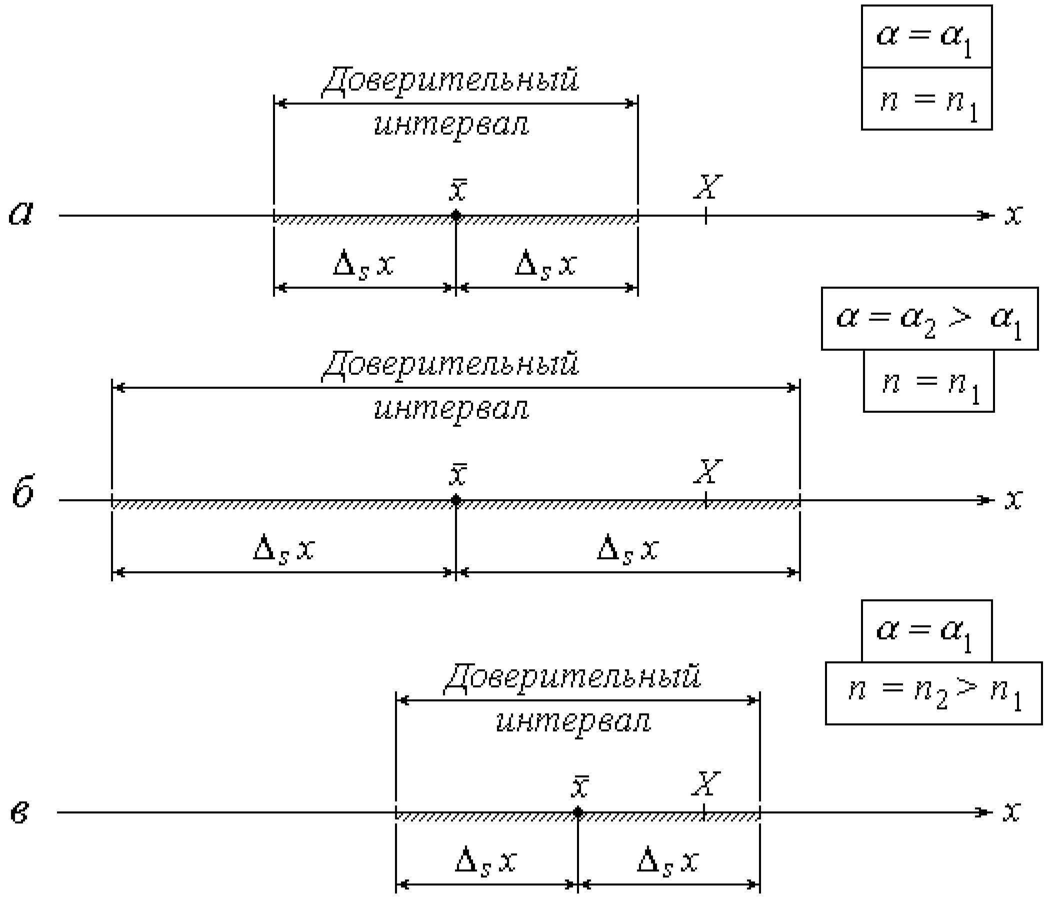


Рис.1.1

Очевидно, что ширина доверительного интервала (а следовательно, и ошибка $\Delta_s x$) зависит от того, насколько сильно отличаются отдельные измерения величины x_i от среднего значения $\bar{x}$. «Разброс» результатов измерений относительно среднего характеризуется *среднеквадратичной* (или *средней квадратичной*) *ошибкой* σ, которую находят по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}\,, \qquad (1.4)$$

где $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$. При этом полуширина искомого доверительного интервала прямо пропорциональна среднеквадратичной ошибке:

$$\Delta_s x = t_{n,\alpha} \cdot \sigma\,. \qquad (1.5)$$

Коэффициент пропорциональности $t_{n,\alpha}$ называется *коэффициентом Стьюдента* и он зависит от числа опытов n и доверительной вероятности α.

На рис. 1.1, *а, б* наглядно показано, что при прочих равных условиях для увеличения вероятности попадания истинного значения в доверительный интервал необходимо увеличить ширину последнего (вероятность «накрывания» значения X более широким интервалом выше). Следовательно, величина $t_{n,\alpha}$ должна быть тем больше, чем выше доверительная вероятность α.

С увеличением количества опытов среднее значение приближается к истинному; поэтому при той же вероятности α доверительный интервал можно взять более узким (см. рис. 1.1, *а, в*). Таким образом, с ростом n коэффициент Стьюдента должен уменьшаться. Таблица значений коэффициента Стьюдента в зависимости от n и α дана в таблице 1.1:

Таблица 1.1

Значения коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$

Число измерений n	Доверительная вероятность α			
	0,9	0,95	0,99	0,999
2	6,31	12,71	63,7	636,6
3	2,92	4,30	9,92	31,6
4	2,35	3,18	5,84	12,94
5	2,13	2,77	4,60	8,61
6	2,02	2,57	4,03	6,86
7	1,943	2,45	3,71	5,96
8	1,895	2,36	3,50	5,40
9	1,860	2,31	3,36	5,04
10	1,833	2,26	3,25	4,78
11	1,812	2,23	3,17	4,59
12	1,796	2,20	3,11	4,49
13	1,782	2,18	3,06	4,32
14	1,771	2,16	3,01	4,22
15	1,761	2,14	2,98	4,14
16	1,753	2,13	2,95	4,07
17	1,746	2,12	2,92	4,02
18	1,740	2,11	2,90	3,96
19	1,734	2,10	2,88	3,92
20	1,729	2,09	2,86	3,88
21	1,725	2,09	2,85	3,84
22	1,721	2,08	2,83	3,82
23	1,717	2,07	2,82	3,79
24	1,714	2,07	2,81	3,77
25	1,711	2,06	2,80	3,75
…	…	…	…	…
∞	1,645	1,960	2,58	3,29

Следует отметить, что доверительная вероятность никак не связана с точностью результата измерений. Величиной α задаются заранее, исходя из требований к их надежности. В большинстве технических экспериментов и в лабораторном практикуме значение α принимается равным 0,95.

Расчет случайной погрешности измерения величины x проводится в следующем порядке:

1) вычисляется сумма измеренных значений, а затем – среднее значение величины $\bar{x}$ по формуле (1.3);

2) для каждого i-го опыта рассчитываются разность между измеренным и средним значениями $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, а также квадрат этой разности (отклонения) $(\Delta x_i)^2$;

3) находится сумма квадратов отклонений, а затем – среднеквадратичная ошибка σ по формуле (1.4);

4) по заданной доверительной вероятности α и числу проведенных опытов n из таблицы приложения выбирается соответствующее значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ и определяется случайная погрешность $\Delta_s x$ по формуле (1.5).

Для удобства расчетов и проверки промежуточных результатов данные заносятся в таблицу, три последних столбца которой заполняются по образцу табл. 1.2.

Таблица 1.2

Номер опыта i	x_i	$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	$(\Delta x_i)^2$
1	…	…	…
2	…	…	…
3	…	…	…
…	…	…	…
n	…	…	…
	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = ...$		$\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 = ...$

В каждом конкретном случае величина x имеет определенный физический смысл и соответствующие единицы измерения. Это может быть, например, ускорение свободного падения g (*м/с*^{2}), коэффициент вязкости жидкости η (*Па·с*) и т.д. Пропущенные столбцы табл. 1 могут содержать промежуточные измеряемые величины, необходимые для расчета соответствующих значений x.

Пример. Для определения ускорения a движения тела измерялось время t прохождения им пути S без начальной скорости. Используя известное соотношение $S = \dfrac{at^2}{2}$, получим расчетную формулу

$$a = \frac{2S}{t^2}. \qquad (1.6)$$

Результаты измерений пути S и времени t приведены во втором и третьем столбцах табл. 1.3. Проведя вычисления по формуле (1.6), заполним четвертый столбец значениями ускорения a_i , а затем рассчитаем среднее значение $\bar{a}$ по формуле (1.3), которое запишем под этим столбцом.

$$\bar{a} = \frac{8{,}11}{4} \approx 2{,}03 (м/с^2).$$

Таблица 1.3

Номер опыта	S, *м*	t, *с*	a_i, *м/с*^{2}	$\Delta a_i = a_i - \bar{a}$, *м/с*^{2}	$(\Delta a_i)^2$, (*м/с*^{2})^2
1	5	2,20	2,07	0,04	0,0016
2	7	2,68	1,95	-0,08	0,0064
3	9	2,91	2,13	0,10	0,0100
4	11	3,35	1,96	-0,07	0,0049
			$\bar{a} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i = 2{,}03$		$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2 =$ =0,0229

Вычитая из каждого значения a_i среднее, найдем разности Δa_i и занесем их в пятый столбец таблицы. Возводя эти разности в квадрат, заполним последний столбец. Затем рассчитаем сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$ и запишем ее в ячейку под под последним столбцом. По формуле (1.4) определим среднеквадратичную погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0229}{4(4-1)}} \approx 0{,}0437 (м/с^2).$$

Задавшись величиной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$, для числа опытов $n = 4$ из таблицы 1.1 выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ = 3,18; с помощью формулы (1.5) оценим случайную погрешность измерения ускорения

$$\Delta_s a = t_{n,\alpha} \cdot \sigma = 3{,}18 \cdot 0{,}0437 \approx 0{,}139 \ (м/с^2).$$

4. Способы определения приборных ошибок

Основными характеристиками измерительных приборов являются предел измерения и цена деления, а также – главным образом для электроизмерительных приборов – класс точности.

Предел измерения П – это максимальное значение величины, которое может быть измерено с помощью данной шкалы прибора. Если предел измерения не указан отдельно, то его определяют по оцифровке шкалы. Так, если рис. 1.2 изображает шкалу миллиамперметра, то его предел измерения равен 100 *мА*.

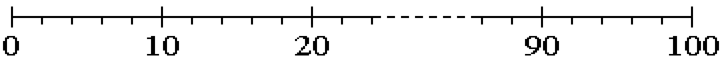


Рис. 1.2

Цена деления Ц – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы. Если шкала начинается с нуля, то

$$Ц = \frac{П}{N},$$

где N – общее количество делений (например, на рис. 1.2 $N = 50$). Если эта шкала принадлежит амперметру с пределом измерения 5 *А*, то цена деления равна 5/50 = 0,1 (*А*). Если шкала принадлежит термометру и проградуирована в °*C*, то цена деления $Ц$ = 100/50 = 2 (°*C*). Многие электроизмерительные приборы имеют несколько пределов измерения. При переключении их с одного предела на другой изменяется и цена деления шкалы.

Класс точности К представляет собой отношение абсолютной приборной погрешности к пределу измерения шкалы, выраженное в процентах:

$$К = \frac{\delta x}{П} \cdot 100 \cdot \qquad (1.7)$$

Значение класса точности (без символа «%») указывается, как правило, на электроизмерительных приборах.

В зависимости от вида измерительного устройства абсолютная приборная погрешность определяется одним из нижеперечисленных способов.

1. Погрешность указана непосредственно на приборе. Так, на микрометре есть надпись «0,01 мм». Если с помощью этого прибора измеряется, например, диаметр шарика D (лабораторная работа 1.2), то погрешность его измерения δD = 0,01 *мм*. Абсолютная ошибка указывается обычно на жидкостных (ртутных, спиртовых) термометрах, штангенциркулях и др.

2. На приборе указан класс точности. Согласно определению этой величины, из формулы (1.7) имеем

$$\delta x = \frac{К \cdot П}{100} \quad . \qquad (1.8)$$

Например, для вольтметра с классом точности 2,5 и пределом измерения 600 *В* абсолютная приборная ошибка измерения напряжения

$$\delta U = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100} = 15\,(B).$$

3. Если на приборе не указаны ни абсолютная погрешность, ни класс точности, то в зависимости от характера работы прибора возможны два способа определения величины δx:

а) указатель значения измеряемой величины может занимать только определенные (дискретные) положения, соответствующие делениям шкалы (например, *электронные часы, секундомеры, счетчики импульсов* и т.п.). Такие приборы являются *приборами дискретного действия*, и их абсолютная погрешность равна *цене деления шкалы*: δx = *Ц*. Так, при измерении промежутка времени t секундомером с ценой деления 0,2 *с* погрешность δt = 0,2 *с*;

б) указатель значения измеряемой величины может занимать любое положение на шкале (*линейки, рулетки, стрелочные весы, термометры* и т.п.). Такие приборы являются *приборами непрерывного действия.* В этом случае абсолютная приборная погрешность равна *половине цены деления шкалы*: δx = *Ц*/2. Точность снимаемых показаний прибора не должна превышать его возможностей. Например, при показанном на рис. 1.3 положении стрелки прибора следует записать либо 62,5 либо 63,0 – в обоих случаях ошибка не превысит половины цены деления. Записи же типа 62,7 или 62,8 не имеют смысла.

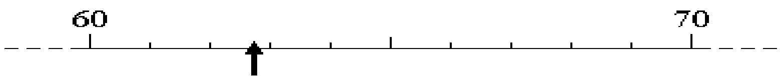


Рис. 1.3

4. Если какая-либо величина не измеряется в данном опыте, а была измерена независимо и известно лишь ее значение, то она является *заданным параметром*. Так, в работе 2.1 по определению коэффициента вязкости воздуха такими параметрами являются размеры капилляра, в опыте Юнга по интерференции света (работа 5.1) – расстояние между щелями и т.д. Погрешность заданного параметра принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этого параметра. Например, если радиус капилляра r задан с точностью до сотых долей миллиметра, например, $r = 0{,}32$ мм, то его погрешность δr = 0,005 *мм*.

5. Погрешности косвенных измерений

В большинстве физических экспериментов искомая величина u не измеряется непосредственно каким-либо одним прибором, а рассчитывается на основе измерения ряда промежуточных величин $x, y, z, \ldots$ Расчет проводится по определенной формуле, которую в общем виде можно записать как

$$u = u(x, y, z, \dots). \qquad (1.9)$$

В этом случае говорят, что величина u представляет собой результат *косвенного измерения* в отличие от $x, y, z, \dots$, являющихся результатами *прямых измерений*.

Абсолютная погрешность косвенного измерения δu зависит от погрешностей прямых измерений δx, δy, $\delta z \dots$ и от вида функции (1.9). Как правило, величину δu можно оценить по формуле вида

$$\delta u = \sqrt{(k_x \delta x)^2 + (k_y \delta y)^2 + (k_z \delta z)^2 + \dots}, \qquad (1.10)$$

где коэффициенты k_x, k_y, $k_z, \dots$ определяются видом зависимостей величины u от x, y, $z, \dots$ представляют собой частные производные функции $u(x, y, z, \dots)$ по переменным $x, y, z, \dots$ соответственно:

$$k_x = \frac{\partial u(x, y, z, \dots)}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial u(x, y, z, \dots)}{\partial y}, \quad k_z = \frac{\partial u(x, y, z, \dots)}{\partial z}, \ \dots \qquad (1.11)$$

Приведенная ниже табл. 1.4 позволяет найти эти коэффициенты для наиболее распространенных элементарных функций (a, b, c, n – заданные константы).

Таблица 1.4

$u(x)$	$k_x = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x}$
$a\,x^n$	$a\,n\,x^{n-1} = n \cdot \dfrac{u}{x}$
$a \sin(bx)$	$ab \cos(bx)$
$a \cos(bx)$	$ab \sin(bx)$
$a \operatorname{tg}(bx)$	$\dfrac{ab}{\cos^2(bx)} = \dfrac{2bu}{\sin(2bx)}$
$a\,b^{cx}$	$u\,c \ln(b)$
$a \ln(bx)$	$\dfrac{ab}{x}$

На практике зависимость (1.9) чаще всего имеет вид степенной функции

$$u(x, y, z, \dots) = C \cdot x^k \cdot y^m \cdot z^n \cdot \dots,$$

показатели степеней которой k, m, $n, \dots$ – вещественные (положительные или отрицательные, целые или дробные) числа; C – постоянный коэффициент. В этом случае абсолютная погрешность δu оценивается по формуле

$$\delta u = \bar{u} \sqrt{(kE_x)^2 + (mE_y)^2 + (nE_z)^2 + \dots}, \qquad (1.12)$$

где $\bar{u}$ – среднее значение величины и; $E_x = \dfrac{\delta x}{x}, E_y = \dfrac{\delta y}{y}, E_z = \dfrac{\delta z}{z},...$ – относительные погрешности прямых измерений величин x, y, z,… Для подстановки в формулу (1.12) выбираются *средние значения величин x, y, z, а если они не известны, то наиболее представительные значения этих величин, близкие к их средним значениям.*

При расчетах по формулам типа (1.12) необходимо помнить следующее.

1. Измеряемые величины и их абсолютные погрешности (например, x и δx) должны быть выражены в одних и тех же единицах.

2. Расчеты не требуют высокой точности вычислений и должны иметь оценочный характер. Так, входящие в подкоренное выражение и возводимые в квадрат величины (kE_x, mE_y, nE_z,…) обычно округляются с точностью до двух или трех значащих цифр (напомним, что ноль является значащей цифрой только тогда, когда перед ним слева есть хотя бы одна цифра, отличная от нуля). Далее, если одна из этих величин (например, $|kE_x|$) по модулю превышает наибольшую из остальных ($|mE_y|$, $|nE_z|$,…) более чем в три раза, то можно, не прибегая к вычислениям по формуле (1.12), принять абсолютную ошибку равной $\delta u \approx \bar{u}\left|kE_x\right|$. Если же одна из них более чем в три раза меньше наименьшей из остальных, то при расчете по формуле (1.12) ею можно пренебречь.

Пример. Пусть при определении ускорения тела путь S измерялся рулеткой с ценой деления 1 *мм*, а время t – электронным секундомером. Определим приборную погрешность косвенного измерения. В соответствии с изложенными правилами, приборные погрешности прямых измерений будут равны

$$\delta S = 0{,}5\ \text{мм} = 0{,}0005\ \text{м};$$
$$\delta t = 0{,}01\ \text{с}.$$

Расчетную формулу (1.9) можно записать в виде степенной функции

$$a(S, t) = 2 \cdot S^1 \cdot t^{-2};$$

тогда на основании (1.12) приборная погрешность косвенного измерения ускорения δa определится выражением

$$\delta a = \bar{a}\sqrt{(1 \cdot E_S)^2 + (-2 \cdot E_t)^2}\,.$$

В качестве наиболее представительных значений измеренных величин возьмем $S \approx 8$ *м*; $t \approx 3$ *с* (см. табл. 1.3.) и оценим по модулю относительные приборные ошибки прямых измерений с учетом их весовых коэффициентов:

$$E_S = \frac{\delta S}{S} = \frac{0{,}0005}{8} \approx 0{,}000063;$$
$$\left|-2E_t\right| = \frac{2\delta t}{t} = \frac{2 \cdot 0.01}{3} \approx 0{,}0067\,.$$

Очевидно, что в данном случае величиной E_S можно пренебречь и принять погрешность δa равной

$$\delta a = \bar{a}\left|-2E_t\right| = 2{,}03 \cdot 0{,}0067 \approx 0{,}0136\ (м/с^2).$$

В случае, если проводится косвенное измерение, в котором измеряемая величина u вычисляется по формуле $u = u(x)$, в которой она выражается через единственную величину x, являющуюся результатом прямого измерения, то абсолютная погрешность косвенного измерения δu оценивается в соответствие с (1.10) – (1.11) по формуле

$$\delta u = \sqrt{k_x{}^2(\delta x)^2} = \left|k_x\right| \cdot \left|\delta x\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \left|\delta x\right|.$$

Применительно к среднеквадратичной погрешности эта формула принимает вид

$$\sigma_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \sigma_x, \text{ где } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}},$$

где Δx_i есть отклонения от среднего значения величин x_i, измеренных в опыте с номером i. Из этих формул следует

$$\sigma_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta u_i)^2}{n(n-1)}},$$

где Δu_i есть отклонения от среднего значения величин $u_i = u(x_i)$. Последняя формула показывает, что *если производится косвенное измерение величины u, но измеряемая величина зависит от единственной величины x, которая непосредственно измеряется в эксперименте в результате прямого измерения, то для приближенного вычисления среднеквадратичной погрешности величины u можно использовать формулы прямого измерения.*

6. Полная ошибка. Окончательный результат измерений

В результате оценки случайной и приборной ошибок измерения величины x получено два доверительных интервала, характеризуемые значениями $\Delta_S x$ и δx. Результирующий доверительный интервал характеризуется *полной абсолютной ошибкой* Δx, которая, в зависимости от соотношения между величинами $\Delta_s x$ и δx, находится следующим образом.

Если одна из погрешностей более чем в три раза превышает другую (например, $\Delta_s x > 3\delta x$), то полная ошибка Δx принимается равной этой большей величине (в приведенном примере $\Delta x \approx \Delta_s x$). Если же величины $\Delta_s x$ и δx близки между собой, то полная ошибка вычисляется как

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta_s x)^2 + (\delta x)^2}\,. \qquad (1.14)$$

Запись окончательного результата измерений должна включать в себя следующие обязательные элементы.

1) Доверительный интервал вида

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

с указанием значения доверительной вероятности α. Величины $\bar{x}$ и Δx выражаются в одних и тех же единицах измерения, которые выносятся за скобку.

2) Значение ***полной относительной погрешности***

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%\,,$$

выраженное в процентах и округленное до десятых долей.

Полная ошибка Δx округляется до двух значащих цифр. Если полученное после округления число оканчивается цифрами 4, 5 или 6, то дальнейшее округление не производится; если же вторая значащая цифра 1, 2, 3, 7, 8 или 9, то значение Δx округляется до одной значащей цифры (примеры: *а)* 0,2642 ≈ 0,26; *б)* 3,177 ≈ 3,2 ≈ 3; *в)* $7{,}83 \cdot 10^{-7} \approx 8 \cdot 10^{-7}$ и т.д.). После этого среднее значение $\bar{x}$ округляется с той же точностью.

Пример. В результате определения ускорения движения тела (примеры 1 и 2) получено среднее значение ускорения $\bar{a}$ = 2,03 *м/с*^{2}, случайная ошибка $\Delta_s a$ = 0,139 *м/с*^{2} с доверительной вероятностью α = 0,95 и приборная ошибка δa = 0,0136 *м/с*^{2}. Так как δa более чем в десять раз меньше $\Delta_s a$, то ею можно пренебречь и принять округленную полную абсолютную погрешность равной $\Delta a \approx \Delta_s a \approx 0{,}14$ *м/с*^{2}. Оценим относительную ошибку:

$$E = \frac{0{,}139}{2{,}03} \cdot 100\% \approx 6{,}8\%$$

и запишем окончательный результат измерений:

$$a = (2{,}03 \pm 0{,}14)\, м/с^2 \quad \text{при } \alpha = 0{,}95;$$
$$E = 6{,}8\%.$$

Пример. При определении длины волны λ лазерного излучения (работа 5.1) получено: $\bar{\lambda} = 6{,}27 \cdot 10^{-4}$ *мм*; $\Delta_s \lambda = 2{,}17 \cdot 10^{-5}$ *мм* при α = 0,95; $\delta\lambda = 1{,}86 \cdot 10^{-5}$ мм. В данном случае значения приборной и случайной погрешностей близки между собой, поэтому полную ошибку найдем по формуле (14):

$$\Delta\lambda = \sqrt{(2{,}17 \cdot 10^{-5})^2 + (1{,}86 \cdot 10^{-5})^2} \approx 2{,}75 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-4}\,(мм)\,.$$

Округленное среднее будет равно $\bar{\lambda} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ *мм*. Оценим полную относительную ошибку

$$E = \frac{2,75 \cdot 10^{-5}}{6,27 \cdot 10^{-4}} \cdot 100\,\% \approx 4,4\%$$

и запишем окончательный результат:

$$\lambda = (6,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}\ \text{мм} \quad \text{при } \alpha = 0,95;$$
$$E = 4,4\,\%.$$

7. Построение графиков

В лабораторном практикуме и при выполнении расчетно-графических (семестровых) работ по физике часто возникает необходимость построения графических зависимостей. При оформлении графиков нужно следовать нижеперечисленным правилам.

1. Графики строят на миллиметровой бумаге форматом не менее чем 14×16 *мм* (страница стандартной тетради). *Готовый график должен быть приложен к отчету по лабораторной работе.* В виде исключения допускается построение зависимостей с помощью стандартных компьютерных программ – но и в этом случае графики должны соответствовать всем изложенным здесь требованиям (в частности, иметь масштабно-координатную сетку).

2. На координатных осях должны быть указаны обозначения откладываемых величин и единицы их измерения.

3. Начало координат, если это не оговорено особо, может не совпадать с нулевыми значениями величин. Его выбирают таким образом, чтобы площадь чертежа была использована максимально.

4. Экспериментальные точки изображаются четко и крупно: в виде кружков, крестиков и т.п.

5. Масштабные деления на координатных осях следует наносить равномерно. Координаты экспериментальных точек на осях не указывают, а линии, определяющие эти координаты, не проводят.

6. Масштаб выбирают таким образом, чтобы:

а) кривая была равномерно растянута вдоль обеих осей (если график представляет собой прямую, то угол ее наклона к осям должен быть близок к 45°);

б) положение любой точки можно было определить легко и быстро (масштаб, при котором чтение графика затруднено, считается неприемлемым*).

7. Если наблюдается значительный разброс экспериментальных точек, то кривую (прямую) следует проводить не по точкам, а между ними –

---

* Масштаб является удобным для чтения графика, если в единице отложенной по оси величины содержится одна (или две, пять, десять, двадцать, пятьдесят и т.д.) линейная единица – миллиметр или сантиметр. Следует избегать неудобного, но часто используемого студентами масштаба – 15 или 30 *мм* на единицу величины.

так, чтобы количество точек по обе стороны от нее было одинаковым. Кривая должна быть плавной.

Пример. Пусть требуется построить график зависимости пути S от времени t при равномерном движении тела. Экспериментальные данные приведены в табл. 1.5. Два варианта графика зависимости $S(t)$ – оформленный с ошибками и правильный – изображены на рис. 4 и 5.

Таблица 1.5

t, с	10	12	14	15	16	18	19	22
S, м	20	23	30	31	34	34	38	43

Основные, наиболее типичные ошибки, допускаемые студентами при построении графиков (рис. 1.4):

– неправильно выбраны направления осей координат: время t является независимой переменной (аргументом) и должно быть отложено по оси абсцисс (горизонтальной), а зависимая переменная (функция) – путь S – по оси ординат (вертикальной);
– на оси ординат не указаны отложенная величина (время t) и единицы ее измерения (*с*), а на оси абсцисс – единицы измерения пути S (*м*) – см. п. 2;
– площадь чертежа использована не полностью (поскольку из условия примера не следует, что оси координат должны начинаться с нулевых значений, то начало координат следует сместить и за счет этого увеличить масштаб графика) – см. п. 3;
– не выделены экспериментальные точки – п. 4;
– масштабные деления на оси времени нанесены неравномерно (если есть деления 0 и 5, то следующим должно быть 10 и т.д.) – п. 5;
– на оси пути нанесены не масштабные деления, а координаты экспериментальных точек; проведены лишние пунктирные линии – см. также п. 5;
– график сжат по оси абсцисс за счет двух причин: неправильно выбранного начала координат (п. 3) и неудачного (слишком мелкого) масштаба – п. 6, *а*;
– выбран крайне неудобный масштаб по времени, в связи с чем чтение графика затруднено – п. 6, *б*;
– неправильно соединены экспериментальные точки: зависимость пути от времени при равномерном движении заведомо линейна, и график должен представлять собой прямую – п. 7.

Правильно оформленный график представлен на рис. 1.5.

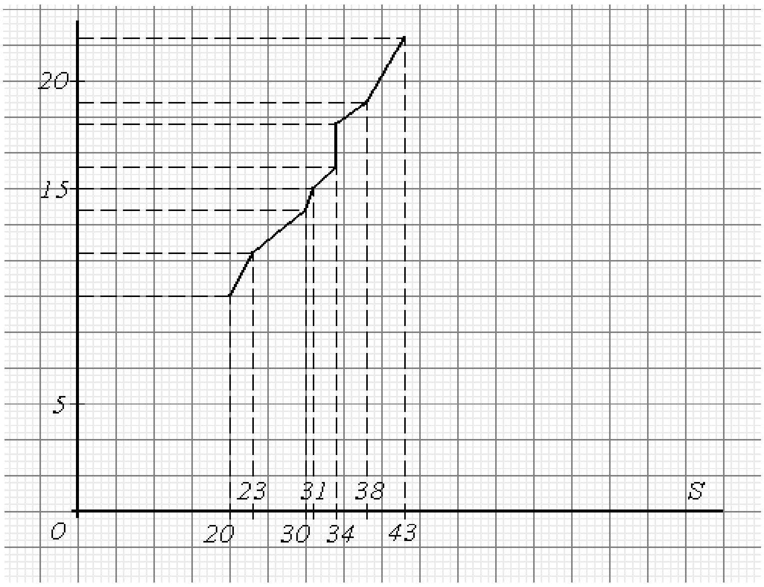


Рис. 1.4

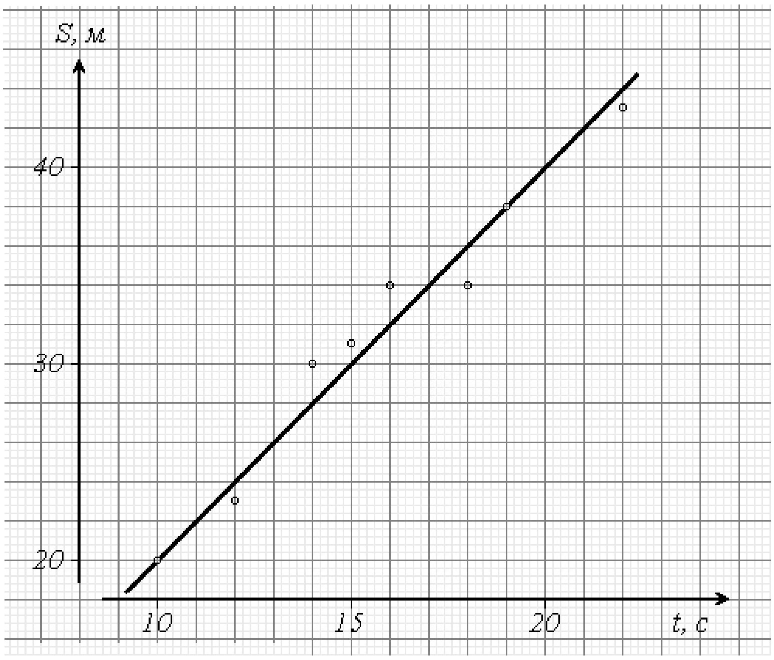


Рис. 1.5

8. Обработка экспериментальных зависимостей

Часто в практике физического эксперимента искомую величину невозможно определить из опытов, проведенных в одних и тех же условиях. Например, в лабораторной работе 1.3 требуется найти момент инерции J крестовины маятника Обербека. С этой целью измеряются момент $M_н$ силы натяжения нити и угловое ускорение ε крестовины. Связь между этими величинами устанавливает основной закон динамики вращательного движения, уравнение которого в данном случае имеет вид

$$\varepsilon = \frac{M_н - M_{тр}}{J}, \tag{1.15}$$

где $M_{тр}$ – момент сил трения. Очевидно, что сколько бы опытов при одном и том же значении $M_н$ ни проводилось, из формулы (1.15) нельзя найти момент инерции J, так как величина момента сил трения также неизвестна.

Введем обозначения:

$$x = M_н; \quad y = \varepsilon; \quad K = \frac{1}{J}; \quad b = -\frac{M_{тр}}{J},$$

с учетом которых выражение (1.15) приводится к стандартному виду линейной зависимости

$$y = Kx + b, \tag{1.16}$$

коэффициенты которой K и b неизвестны.

Формально для нахождения K и b достаточно измерить два значения функции y_I и y_{II} при *различных* значениях аргумента x_I и x_{II}. Подстановка этих значений в (1.16) позволяет получить систему двух независимых уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} y_I = K x_I + b, \\ y_{II} = K x_{II} + b. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$K = \frac{y_{II} - y_I}{x_{II} - x_I}; \tag{1.17}$$

$$b = \frac{y_I \cdot x_{II} - y_{II} \cdot x_I}{x_{II} - x_I}.$$

Этот метод дает возможность получить лишь грубую оценку коэффициентов, так как величины x и y измеряются с погрешностями.

Учесть наличие погрешностей и найти некоторые осредненные значения K и b можно только путем неоднократного измерения величины y при различных x. В дальнейшем допустим, что в результате опытов получено n значений независимой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и n соответствующих им значений функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

При использовании графического способа определения коэффициентов K и b экспериментальные точки наносят на график зависимости $y(x)$, а затем проводят сглаживающую прямую (см. п. 7 правил построения графиков). При условии, что ось абсцисс начинается с нуля, отрезок, отсекаемый этой прямой на оси Оy, численно – с учетом масштаба – равен коэффициенту b. Тангенс угла наклона прямой к оси Оx (опять же с учетом масштаба) дает значение коэффициента K. Для нахождения тангенса угла наклона нужно на сглаживающей прямой выбрать две точки I и II, расположенные достаточно далеко друг от друга и определить их координаты (значения аргумента x_I и x_{II} и функции y_I и y_{II}). Коэффициент K вычисляется по формуле (1.17), которую для краткости записывают в виде

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = y_{II} - y_I$; $\Delta x = x_{II} - x_I$.

Пример. Для определения ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}$ и его внутреннего сопротивления r были проведены измерения силы тока I в цепи источника и напряжения U на его зажимах при различной нагрузке. Экспериментальные результаты приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

I, А	1,20	1,35	2,00	2,40	3,00	4,00
U, В	19,1	15,5	12,9	11,5	10,0	4,3

Теоретически, на основании закона Ома для замкнутой цепи, измеренные величины связаны соотношением

$$U = \mathcal{E} - I \cdot r. \tag{1.18}$$

Сопоставляя с (1.16), имеем:

$$x \equiv I;\ y \equiv U;\ K = -r;\ b = \mathcal{E}. \tag{1.19}$$

Построенный по данным табл. 5 график приведен на рис. 1.6. Обработка графической зависимости согласно вышеизложенным правилам дает следующие результаты:

$$\mathcal{E} = b \approx 23{,}5\ (B);$$

$$r = -K = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{2-18}{4{,}4-1{,}1} \approx 4{,}85\ (Ом)\cdot$$

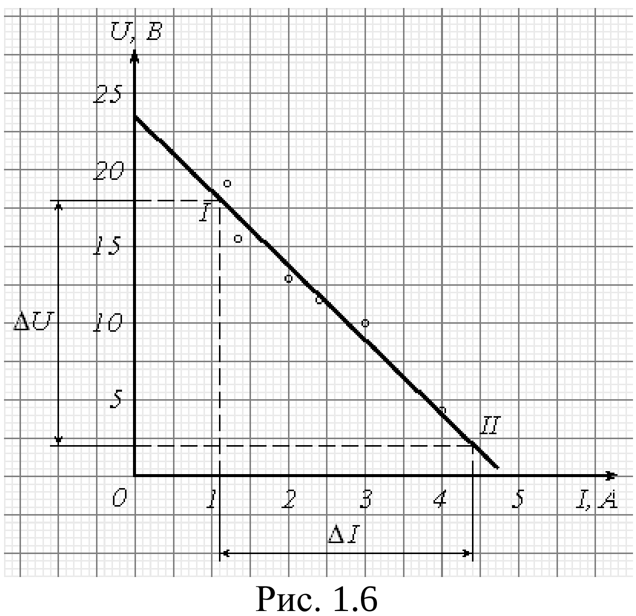


Рис. 1.6

На рисунках 1.7 – 1.12 показаны наиболее распространенные ошибки, допускаемые студентами при графической обработке линейных зависимостей.

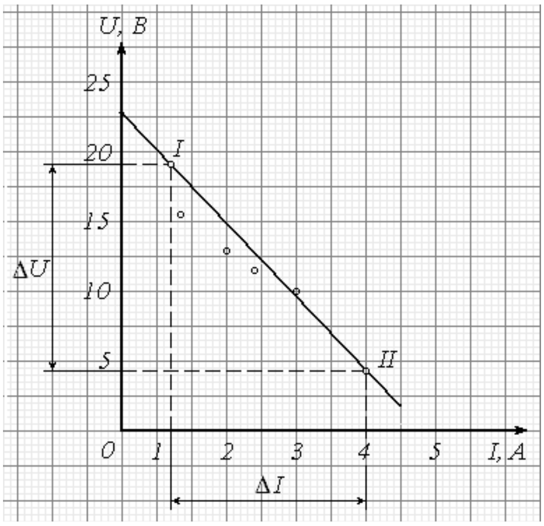


Рис. 1.7

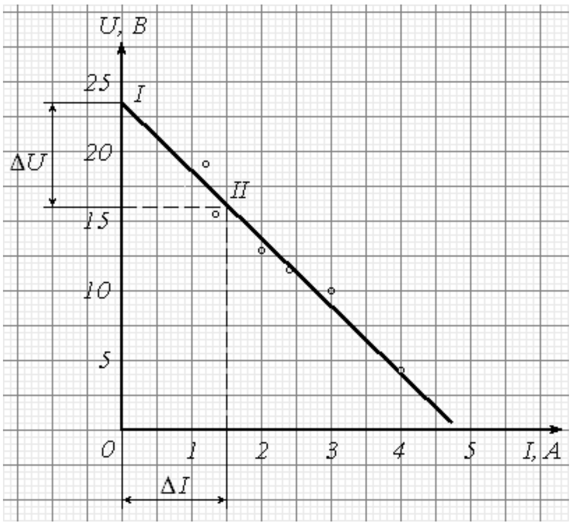


Рис. 1.8

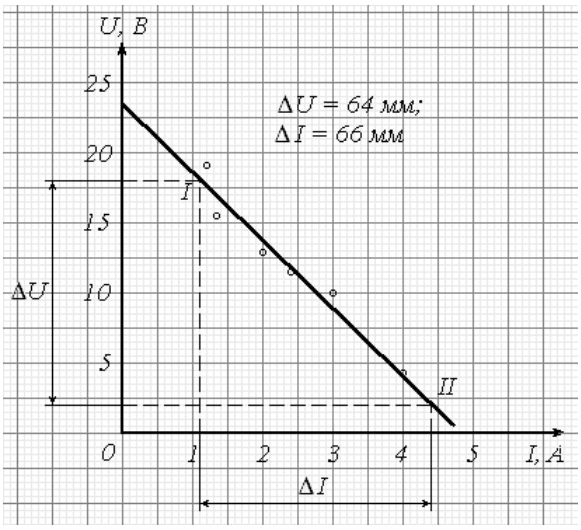
Рис. 1.7 иллюстрирует две типичные ошибки. Во-первых, неправильно определена величина E = 22,5 *В*, т.к. ось абсцисс (токов) начинается не с нуля. Во-вторых, координаты точек *I* и *II* взяты не со сглаживающей прямой, а из таблицы экспериментальных данных. Поэтому величина

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{4{,}3 - 19{,}1}{4{,}0 - 1{,}2} = 5{,}29\,(Ом)$$

не является осредненной, и случайная погрешность ее определения может быть очень большой (при таком способе вычисления *r* построение графика вообще не имеет смысла).

На рис. 1.8 точки *I* и *II* выбраны слишком близко друг к другу. При малых длинах отрезков ΔU и ΔI растет относительная ошибка их измерения, а следовательно, и погрешность определения углового коэффициента:

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{16 - 23{,}5}{1{,}5 - 0} = 5{,}00\,(Ом)\cdot$$



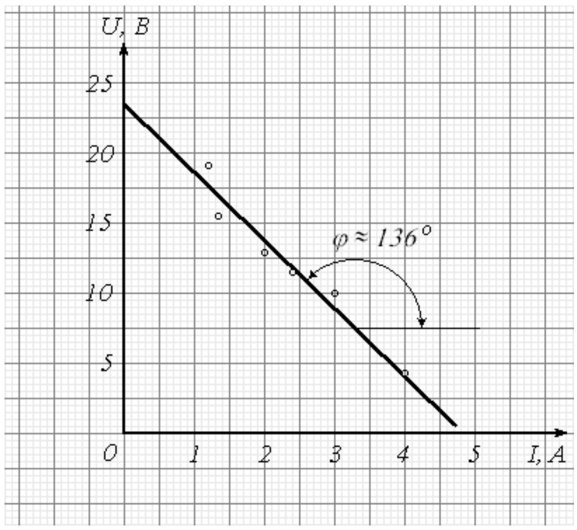


Рис. 1.9 Рис. 1.10

На рис. 1.9 и 1.10 графики построены безукоризненно, и величина $\mathcal{E}$ = 23,5 *В* найдена верно. Тем не менее, здесь допущена, по сути дела, одна и та же грубейшая ошибка. Она заключается в том, что при определении тангенса угла наклона прямой не учтен масштаб откладываемых по осям переменных. В обоих случаях получим результаты:

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{64\,мм}{66\,мм} = -0{,}97;$$

$$r = -\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}136^{\circ} = 0{,}97,$$

не имеющие ничего общего с искомой физической величиной и даже лишенные единиц измерения (только в том случае, когда отрезки ΔU и ΔI выражены соответственно в вольтах и амперах, их отношение будет иметь размерность *Ом*). Очевидно, что изменение масштаба графика приведет к изменению реального угла наклона прямой φ, что при правильном определении углового коэффициента не должно влиять на получаемый результат.

Ошибки, показанные на рис. 1.11 и 1.12, связаны с неудачным выбором масштаба (см. п. 6 правил построения графиков). Сжатие графика по оси ординат (рис. 1.11) приводит к большой погрешности измерения величин $\mathcal{E}$ и ΔU; последнее отрицательно влияет на точность определения r:

$$\mathcal{E} = 21\ В;$$

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{17-7}{1-3{,}5} = 4{,}00\,(Ом);$$

сжатие по оси абсцисс (рис. 1.12) увеличивает ошибку измерения ΔI и также приводит к снижению точности нахождения обоих коэффициентов:

$$\mathcal{E} = 24{,}5\ В;$$

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{19-9}{1-3} = 5{,}00\,(Ом).$$

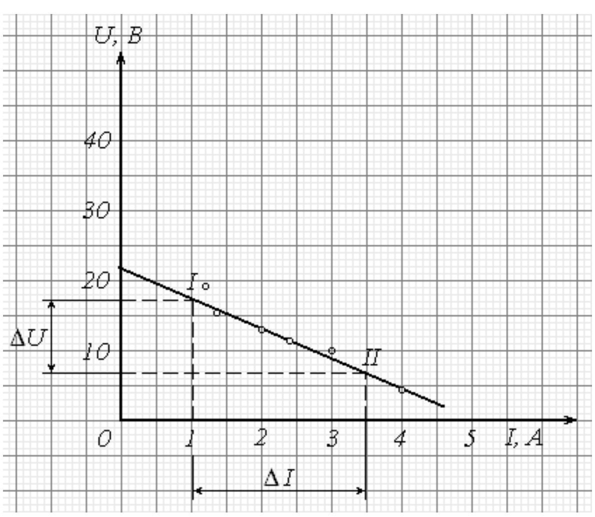


Рис. 1.11

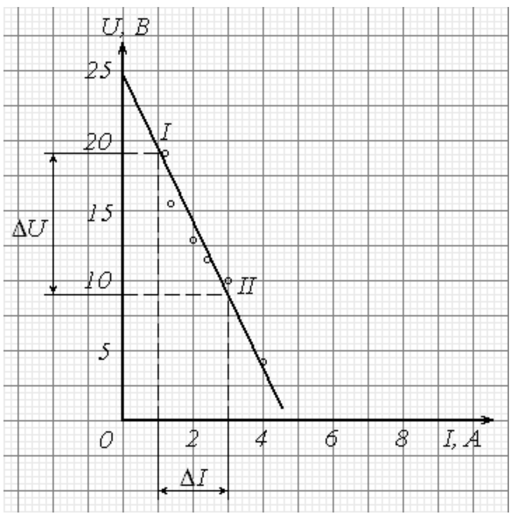


Рис. 1.12

Часть 2. Обработка результатов измерений на примере определения плотности твердых тел правильной геометрической формы

Цель работы: определение плотности твердого тела, расчет погрешностей прямых и косвенных измерений.

1. Теоретические сведения

Плотность тела – одна из важнейших его характеристик, под которой для однородных тел понимают отношение его массы к объему:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{2.1}$$

Если тело имеет правильную геометрическую форму, его объем нетрудно вычислить. В данной лабораторной работе образцы тел имеют форму параллелепипеда или цилиндра.

Для параллелепипеда

$$V = a \cdot b \cdot c, \tag{2.2}$$

где V – объем параллелепипеда, м^3; a – длина, м; b – ширина, м; c – высота параллелепипеда, м.

Плотность параллелепипеда ρ вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{m}{a \cdot b \cdot c}. \tag{2.3}$$

Для цилиндра

$$V = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 h, \tag{2.4}$$

где V – объем цилиндра, м^3; d – диаметр, м; h – высота цилиндра, м.

Плотность цилиндра ρ вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{4m}{\pi \cdot d^2 \cdot h}. \tag{2.5}$$

Определение плотности исследуемых тел по формулам (2.3) и (2.5) относится к методу косвенных измерений. В этом случае в прямых измерениях определяется масса тела m и его линейные размеры (a, b, c или r, h).

2. Приборы принадлежности для выполнения работы.

Лабораторные весы и разновесы, штангенциркуль, микрометр, образцы тел (цилиндр или параллелепипед).

3. Описание приборов для измерения линейных размеров тел

Линейка. Всем известная линейка пригодна для измерения размеров самых разнообразных тел. Однако по ней можно отсчитать только целое число миллиметров. А миллиметр при современных точностях обработки стал весьма большой единицей длины, поэтому линейку применяют только для грубых измерений (рис. 2.1). Совмещение двух линеек в более совершенном инструменте – штангенциркуле позволяет измерить размеры с точностью до 0,1 мм (рис. 2.2).

Штангенциркуль. Штангенциркуль состоит из основной шкалы – линейки с миллиметровыми делениями и перемещающейся по ней подвижной рамки. Измеряемый предмет зажимают между губками. По штрихам основной шкалы прочитывают целое число миллиметров. К рамке прикреплена маленькая линейка – нониус – с десятью делениями, которые равны девяти делениям основной шкалы, т. е. каждое деление нониуса на 0,1 мм меньше деления основной шкалы. По штрихам нониуса определяют, на сколько десятых долей миллиметра измеряемый размер превышает целое число миллиметров. Для этого устанавливают, какой из штрихов нониуса совпал со штрихом основной шкалы. Например, на рис. 2.2 мы видим, что со штрихом основной шкалы (отмеченным символом **x**) совпал штрих нониуса с номером 7. При этом нулевой штрих нониуса находится между делениями 21 мм и 22 мм основной шкалы. В этом случае показание штангенциркуля равно 22,7 мм.

Цена деления шкалы штангенциркуля есть цена деления шкалы нониуса. Если шкала нониуса имеет 10 делений, то цена одного деления шкалы равна $\Delta x_{ц.д.} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ мм, при этом инструментальная погрешность измерения есть $\Delta x_{и} = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}05$ мм. Существуют штангенциркули, у которых шкала нониуса имеет 20 или даже 50 делений. Например, если шкала нониуса имеет 20 делений, то цена одного деления равна $\Delta x_{ц.д.} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ мм, при этом инструментальная погрешность измерения есть $\Delta x_{и} = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}025$ мм.

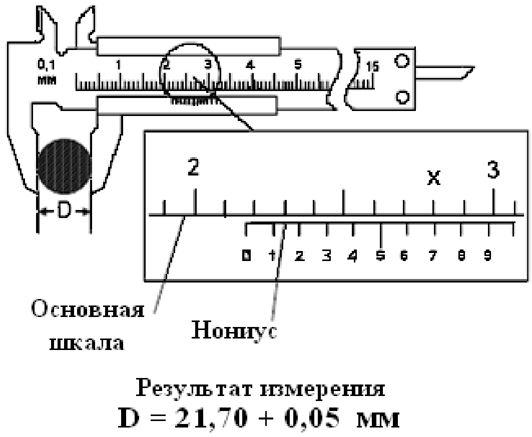


Рис. 2.1 Рис. 2.2

Внимание! Запрещается перемещать подвижную рамку за пределы штанги во избежание потери плоской пружины.

При внутренних измерениях к показаниям штангенциркуля по основной шкале и шкале нониуса прибавляется толщина губок, которая указана на них.

Микрометр. Главная деталь микрометра – точный микрометрический винт, ввернутый в гайку, называемую стеблем (рис. 2.3). При одном обороте винт перемещается вдоль своей оси на 0,5 мм. На винте неподвижно насажен барабан, на котором по окружности нанесено 50 делений.

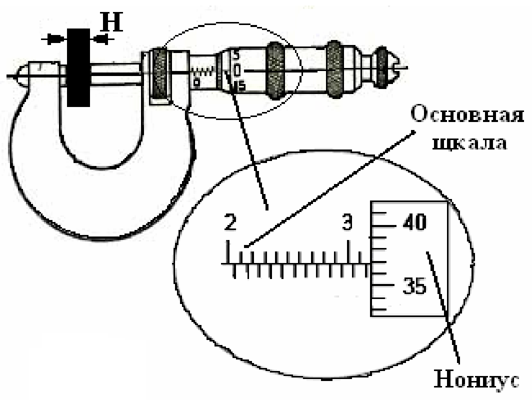


Рис. 2.3

Таким образом, поворот винта на одно деление равен 1/50 полного оборота, или 0,01 мм (0,5 мм/50 = 0,01 мм). Вращая барабан, зажимают измеряемую деталь между винтом и пяткой скобы и производят отсчет. Сначала по верхней шкале стебля определяют, сколько миллиметров, начиная от первого штриха, прошел барабан. Если барабан перешел штрих на нижней шкале стебля, определяющей полумиллиметры, то это означает, что дробная часть размера больше 0,5 мм. А насколько размер детали превышает целое число полумиллиметров, устанавливают по тому штриху барабана, который совпадает с продольной линией на стебле. Цена деления шкалы микрометра равна $\Delta x_{ц.д.} = 0{,}01$ мм, при этом инструментальная погрешность измерения с помощью микрометра есть $\Delta x_и = \dfrac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}005$ мм.

4. Порядок выполнения работы для цилиндра

При выполнении лабораторной работы необходимо придерживаться следующего порядка ее выполнения:

1. Получить у преподавателя исследуемый образец (цилиндр) и измерительный прибор (штангенциркуль или микрометр).

2. По номеру на образце, используя таблицу, предоставленную преподавателем, определить массу *m* цилиндра. Считать массу цилиндра результатом прямого однократного измерения.

3. Измерить с помощью штангенциркуля или микрометра *n* раз (число измерений *n* указывается преподавателем, рекомендованное значение *n*=5) диаметр *d* и высоту *h* цилиндра. Измерения этих величин необходимо проводить в различных местах цилиндра. Учитывая, что форма поверхности измеряемого тела отличается от идеальной цилиндрической формы, различные измерения, как правило, должны приводить к отличающимся значениям величин *d* и *h*.

При виртуальном выполнении лабораторной работы считается, что пункты 1. – 3. уже выполнены и необходимо приступать к выполнению лабораторной работы, начиная с пункта 4. В этом случае необходимо узнать у преподавателя номер своего варианта и в соответствие с Приложением (в конце описания к данной работе) определить массу и размеры цилиндра, необходимые Вам для расчетов.

4. Результаты измерений занести в таблицу 2.1.

5. Вычислить по формулам (2.6) и (2.7) средние значения диаметра $\bar{d}$ и среднее значение высоты $\bar{h}$ цилиндра:

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}, \tag{2.6}$$

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n}. \tag{2.7}$$

6. Вычислить среднее значение плотности материала цилиндра по формуле (2.8):

$$\bar{\rho} = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot \bar{d}^2 \cdot \bar{h}}. \tag{2.8}$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

<table>
<tr><th>№ измерения</th><th>d, мм</th><th>h, мм</th><th>m, г</th><th>ρ, $\frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$</th><th>$\Delta\rho$, $\frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$d_1 =$</td><td>$h_1 =$</td><td rowspan="7">$m =$</td><td rowspan="7">$\overline{\rho} =$</td><td rowspan="10">$\Delta\rho =$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$d_2 =$</td><td>$h_2 =$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$d_3 =$</td><td>$h_3 =$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$d_4 =$</td><td>$h_4 =$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$d_5 =$</td><td>$h_5 =$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Среднее значение</td><td>$\overline{d} =$</td><td>$\overline{h} =$</td></tr>
<tr><td>Приборная погрешность</td><td>$\delta d =$</td><td>$\delta h =$</td><td>$\delta m =$</td><td>$\delta\rho =$</td></tr>
<tr><td>Средняя квадратичная погрешность</td><td>$\sigma_d =$</td><td>$\sigma_h =$</td><td>–</td><td>$\sigma_\rho =$</td></tr>
<tr><td>Случайная погрешность</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>$\Delta\rho_s =$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\rho = \overline{\rho} \pm \Delta\rho = \ldots\ldots \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$</td></tr>
</table>

Вычисление приборной погрешности измерений для цилиндра

7. Определить приборную погрешность при прямом измерении величин d, h и m по формулам (2.9):

$$\delta d = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta h = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta m = \frac{\Delta m_{ц.д.}}{2} \qquad (2.9)$$

где $\Delta x_{ц.д.}$ – цена деления шкалы прибора (штангенциркуля или микрометра), с помощью которого производилось измерение величин d и h, а $\Delta m_{ц.д.}$ – цена деления шкалы весов, с помощью которых определялась масса тела.

При использовании данных в Приложении предполагается, что измерения проводились с помощью штангенциркуля и $\Delta x_{ц.д.} = 0{,}1$ мм, а при $\Delta m_{ц.д.} = 0{,}1$.

8. Вычислить приборную погрешность измерения плотности по формуле (2.10):

$$\delta\rho = \overline{\rho}\sqrt{\frac{\delta m^2}{\overline{m}^2} + 4\frac{\delta d^2}{\overline{d}^2} + \frac{\delta h^2}{\overline{h}^2}} \ . \qquad (2.10)$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.1.

Вычисление случайной погрешности измерений для цилиндра

9. Вычислить среднюю квадратичную погрешность измерения величин d и h по формулам (2.11) и (2.12):

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\left(d_1 - \bar{d}\right)^2 + \left(d_2 - \bar{d}\right)^2 + \left(d_3 - \bar{d}\right)^2 + \ldots + \left(d_n - \bar{d}\right)^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (2.11)$$

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{\left(h_1 - \bar{h}\right)^2 + \left(h_2 - \bar{h}\right)^2 + \left(h_3 - \bar{h}\right)^2 + \ldots + \left(h_n - \bar{h}\right)^2}{n(n-1)}}\ . \qquad (2.12)$$

10. Вычислить среднюю квадратичную погрешность измерения плотности по формуле (2.13):

$$\sigma_\rho = \bar{\rho}\sqrt{4\frac{\sigma_d^2}{\bar{d}^2} + \frac{\sigma_h^2}{\bar{h}^2}}\ . \qquad (2.13)$$

11. Вычислить случайную погрешность измерения плотности по формуле:

$$\Delta\rho_s = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_\rho\,,$$

где $t_{\alpha,n}$ – коэффициент Стьюдента, α – доверительная вероятность, n – число измерений. Значение доверительной вероятности принять равным $\alpha = 0{,}95$. Значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n}$ при данных значениях α и n определить по таблице 1.1 в Части 1 описания к данной работе.

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.1.

Окончательные расчеты для цилиндра

12. Вычислить полуширину доверительного интервала (или полную абсолютную погрешность измерения) по формуле:

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta\rho_s^2 + \delta\rho^2}$$

13. Перевести вычисленные значения $\bar{\rho}$ и $\Delta\rho$ в систему СИ и записать ответ в форме:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho\,.$$

14. Найти относительную погрешность измерения плотности по формуле (2.14):

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\%\ . \qquad (2.14)$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.1.

15. По таблице плотностей веществ найти вещества, плотность которых ближе всего к вычисленному значению ρ. Перечислить эти вещества с указанием их плотности.

5. Порядок выполнения работы для параллелепипеда

При выполнении лабораторной работы необходимо придерживаться следующего порядка ее выполнения:

1. Получить у преподавателя исследуемый образец (параллелепипед) и измерительный прибор (штангенциркуль или микрометр).

2. По номеру на образце, используя таблицу, предоставленную преподавателем, определить массу m параллелепипеда. Считать массу параллелепипеда результатом прямого однократного измерения.

3. Измерить с помощью штангенциркуля или микрометра n раз (число измерений n указывается преподавателем, рекомендованное значение $n = 5$) длин a, ширину b и высоту c параллелепипеда. Измерения этих величин необходимо проводить в различных местах параллелепипеда. Учитывая, что форма измеряемого тела отличается от идеальной формы, различные измерения, как правило, должны приводить к отличающимся значениям величин a, b и c.

При виртуальном выполнении лабораторной работы считается, что пункты 1. – 3. уже выполнены и необходимо приступать к выполнению лабораторной работы, начиная с пункта 4. В этом случае необходимо узнать у преподавателя номер своего варианта и в соответствие с Приложением (в конце описания к данной работе) определить массу и размеры параллелепипеда, необходимые Вам для расчетов.

4. Результаты измерений занести в таблице 2.2.

5. Вычислить по формулам (2.15), (2.16) и (2.17) средние значения длины $\bar{a}$, ширины $\bar{b}$ и высоты $\bar{c}$ параллелепипеда:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{2.15}$$

$$\bar{b} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}, \tag{2.16}$$

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n}. \tag{2.17}$$

6. Вычислить среднее значение плотности материала параллелепипеда по формуле (2.18):

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}}. \tag{2.18}$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

<table>
<tr><th>№</th><th>a, мм</th><th>b, мм</th><th>c, мм</th><th>m, г</th><th>ρ, $\frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$</th><th>$\Delta\rho$, $\frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_1 =$</td><td>$b_1 =$</td><td>$c_1 =$</td><td rowspan="7">$m =$</td><td rowspan="7">$\bar{\rho} =$</td><td rowspan="10">$\Delta\rho =$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$a_2 =$</td><td>$b_2 =$</td><td>$c_2 =$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$a_3 =$</td><td>$b_3 =$</td><td>$c_3 =$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$a_4 =$</td><td>$b_4 =$</td><td>$c_4 =$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$a_5 =$</td><td>$b_5 =$</td><td>$c_5 =$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Среднее значение</td><td>$\bar{a} =$</td><td>$\bar{b} =$</td><td>$\bar{c} =$</td></tr>
<tr><td>Приборная погрешность</td><td>$\delta a =$</td><td>$\delta b =$</td><td>$\delta c =$</td><td>$\delta m =$</td><td>$\delta\rho =$</td></tr>
<tr><td>Средняя квадратичная погрешность</td><td>$\sigma_a =$</td><td>$\sigma_b =$</td><td>$\sigma_c =$</td><td>–</td><td>$\sigma_\rho =$</td></tr>
<tr><td>Случайная погрешность</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>$\Delta\rho_s =$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho = \ldots\ldots\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$</td></tr>
</table>

Вычисление приборной погрешности измерений для параллелепипеда

7. Определить приборную погрешность при прямом измерении величин a, b, c и m по формулам (2.19):

$$\delta a = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta b = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta c = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta m = \frac{\Delta m_{ц.д.}}{2} \tag{2.19}$$

где $\Delta x_{ц.д.}$ – цена деления шкалы прибора (штангенциркуля или микрометра), с помощью которого производилось измерение величин a, b, c, а $\Delta m_{ц.д.}$ – цена деления шкалы весов, с помощью которых определялась масса тела.

При использовании данных в Приложении предполагается, что измерения проводились с помощью штангенциркуля и $\Delta x_{ц.д.} = 0{,}1$ мм, а при $\Delta m_{ц.д.} = 0{,}1$.

8. Вычислить приборную погрешность измерения плотности по формуле (2.20):

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\delta m^2}{\bar{m}^2} + \frac{\delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\delta b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\delta c^2}{\bar{c}^2}}\ . \qquad (2.20)$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.2.

Вычисление случайной погрешности измерений для параллелепипеда

9. Вычислить среднюю квадратичную погрешность при измерении величин a, b и c по формулам (2.21), (2.22) и (2.23):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + (a_3 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (2.21)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(b_1 - \bar{b})^2 + (b_2 - \bar{b})^2 + (b_3 - \bar{b})^2 + \ldots + (b_n - \bar{b})^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (2.22)$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(c_1 - \bar{c})^2 + (c_2 - \bar{c})^2 + (c_3 - \bar{c})^2 + \ldots + (c_n - \bar{c})^2}{n(n-1)}}\ . \qquad (2.23)$$

10. Вычислить среднюю квадратичную погрешность измерения плотности по формуле (2.24):

$$\sigma_\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\sigma_c^2}{\bar{c}^2}}\ . \qquad (2.24)$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.2.

11. Вычислить случайную погрешность измерения плотности по формуле:

$$\Delta\rho_s = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_\rho\,,$$

где $t_{\alpha,n}$ – коэффициент Стьюдента, α – доверительная вероятность, n – число измерений. Значение доверительной вероятности принять равным $\alpha = 0{,}95$. Значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n}$ при данных значениях α и n определить по таблице 1.1 в Части 1 описания к данной работе.

Окончательные расчеты для параллелепипеда

12. Вычислить полуширину доверительного интервала (или полную абсолютную погрешность измерения) по формуле:

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta\rho_s^2 + \delta\rho^2}$$

13. Перевести вычисленные значения $\bar{\rho}$ и $\Delta\rho$ в систему СИ и записать ответ в форме:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho\,.$$

14. Найти относительную погрешность измерения плотности по формуле (2.14):

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\% \ . \qquad (2.14)$$

Результаты всех измерений занести в таблицу 2.2.

15. По таблице плотностей веществ найти вещества, плотность которых ближе всего к вычисленному значению ρ. Перечислить эти вещества с указанием их плотности.

6. Контрольные вопросы

1. Абсолютная ошибка измерения.
2. Относительная ошибка измерения
3. На какие группы делятся ошибки по происхождению?
4. На какие группы делятся ошибки по характеру проявления?
5. Какие ошибки называются инструментальными?
6. Какие ошибки называются методическими?
7. Какие ошибки называются случайными?
8. Какие ошибки называются систематическими?
9. Что называют доверительной вероятностью (коэффициентом надежности надежностью) и доверительным интервалом (интервалом надежности) результата измерения?
10. Как определяется средняя квадратичная погрешность прямых измерений?
11. Как определяется средняя квадратичная погрешность косвенных измерений?
12. Что называется пределом измерения измерительного прибора?
13. Что называется ценой деления шкалы измерительного прибора?
14. Что называется классом точности измерительного прибора?
15. Какие измерительные приборы называются приборами дискретного действия?
16. Чему равна абсолютная погрешность измерения в приборах дискретного действия?
17. Какие измерительные приборы называются приборами непрерывного действия?
18. Чему равна абсолютная погрешность измерения в приборах непрерывного действия?
19. Как определить полную абсолютную ошибку измерения Δ, если в результате оценки случайной и приборной ошибок измерения величины x получено два доверительных интервала, характеризуемые значениями $\Delta_s x$ и δx?
20. Как округляется полная ошибка измерений?

21. Как использовать таблицу коэффициентов Стьюдента для расчета доверительного интервала по заданной надежности?
22. В чем состоит графический способ определения коэффициентов линейной зависимости измеряемых величин?
23. В чем состоит метод наименьших квадратов определения коэффициентов линейной зависимости измеряемых величин?
24. Формула для вычисления средней квадратичной погрешности измерений плотности тела в форме параллелепипеда
25. Формула для вычисления средней квадратичной погрешности измерений плотности тела в форме цилиндра
26. Как рассчитать погрешность многократного косвенного измерения плотности цилиндра, параллелепипеда?
27. Простые задачи на вычисление погрешностей измерений и обработку экспериментальных зависимостей

Часть 3. Образец выполнения и оформления лабораторной работы 1.0

Титульный лист

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Кафедра физики

Лабораторная работа 1.0

**Изучение теории обработки результатов измерений.
Обработка результатов измерений на примере определения плотности твердых тел правильной геометрической формы**

Вариант 31

Выполнил:
обучающийся гр. 3107
Иванов И.И.
Проверил:
доцент кафедры физики
З*убарев А.П.*

Самара 2021

Выполнение работы

Цель работы

Определение плотности твердого тела, расчет погрешностей прямых и косвенных измерений.

Оборудование

Тело правильной геометрической формы (параллелепипед), штангенциркуль, микрометр, лабораторные весы

Расчетные формулы

Средние значения длины $\bar{a}$, ширины $\bar{b}$ и высоты $\bar{c}$ параллелепипеда:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}, \quad \bar{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{5}, \quad \bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5}{5}$$

Среднее значение плотности материала параллелепипеда:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}} \; .$$

Приборные погрешности при прямом измерении величин *a*, *b*, *c* и *m*:

$$\delta a = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta b = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta c = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2}, \quad \delta m = \frac{\Delta m_{ц.д.}}{2},$$

где $\Delta x_{ц.д.} = 0{,}05$ мм – цена деления шкалы прибора (штангенциркуля или микрометра), с помощью которого производилось измерение величин *a*, *b*, *c* и $\Delta m_{ц.д.} = 0{,}05$ г.

Приборная погрешность измерения плотности:

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\delta m^2}{\bar{m}^2} + \frac{\delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\delta b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\delta c^2}{\bar{c}^2}} \; .$$

Средние квадратичные погрешности при измерении величин *a*, *b* и *c*:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + (a_3 - \bar{a})^2 + (a_4 - \bar{a})^2 + (a_5 - \bar{a})^2}{5(5-1)}} \; ,$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(b_1 - \bar{b})^2 + (b_2 - \bar{b})^2 + (b_3 - \bar{b})^2 + (b_4 - \bar{b})^2 + (b_5 - \bar{b})^2}{5(4-1)}} \; ,$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(c_1 - \bar{c})^2 + (c_2 - \bar{c})^2 + (c_3 - \bar{c})^2 + (c_4 - \bar{c})^2 + (c_5 - \bar{c})^2}{5(5-1)}} \; .$$

Средняя квадратичная погрешность измерения плотности:

$$\sigma_\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\sigma_c^2}{\bar{c}^2}} \ .$$

Случайная погрешность измерения плотности:

$$\Delta\rho_s = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_\rho ,$$

Полуширина доверительного интервала (или полная абсолютная погрешность измерения):

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta\rho_s^2 + \delta\rho^2}$$

Форма окончательного ответа:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho .$$

Относительная погрешность измерения плотности:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\% \ .$$

Результаты измерений геометрических размеров тела и его массы

Вариант 31

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 18{,}7$	$b_1 = 28{,}0$	$c_1 = 9{,}9$	$m = 36.4$
2	$a_2 = 18{,}3$	$b_2 = 27{,}6$	$c_2 = 9{,}3$	
3	$a_3 = 18{,}6$	$b_3 = 27{,}7$	$c_3 = 9{,}7$	
4	$a_4 = 18{,}4$	$b_4 = 27{,}8$	$c_4 = 9{,}8$	
5	$a_5 = 18{,}5$	$b_5 = 27{,}5$	$c_5 = 9{,}5$	

Расчеты

Таблица расчетов

№	a, мм	b, мм	c, мм	m, г	ρ, $\frac{г}{мм^3}$	$\Delta\rho$, $\frac{г}{мм^3}$
1	$a_1 = 18{,}7$	$b_1 = 28{,}0$	$c_1 = 9{,}9$			
2	$a_2 = 18{,}3$	$b_2 = 27{,}6$	$c_2 = 9{,}3$			
3	$a_3 = 18{,}6$	$b_3 = 27{,}7$	$c_3 = 9{,}7$	$m = 36.4$	$\bar{\rho} = 0{,}007363$	
4	$a_4 = 18{,}4$	$b_4 = 27{,}8$	$c_4 = 9{,}8$			
5	$a_5 = 18{,}5$	$b_5 = 27{,}5$	$c_5 = 9{,}5$			
Среднее значение	$\bar{a} = 18{,}50$	$\bar{b} = 27{,}72$	$\bar{c} = 9{,}640$			$\Delta\rho = 0{,}0002541$
Приборная погрешность	$\delta a = 0{,}05$	$\delta b = 0{,}05$	$\delta c = 0{,}05$	$\delta m = 0{,}05$	$\delta\rho = 0.00004618$	
Средняя квадратичная погрешность	$\sigma_a = 0{,}0707$	$\sigma_b = 0{,}0860$	$\sigma_c = 0{,}1077$	–	$\sigma_\rho = 0{,}0000899$	
Случайная погрешность	–	–	–	–	$\Delta\rho_s = 0{,}0002499$	
$\rho = 0{,}00736 \pm 0{,}00025\ \frac{г}{мм^3} = 7360 \pm 250\ \frac{кг}{м^3}$						

Все расстояния приведены в миллиметрах, а массы в граммах.

Средние значения длины $\bar{a}$, ширины $\bar{b}$ и высоты $\bar{c}$ параллелепипеда:

$$\bar{a} = \frac{18{,}7 + 18{,}3 + 18{,}6 + 18{,}4 + 18{,}5}{5} = 18{,}50,$$

$$\bar{b} = \frac{28{,}0 + 27{,}6 + 27{,}7 + 27{,}8 + 27{,}5}{5} = 27{,}72,$$

$$\bar{c} = \frac{9{,}9 + 9{,}3 + 9{,}7 + 9{,}8 + 9{,}5}{5} = 9{,}640$$

Среднее значение плотности материала параллелепипеда:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}} = \frac{36{,}4}{18{,}5\cdot 27{,}72\cdot 9{,}64} = \frac{36{,}4}{4944} = 0{,}007363 \;\cdot$$

Приборные погрешности при прямом измерении величин a, b, c и m:

$$\delta a = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}05, \quad \delta b = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}05, \quad \delta c = \frac{\Delta x_{ц.д.}}{2} = 0{,}05, \quad \delta m = \frac{\Delta m_{ц.д.}}{2} = 0{,}05$$

Приборная погрешность измерения плотности:

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\delta m^2}{\bar{m}^2} + \frac{\delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\delta b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\delta c^2}{\bar{c}^2}} =$$

$$= 0{,}007363\sqrt{\frac{(0{,}05)^2}{36{,}4^2} + \frac{(0{,}05)^2}{18{,}50^2} + \frac{(0{,}05)^2}{27{,}72^2} + \frac{(0{,}05)^2}{9{,}640^2}} =$$

$$= 0{,}007363\sqrt{\frac{0{,}0025}{1325} + \frac{0{,}0025}{342{,}3} + \frac{0{,}0025}{768{,}4} + \frac{0{,}0025}{92{,}93}} =$$

$$= 0{,}007363\sqrt{1{,}887\cdot 10^{-6} + 7{,}304\cdot 10^{-6} + 3{,}254\cdot 10^{-6} + 2{,}690\cdot 10^{-5}} =$$

$$= 0{,}007363\sqrt{3{,}934\cdot 10^{-5}} == 0{,}007363\cdot 0{,}006272 =$$

$$= 0.00004618\,.$$

Средние квадратичные погрешности при измерении величин a, b и c:

$$\sigma_a = \Big((18{,}7 - 18{,}5)^2 + (18{,}3 - 18{,}5)^2 + (18{,}6 - 18{,}5)^2 +$$

$$+ \left(18{,}4 - 18{,}5^2\right)^2 + (18{,}5 - 18{,}5)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{5\cdot(5-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(0{,}2)^2 + (-0{,}2)^2 + (0{,}1)^2 + (-0{,}1)^2 + (0)^2}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0}{20}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{20}} = 0{,}0707$$

Аналогичным образом также подробно вычисляем σ_b и σ_c. Здесь в методичке для экономии места мы приводим только ответы:

$$\sigma_b = \Big((28{,}0 - 27{,}72)^2 + (27{,}6 - 27{,}72)^2 + (27{,}7 - 27{,}72)^2 +$$

$$+ (27{,}8 - 27{,}72)^2 + (27{,}5 - 27{,}72)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{5\cdot(5-1)}} =$$

$$= 0{,}0860$$

$$\sigma_c = \Big((9{,}9 - 9{,}64)^2 + (9{,}3 - 9{,}64)^2 + (9{,}7 - 9{,}64)^2 +$$

$$+ (9{,}8 - 9{,}64)^2 + (9{,}5 - 9{,}64)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{5\cdot(5-1)}} =$$

$$= 0{,}1077$$

Средняя квадратичная погрешность измерения плотности:

$$\sigma_\rho = \bar{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\sigma_c^2}{\bar{c}^2}} =$$
$$= 0{,}007363\sqrt{\frac{(0{,}0707)^2}{18{,}50^2} + \frac{(0{,}0860)^2}{27{,}72^2} + \frac{(0{,}1077)^2}{9{,}640^2}} =$$
$$= 0{,}007363\sqrt{\frac{0{,}004998}{342{,}3} + \frac{0{,}007396}{768{,}4} + \frac{0{,}0160}{92{,}93}} =$$
$$= 0{,}00008990$$

Для $n = 5$ и доверительной вероятность $\alpha = 0{,}95$ коэффициент Стьюдента равен

$$t_{\alpha,n} = 2{,}78\,.$$

Случайная погрешность измерения плотности равна

$$\Delta\rho_s = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_\rho = 2{,}78 \cdot 0{,}0000899 = 0{,}0002499\,,$$

Полуширина доверительного интервала (или полная абсолютная погрешность измерения):

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta\rho_s^2 + \delta\rho^2} = \sqrt{0{,}0002499^2 + 0{,}00004618^2} =$$
$$= \sqrt{6{,}458 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0002541$$

(мы оставляем только три значащие цифры).

Форма окончательного ответа:

$$\rho = 0{,}007363 \pm 0{,}0002541\,.$$

Делаем правильное округление результата и переводим в систему СИ:

$$\rho = 0{,}00736 \pm 0{,}00025\,\frac{\text{г}}{\text{мм}^3} = 7360 \pm 250\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Относительная погрешность измерения плотности:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\% = \frac{250}{7360} \cdot 100\% = 3{,}4\%\ .$$

Приложение.
Результаты снятых измерений с различными телами

Тело цилиндрической формы

Вариант 1

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 12{,}5$	$h_1 = 21{,}3$	$m = 23{,}3$
2	$d_2 = 12{,}7$	$h_2 = 21{,}4$	
3	$d_3 = 12{,}6$	$h_3 = 21{,}3$	
4	$d_4 = 12{,}5$	$h_4 = 21{,}5$	
5	$d_5 = 12{,}6$	$h_5 = 21{,}4$	

Вариант 2

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 13{,}2$	$h_1 = 22{,}6$	$m = 26{,}9$
2	$d_2 = 13{,}1$	$h_2 = 22{,}4$	
3	$d_3 = 13{,}1$	$h_3 = 22{,}5$	
4	$d_4 = 13{,}2$	$h_4 = 22{,}5$	
5	$d_5 = 13{,}3$	$h_5 = 22{,}6$	

Вариант 3

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 14{,}7$	$h_1 = 23{,}8$	$m = 31{,}5$
2	$d_2 = 14{,}8$	$h_2 = 22{,}9$	
3	$d_3 = 14{,}6$	$h_3 = 22{,}7$	
4	$d_4 = 14{,}7$	$h_4 = 22{,}6$	
5	$d_5 = 14{,}8$	$h_5 = 22{,}7$	

Вариант 4

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 15{,}6$	$h_1 = 24{,}2$	$m = 12{,}5$
2	$d_2 = 15{,}7$	$h_2 = 24{,}1$	
3	$d_3 = 15{,}4$	$h_3 = 24{,}3$	
4	$d_4 = 15{,}5$	$h_4 = 24{,}4$	
5	$d_5 = 15{,}5$	$h_5 = 24{,}3$	

Вариант 5

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 16{,}4$	$h_1 = 25{,}4$	$m = 3{,}6$
2	$d_2 = 16{,}4$	$h_2 = 25{,}3$	
3	$d_3 = 16{,}5$	$h_3 = 25{,}2$	
4	$d_4 = 16{,}7$	$h_4 = 25{,}4$	
5	$d_5 = 16{,}6$	$h_5 = 25{,}3$	

Вариант 6

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 17{,}6$	$h_1 = 26{,}7$	$m = 57{,}8$
2	$d_2 = 17{,}5$	$h_2 = 26{,}7$	
3	$d_3 = 17{,}5$	$h_3 = 26{,}6$	
4	$d_4 = 17{,}6$	$h_4 = 26{,}8$	
5	$d_5 = 17{,}7$	$h_5 = 26{,}9$	

Вариант 7

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 18{,}3$	$h_1 = 27{,}8$	$m = 63{,}6$
2	$d_2 = 18{,}1$	$h_2 = 27{,}9$	
3	$d_3 = 18{,}3$	$h_3 = 27{,}8$	
4	$d_4 = 18{,}4$	$h_4 = 28{,}0$	
5	$d_5 = 18{,}2$	$h_5 = 27{,}9$	

Вариант 8

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 19{,}5$	$h_1 = 28{,}3$	$m = 65{,}7$
2	$d_2 = 19{,}4$	$h_2 = 28{,}1$	
3	$d_3 = 19{,}5$	$h_3 = 28{,}3$	
4	$d_4 = 19{,}6$	$h_4 = 28{,}2$	
5	$d_5 = 19{,}7$	$h_5 = 28{,}1$	

Вариант 9

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 20{,}8$	$h_1 = 29{,}4$	$m = 26{,}9$
2	$d_2 = 20{,}7$	$h_2 = 29{,}5$	
3	$d_3 = 20{,}8$	$h_3 = 29{,}6$	
4	$d_4 = 20{,}7$	$h_4 = 29{,}3$	
5	$d_5 = 20{,}9$	$h_5 = 29{,}4$	

Вариант 10

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 21{,}4$	$h_1 = 30{,}8$	$m = 7{,}75$
2	$d_2 = 21{,}5$	$h_2 = 30{,}9$	
3	$d_3 = 21{,}5$	$h_3 = 31{,}0$	
4	$d_4 = 21{,}4$	$h_4 = 30{,}8$	
5	$d_5 = 21{,}3$	$h_5 = 30{,}7$	

Вариант 11

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 12{,}5$	$h_1 = 21{,}3$	$m = 23{,}3$
2	$d_2 = 12{,}7$	$h_2 = 21{,}4$	
3	$d_3 = 12{,}6$	$h_3 = 21{,}3$	
4	$d_4 = 12{,}5$	$h_4 = 21{,}5$	
5	$d_5 = 12{,}6$	$h_5 = 21{,}4$	

Вариант 12

№ измерения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 13{,}3$	$h_1 = 22{,}5$	$m = 27{,}0$
2	$d_2 = 13{,}2$	$h_2 = 22{,}3$	
3	$d_3 = 13{,}1$	$h_3 = 22{,}4$	
4	$d_4 = 13{,}0$	$h_4 = 22{,}4$	
5	$d_5 = 13{,}1$	$h_5 = 22{,}5$	

Вариант 13

№ изме-рения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 14{,}8$	$h_1 = 23{,}8$	$m = 31{,}3$
2	$d_2 = 14{,}8$	$h_2 = 22{,}7$	
3	$d_3 = 14{,}6$	$h_3 = 22{,}5$	
4	$d_4 = 14{,}5$	$h_4 = 22{,}6$	
5	$d_5 = 14{,}4$	$h_5 = 22{,}7$	

Вариант 14

№ изме-рения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 15{,}7$	$h_1 = 24{,}1$	$m = 12{,}6$
2	$d_2 = 15{,}8$	$h_2 = 24{,}1$	
3	$d_3 = 15{,}3$	$h_3 = 24{,}4$	
4	$d_4 = 15{,}4$	$h_4 = 24{,}5$	
5	$d_5 = 15{,}6$	$h_5 = 24{,}2$	

Вариант 15

№ изме-рения	d, мм	h, мм	m, г
1	$d_1 = 16{,}6$	$h_1 = 25{,}3$	$m = 3{,}6$
2	$d_2 = 16{,}3$	$h_2 = 25{,}5$	
3	$d_3 = 16{,}6$	$h_3 = 25{,}5$	
4	$d_4 = 16{,}5$	$h_4 = 25{,}4$	
5	$d_5 = 16{,}4$	$h_5 = 25{,}2$	

Тело в форме параллелепипеда

Вариант 16

№ изме-рения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 12{,}5$	$b_1 = 21{,}3$	$c_1 = 13{,}2$	$m = 29.8$
2	$a_2 = 12{,}7$	$b_2 = 21{,}2$	$c_2 = 13{,}2$	
3	$a_3 = 12{,}6$	$b_3 = 21{,}3$	$c_3 = 13{,}1$	
4	$a_4 = 12{,}5$	$b_4 = 21{,}4$	$c_4 = 13{,}3$	

5	$a_5 = 12{,}6$	$b_5 = 21{,}5$	$c_5 = 13{,}1$	

Вариант 17

№ изме-рения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 13{,}2$	$b_1 = 22{,}6$	$c_1 = 11{,}7$	$m = 9.54$
2	$a_2 = 13{,}3$	$b_2 = 22{,}5$	$c_2 = 11{,}7$	
3	$a_3 = 13{,}4$	$b_3 = 22{,}7$	$c_3 = 11{,}8$	
4	$a_4 = 13{,}3$	$b_4 = 22{,}6$	$c_4 = 11{,}6$	
5	$a_5 = 13{,}2$	$b_5 = 22{,}5$	$c_5 = 11{,}8$	

Вариант 18

№ изме-рения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 14{,}7$	$b_1 = 23{,}8$	$c_1 = 12{,}7$	$m = 12.8$
2	$a_2 = 14{,}9$	$b_2 = 23{,}9$	$c_2 = 12{,}6$	
3	$a_3 = 14{,}8$	$b_3 = 24{,}0$	$c_3 = 12{,}5$	
4	$a_4 = 14{,}6$	$b_4 = 23{,}7$	$c_4 = 12{,}8$	
5	$a_5 = 14{,}6$	$b_5 = 23{,}7$	$c_5 = 12{,}8$	

Вариант 19

№ изме-рения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 15{,}6$	$b_1 = 24{,}2$	$c_1 = 16{,}3$	$m = 48.2$
2	$a_2 = 15{,}5$	$b_2 = 24{,}3$	$c_2 = 16{,}1$	
3	$a_3 = 15{,}6$	$b_3 = 24{,}3$	$c_3 = 16{,}2$	
4	$a_4 = 15{,}7$	$b_4 = 24{,}2$	$c_4 = 16{,}4$	
5	$a_5 = 15{,}6$	$b_5 = 24{,}1$	$c_5 = 16{,}2$	

Вариант 20

№ изме-рения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 16{,}4$	$b_1 = 25{,}4$	$c_1 = 17{,}1$	$m = 15.7$
2	$a_2 = 16{,}5$	$b_2 = 25{,}2$	$c_2 = 17{,}2$	
3	$a_3 = 16{,}6$	$b_3 = 25{,}3$	$c_3 = 17{,}2$	
4	$a_4 = 16{,}3$	$b_4 = 25{,}4$	$c_4 = 17{,}0$	
5	$a_5 = 16{,}3$	$b_5 = 25{,}5$	$c_5 = 17{,}0$	

Вариант 21

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 17,6$	$b_1 = 26,7$	$c_1 = 8,8$	$m = 11.5$
2	$a_2 = 17,7$	$b_2 = 26,8$	$c_2 = 8,8$	
3	$a_3 = 17,8$	$b_3 = 26,6$	$c_3 = 8,9$	
4	$a_4 = 17,8$	$b_4 = 26,6$	$c_4 = 8,7$	
5	$a_5 = 17,5$	$b_5 = 26,7$	$c_5 = 8,9$	

Вариант 22

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 18,3$	$b_1 = 27,8$	$c_1 = 9,5$	$m = 36.1$
2	$a_2 = 18,4$	$b_2 = 27,7$	$c_2 = 9,5$	
3	$a_3 = 18,2$	$b_3 = 27,6$	$c_3 = 9,4$	
4	$a_4 = 18,4$	$b_4 = 27,9$	$c_4 = 9,6$	
5	$a_5 = 18,3$	$b_5 = 27,9$	$c_5 = 9,4$	

Вариант 23

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 19,5$	$b_1 = 28,2$	$c_1 = 11,6$	$m = 15.6$
2	$a_2 = 19,4$	$b_2 = 28,3$	$c_2 = 11,7$	
3	$a_3 = 19,6$	$b_3 = 28,3$	$c_3 = 11,5$	
4	$a_4 = 19,5$	$b_4 = 28,1$	$c_4 = 11,5$	
5	$a_5 = 19,4$	$b_5 = 28,2$	$c_5 = 11,7$	

Вариант 24

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 20,8$	$b_1 = 29,4$	$c_1 = 21,8$	$m = 11.3$
2	$a_2 = 20,9$	$b_2 = 29,5$	$c_2 = 21,8$	
3	$a_3 = 20,7$	$b_3 = 29,5$	$c_3 = 21,7$	
4	$a_4 = 20,7$	$b_4 = 29,6$	$c_4 = 21,7$	
5	$a_5 = 20,8$	$b_5 = 29,3$	$c_5 = 21,9$	

Вариант 25

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 21{,}4$	$b_1 = 30{,}8$	$c_1 = 42{,}4$	$m = 18.1$
2	$a_2 = 21{,}2$	$b_2 = 31{,}0$	$c_2 = 42{,}2$	
3	$a_3 = 21{,}1$	$b_3 = 30{,}7$	$c_3 = 42{,}1$	
4	$a_4 = 21{,}5$	$b_4 = 30{,}6$	$c_4 = 42{,}6$	
5	$a_5 = 21{,}6$	$b_5 = 30{,}7$	$c_5 = 42{,}5$	

Вариант 26

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 12{,}7$	$b_1 = 21{,}5$	$c_1 = 13{,}3$	$m = 30.1$
2	$a_2 = 12{,}5$	$b_2 = 21{,}4$	$c_2 = 13{,}2$	
3	$a_3 = 12{,}5$	$b_3 = 21{,}5$	$c_3 = 13{,}3$	
4	$a_4 = 12{,}6$	$b_4 = 21{,}7$	$c_4 = 13{,}4$	
5	$a_5 = 12{,}7$	$b_5 = 21{,}6$	$c_5 = 13{,}5$	

Вариант 27

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 13{,}4$	$b_1 = 22{,}8$	$c_1 = 11{,}8$	$m = 9.58$
2	$a_2 = 13{,}5$	$b_2 = 22{,}6$	$c_2 = 11{,}9$	
3	$a_3 = 13{,}6$	$b_3 = 22{,}8$	$c_3 = 11{,}9$	
4	$a_4 = 13{,}4$	$b_4 = 22{,}9$	$c_4 = 11{,}7$	
5	$a_5 = 13{,}3$	$b_5 = 22{,}7$	$c_5 = 11{,}6$	

Вариант 28

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 14{,}8$	$b_1 = 23{,}9$	$c_1 = 12{,}6$	$m = 13.0$
2	$a_2 = 15{,}0$	$b_2 = 23{,}7$	$c_2 = 12{,}8$	
3	$a_3 = 14{,}9$	$b_3 = 24{,}1$	$c_3 = 12{,}7$	
4	$a_4 = 14{,}7$	$b_4 = 23{,}8$	$c_4 = 12{,}9$	
5	$a_5 = 14{,}8$	$b_5 = 23{,}9$	$c_5 = 12{,}7$	

Вариант 29

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 15{,}8$	$b_1 = 24{,}3$	$c_1 = 16{,}5$	$m = 48.5$
2	$a_2 = 15{,}6$	$b_2 = 24{,}4$	$c_2 = 16{,}2$	
3	$a_3 = 15{,}7$	$b_3 = 24{,}5$	$c_3 = 16{,}3$	
4	$a_4 = 15{,}9$	$b_4 = 24{,}3$	$c_4 = 16{,}6$	
5	$a_5 = 15{,}8$	$b_5 = 24{,}2$	$c_5 = 16{,}3$	

Вариант 30

№ измерения	a, мм	b, мм	c, мм	m, г
1	$a_1 = 16{,}7$	$b_1 = 25{,}6$	$c_1 = 17{,}2$	$m = 15.9$
2	$a_2 = 16{,}6$	$b_2 = 25{,}3$	$c_2 = 17{,}4$	
3	$a_3 = 16{,}7$	$b_3 = 25{,}4$	$c_3 = 17{,}5$	
4	$a_4 = 16{,}4$	$b_4 = 25{,}4$	$c_4 = 17{,}1$	
5	$a_5 = 16{,}6$	$b_5 = 25{,}6$	$c_5 = 17{,}2$	

Лабораторная работа 1.1
Изучение погрешностей измерения ускорения свободного падения с помощью математического маятника

1. Теоретические сведения

Ускорение свободного падения $\vec{g}$ вызывается силой тяжести $\vec{P}$, которая определяется вторым законом Ньютона:

$$\vec{P} = m\vec{g} . \tag{1.1}$$

Вследствие вращения Земли около своей оси сила тяжести является равнодействующей двух сил: силы гравитационного притяжения (силы тяготения) $\vec{F}_{\text{т}}$ и центробежной силы инерции $\vec{F}_{\text{цб}}$.

Закон всемирного тяготения формулируется следующим образом. *Модуль силы тяготения между двумя материальными точками пропорционален произведению масс этих точек* m_1 *и* m_2 *и обратно пропорционален квадрату расстояния r между ними:*

$$F_{\text{т}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.2}$$

где G – гравитационная постоянная. Сила тяготения направлена вдоль прямой, соединяющей материальные точки. Модуль центробежной силы инерции:

$$F_{\text{цб}} = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos\varphi, \tag{1.3}$$

где m – масса тела (материальной точки); ω – угловая скорость вращения Земли; R – радиус Земли; φ – широта местности, где находится тело.

Центробежная сила инерции перпендикулярна оси вращения Земли и направлена от оси вращения (см. рис. 1). Для тела, находящегося на высоте h над поверхностью Земли, закон всемирного тяготения (1.2) запишется:

$$F_{\text{т}} = G\frac{mM}{\left(R+h\right)^2} , \tag{1.4}$$

где m, M – масса тела и масса Земли. Сила тяжести $\vec{P}$ равна силе тяготения $\vec{F}_{\text{т}}$ только на полюсах Земли, где широта местности φ = π/2 и центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{цб}}=0$ (см. (1.3)). Во всех остальных точках земной поверхности силы $\vec{P}$ и $\vec{F}_{\text{т}}$ не равны между собой. Это различие обусловлено вращением Земли и, следовательно, неинерциальностью системы отсчета, связанной с Землей. Ввиду малой угловой скорости Земли (ω = 7,3·10^{-5} рад/с) указанное различие достаточно мало, и во многих случаях силу тяжести можно считать равной силе тяготения и направленной к центру Земли ($\vec{P} = \vec{F}_{\text{т}}$). При этом условии из (1.1) и (1.4) ускорение свободного падения:

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}. \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что *величина g зависит от массы M и радиуса R Земли и от высоты h тела над ее поверхностью*. У поверхности Земли $h = 0$ и ускорение:

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{1.6}$$

Если учесть вращение Земли, то величина силы тяжести P и, следовательно, ускорение g будет зависеть от центробежной силы инерции $F_{цб}$ (см. (1.3) и рис. 1). На экваторе ($\varphi = 0$) величина $F_{цб}$ максимальная, на полюсах ($\varphi = \pi/2$) $F_{цб} = 0$. С увеличением угла φ (широты местности) $F_{цб}$ уменьшается (см. (1.3)), и равнодействующая сил $\vec{F}_т$ и $\vec{F}_{цб}$, т. е. сила тяжести $\vec{P}$, увеличивается, и будет увеличиваться ускорение g. На экваторе (см. рис. 1) $P = mg_э = F_т - F_{цб}$, откуда ускорение на экваторе $g_э = (F_т - F_{цб})/m = 9{,}73$ м/с^2. На полюсах $g_п = 9{,}83$ м/с^2.

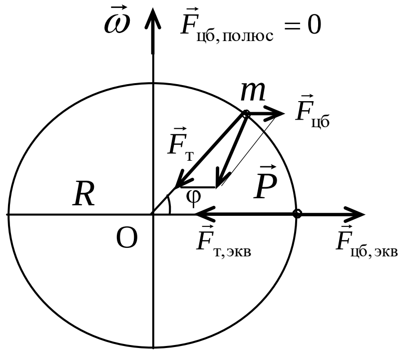


Рис. 1

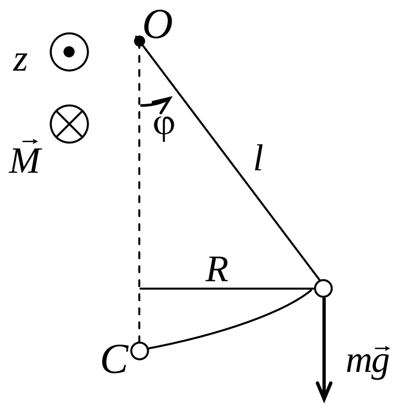


Рис. 2

Маятник – общее название механической системы, совершающей колебательное движение под действием, так называемой, восстанавливающей силы, т.е. силы, стремящейся возвратить систему в положение равновесия. В большинстве случаев такой восстанавливающей силой является сила тяжести, а механической системой является твердое тело, способное совершать колебания около неподвижной точки или оси.

Мы будем рассматривать простейший случай маятника – математический маятник. *Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити или невесомом и нерастяжимом стержне, совершающую колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.*

Математический маятник имеет одну степень свободы, т. е. его положение в пространстве полностью определяется углом φ, который отсчитывается от положения равновесия в указанном направлении (см. рис. 2). Силой трения в подвесе маятника и силой сопротивления среды (воздуха) пренебрегаем. Угол отклонения маятника φ должен быть достаточно мал (несколько градусов). При таком условии можно приближенно считать, что маятник совершает малые или гармонические колебания под действием силы тяжести (квазиупругой силы). Для получения уравнения, описывающего гармонические колебания, применим уравнение динамики вращательного движения в проекциях на ось *Oz:*

$$J_z \varepsilon_z = M_z, \tag{1.7}$$

где $J_z = ml^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси *Oz*, проходящей через точку подвеса маятника *O*, $\varepsilon_z = \dfrac{d^2\varphi_z}{dt^2}$ – проекция углового ускорения на ось *Oz*, которая есть вторая производная по времени от угла поворота φ_z относительно оси *Oz* (в дальнейшем мы будем обозначать $\varphi_z = \varphi$), M_z – проекция момента силы тяжести на ось *Oz*.

На рис. 2 ось *Oz* направлена «к нам» (кружок с точкой, обозначенный буквой *z*). Момент силы тяжести $\vec{M}$ возникает при отклонении маятника от положения равновесия и направлен по правилу правого винта против оси *Oz* «от нас» (на рис. 2 вектор $\vec{M}$ показан в виде кружка с крестиком), следовательно, проекция M_z отрицательная. Модуль момента силы тяжести $M = mgR = mgl\sin\varphi$ (см. рис. 2). Так как рассматриваются малые колебания, то $\sin\varphi = \varphi$, тогда $M_z = -mgl\varphi$. В результате уравнение (1.7) запишется:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \tag{1.8}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \tag{1.9}$$

Дифференциальное уравнение (1.8) описывает гармонические колебания математического маятника. *Величина* ω_0 *называется циклической или круговой частотой собственных колебаний маятника* и выражается через период колебаний *T:*

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.10}$$

Из (1.9), (1.10) можно получить формулу для периода колебаний математического маятника (формула Гюйгенса):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (1.11)$$

Период T не зависит от амплитуды колебаний. Такие колебания называются изохронными. Таким образом, *гармонические колебания являются изохронными.* Из формулы (1.11) находится ускорение свободного падения:

$$g = \frac{(2\pi)^2 l}{T^2} \qquad (1.12)$$

2. Цель работы. Схема экспериментальной установки

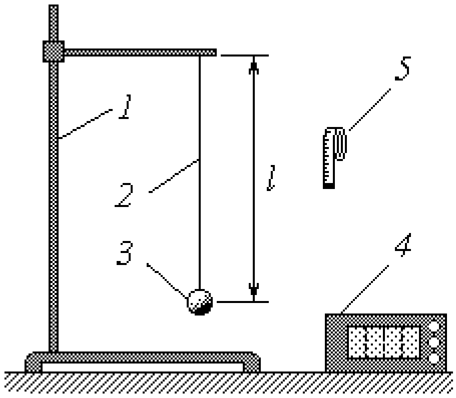
Целью работы является:

1) изучение колебаний математического маятника: измерение периода его колебаний и определение ускорения свободного падения;

2) оценка случайной и приборной погрешностей измерения;

3) изучение зависимости ширины доверительного интервала от числа опытов и доверительной вероятности.

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке:



1 – штатив;
2 – нить длиной l;
3 – груз;
4 – секундомер;
5 – сантиметровая лента

3. Описание методики измерений

В данной работе математический маятник представляет собой небольшой массивный груз, подвешенный на длинной легкой нити. При малых углах отклонения нити от вертикали колебания груза близки к гармоническим и их период T определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \qquad (3.1)$$

где l – длина нити; g – ускорение свободного падения. Выразим из формулы (3.1) величину g:

$$g = \frac{(2\pi)^2 l}{T^2} \qquad (3.2)$$

Таким образом, измерив длину нити и период колебаний маятника, можно опытным путем найти ускорение свободного падения. Для получения более точного результата следует измерять не время одного полного колебания (период) T, а время нескольких (N) колебаний t. Учитывая, что $T = \frac{t}{N}$, преобразуем выражение (3.2) к виду

$$g = \frac{(2\pi N)^2 l}{t^2} \qquad (3.3)$$

Из формулы (3.1) следует, что при фиксированной длине нити l период колебаний маятника T представляет собой постоянную величину (g = const для данной географической точки). Поэтому при неоднократном измерении времени t одного и того же количества N колебаний, казалось бы, должен получаться неизменный результат. Однако даже при использовании сравнительно точного прибора (например, электронного секундомера) можно убедиться в том, что от опыта к опыту значение t изменяется то в большую, то в меньшую сторону. Различия в результатах измерения одной и той же величины объясняются случайными погрешностями.

Если при многократных измерениях количество колебаний N брать неизменным, то расчетную формулу (3.3) для определения ускорения свободного падения удобнее представить в виде

$$g = \frac{C}{t^2}\,, \qquad (3.4)$$

где

$$C = (2\pi N)^2 l \qquad (3.5)$$

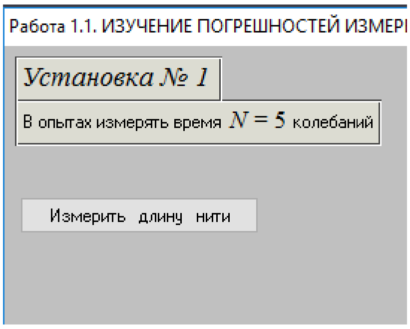
4. Порядок измерений и обработки результатов

Упражнение 1. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТА n ИЗМЕРЕНИЙ

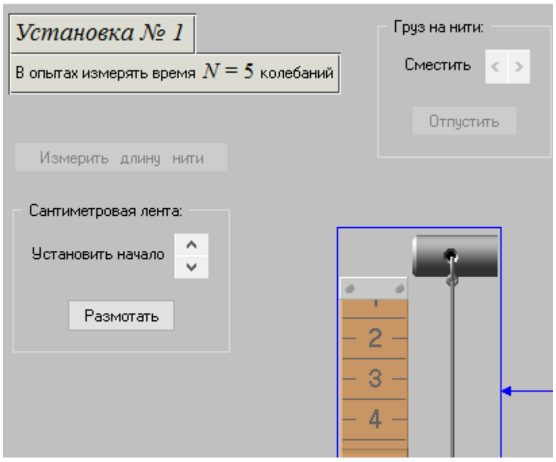
1. У преподавателя узнайте Ваш вариант лабораторной работы. Номер лабораторной установки, число измерений n и число колебаний N маятника в данном упражнении и выбирается в соответствие с вариантом лабораторной работы (см. таблицу 3 в конце описания к данной работе).

2. С помощью сантиметровой ленты измерьте длину нити l, т.е. расстояние от точки подвеса до центра тяжести груза. Выразив величину l в метрах, по формуле (3.5) рассчитайте константу C. Запишите полученный результат (в метрах) в тетрадь.

Для того, чтобы измерить длину нити в виртуальном варианте лабораторной работы, необходимо нажать мышью на кнопку с надписью «Измерить длину нити».

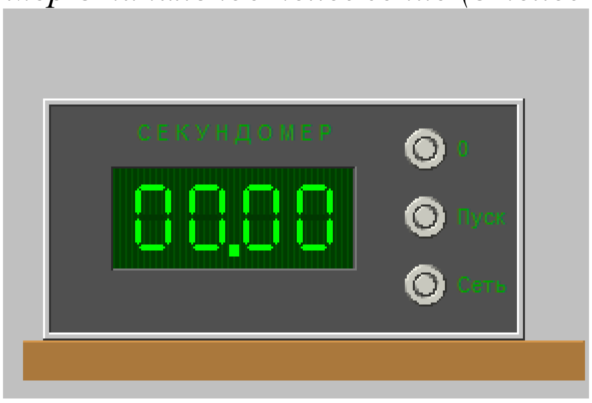


После этого появятся кнопки управления сантиметровой лентой. Указателями «вверх-вниз» необходимо установить начало ленты точно на место крепления нити. После этого необходимо нажать на кнопку «Размотать». После разматывания ленты определить расстояние l от места крепления ленты до центра груза. После этого необходимо нажать на кнопку «Готово».



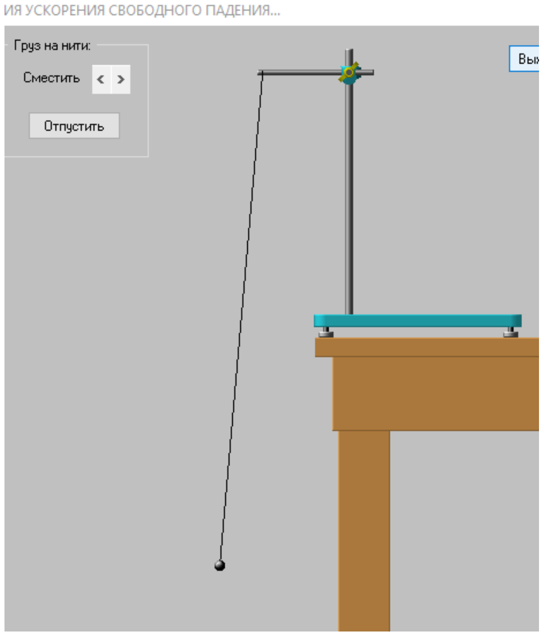
3. Научитесь работе с секундомером.

В виртуальном варианте лабораторной работы секундомер имеет 3 кнопки: «0», «Пуск» и «Сеть». Кнопка «Сеть» включает секундомер. Кнопка «Пуск» поочередно запускает и останавливает секундомер, кнопка «0» ставит секундомер в начальное положение (в положение 0 секунд).



4. Выведите маятник из положения равновесия и отпустите, наблюдая начавшиеся колебания. Помните, что максимальный угол отклонения нити от вертикали при этом должен быть малым (примерно в пределах 10°). Следите за тем, чтобы колебания маятника происходили в вертикальной плоскости (груз не должен описывать круги или «восьмерки»).

В виртуальном варианте лабораторной работы выведение маятника из положения равновесия и его запуск выполняется с помощью группы кнопок «Груз на нити». В этой группе стрелками «<» и «>» производится отклонение маятника влево и вправо соответственно, а кнопкой «Отпустить» осуществляется запуск маятника. После запуска маятника кнопка «Отпустить» заменяется кнопкой «Остановить».



5. Не останавливая колебаний маятника, для тренировки несколько раз измерьте время t, в течение которого он совершает N полных колебаний.

6. Повторите описанные выше измерения n раз (n=20, 21, 22, 23, 24, 25 – в зависимости от Вашего варианта) заполните первые два столбца таблицы 1.

Таблица 1

Номер опыта	t, *с*	g, *м/с*^{2}	Δg, *м/с*^{2}	$(\Delta g)^2$, $(м/с^2)^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

14				
15				
16				
17				
18				
…	…	…	…	…
n				
		$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i}{n} = \ldots$		$\sum_{i=1}^{n} (g_i - \bar{g})^2 = \ldots$

7. Для каждого опыта рассчитайте ускорение свободного падения по формуле (3.4). Результаты расчетов занесите в третий столбец табл. 1.

8. Изучите методику оценки случайной и приборной погрешностей измерения. Строго говоря, для вычисления погрешностей измерения g мы должны пользоваться формулами для косвенных измерений, поскольку величина g вычисляется по формуле (3.4), согласно которой результатом прямого измерения является величина t. Тем не менее, поскольку результатом прямого измерения является лишь одна величина, для приближенного оценочного расчета можно воспользоваться формулами прямого измерения и считать, что результатом такого измерения является непосредственно величина g (см. Часть 1, раздел 5 описания к Лабораторной работе 1.0).

9. Рассчитайте среднее значение $\bar{g}$ и запишите его в таблицу.

10. Для каждого i-го опыта найдите отклонение значения от среднего $\Delta g_i = g_i - \bar{g}$, а также квадрат отклонения $(\Delta g_i)^2$. Результаты расчетов занесите в два последних столбца табл. 1.

11. Рассчитайте сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n} (g_i - \bar{g})^2$ и запишите ее в соответствующую ячейку таблицы.

12. Вычислите среднеквадратичную ошибку σ по формуле

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (g_i - \bar{g})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

13. Выберите из таблицы приложения значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ для n опытов и доверительной вероятности α = 0,95. Рассчитайте по формуле

$$\Delta_s g = t_{N,\alpha} \cdot \sigma_g$$

и запишите в тетрадь случайную погрешность измерения $\Delta_s g$.

14. Определите абсолютные приборные погрешности прямых измерений длины нити δl и времени δt. Приборная погрешность измерения

длины нити равна $\delta l = 0.25\,\text{см} = 0.0025\,\text{м}$, приборная погрешность измерения времени равна $\delta t = 0.01\,\text{с}$. Оцените относительные ошибки $E_l = \dfrac{\delta l}{l}$ и $E_t = \dfrac{\delta t}{t_{\min}}$, где $t_{\min}$ - минимальное значение времени из второго столбца таблицы 1.

15. Оцените абсолютную приборную погрешность косвенного измерения ускорения свободного падения δg с помощью формулы

$$\delta g = \bar{g}\sqrt{E_l^{\,2} + (-2E_t)^2}$$

16. Оцените полную полуширину доверительного интервала (полную абсолютную погрешность) Δ и относительную погрешность E с помощью формулы

$$\Delta g = \sqrt{\Delta_s g^2 + \delta g^2}\,,$$

$$E = \frac{\Delta g}{\bar{g}} \cdot 100\%\,.$$

Запишите окончательный результат измерений в виде

$$g = \bar{g} \pm \Delta g$$

Упражнение 2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТА 5 ИЗМЕРЕНИЙ

Упражнение 2 выполняется по усмотрению преподавателя.

1. Выберите из табл. 1 первые пять значений времени t и ускорения свободного падения g и перепишите их во второй и третий столбец табл. 2.

Таблица 2

Номер опыта	t, *с*	g, *м/с*^{2}	Δg, *м/с*^{2}	$(\Delta g)^2$, $(м/с^2)^2$
1				
2				
3				
4				
5				
		$\bar{g} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} g_i}{5} = \ldots$		$\sum_{i=1}^{5}(g_i - \bar{g})^2 = \ldots$

2. Выполните для данной таблицы пп. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 упражнения 1, считая что число измерений равно $n = 5$.

3. По результатам проведенных измерений и расчетов сделайте выводы.

5. Контрольные вопросы

1. Сформулировать закон всемирного тяготения.
2. Какая сила вызывает ускорение свободного падения?
3. Зависимость ускорения свободного падения от высоты над поверхностью Земли.
4. Зависимость ускорения свободного падения от широты местности.
5. Что называется маятником?
6. Что называется математическим маятником?
7. Дифференциальное уравнение, описывающее колебания математического маятника.
8. Формула периода колебаний математического маятника.
9. Как находится ускорение свободного падения в данной работе?
10. Как вычисляется погрешность результата измерений в данной работе?
11.Абсолютная и относительная ошибки измерений.
12. Случайная и приборная погрешности.
13. Оценка случайной ошибки. Доверительный интервал.
14. Вычисление погрешностей измерений в данной работе.
15. Простые задачи на математический маятник.

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 3

Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки	Число измерений n в упражнении 1	Число колебаний маятника N в упражнении 1
1	1	16	10
2	2	18	9
3	3	20	8
4	4	22	7
5	5	24	6
6	6	16	10
7	1	18	9
8	2	20	8
9	3	22	7
10	4	24	6

11	5	16	10
12	6	18	9
13	1	20	8
14	2	22	7
15	3	24	6
16	4	16	10
17	5	18	9
18	6	20	8
19	1	22	7
20	2	24	6
21	3	16	10
22	4	18	9
23	5	20	8
24	6	22	7
25	1	24	6
26	2	16	10
27	3	18	9
28	4	20	8
29	5	22	7
30	6	24	6

Лабораторная работа 1.2
Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса

1. Теоретические сведения

В природе существуют два режима течения жидкости. Течение жидкости, при котором отсутствуют изменения (пульсации) скоростей и давлений, приводящие к перемешиванию жидкости, называют *ламинарным* (от латинского слова lamina – слой). В частности, ламинарное течение наблюдается в тонком пограничном слое вблизи поверхности тел при обтекании их жидкостью. Течение жидкости с пульсациями скоростей и давлений, приводящие к перемешиванию жидкости, называют *турбулентным* (от латинского слова turbulentus – беспорядочный). Например, движение воды в горном потоке, водопаде или за кормой быстроплывущего корабля является турбулентным. Применяют также термины «*ламинарный режим движения», «турбулентный режим движения*».

Течение жидкости, при котором параметры (скорость и давление) в каждой точке остаются постоянными, т. е. не изменяются с течением времени, является *стационарным* (или у*становившемся*). Течение жидкости, при котором параметры в каждой точке изменяются с течением времени, является *нестационарным* (или *неустановившемся*).

При течении жидкости между слоями возникают *силы внутреннего трения*, которые оказывают сопротивление относительному перемещению ее слоев. Это свойство называется *вязкостью*. С молекулярной точки зрения вязкость объясняется, главным образом, не переходом молекул из одного слоя в другой, как в газах, а межмолекулярным взаимодействием соседних слоев жидкости. Это отличие вызвано значительно меньшими расстояниями между молекулами в жидкостях, чем в газах.

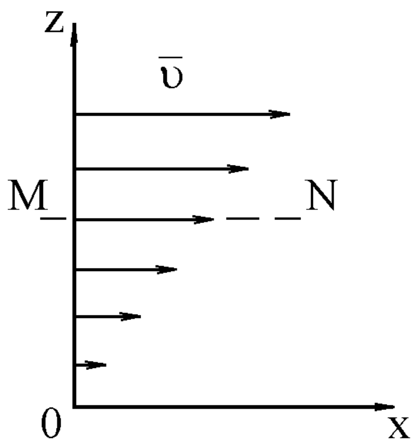


Рис. 1

Для количественного описания вязкости рассмотрим ламинарное течение жидкости, в которой скорость частиц меняется от слоя к слою. Выделим в жидкости некоторую плоскость *MN*, нормаль к которой перпендикулярна скорости течения v и совпадает с осью *Oz* (рис. 1). Модуль скорости v изменяется только в направлении оси *Oz*. Тогда изменение модуля скорости в этом направлении описывается производной dv/dz, которая называется *градиентом модуля скорости* (более точно, эта производная является проекцией градиента на ось *z*, т. к. градиент по определению является вектором). Величина dv/dz *показывает, как быстро изменяется модуль скорости в направлении оси z, перпендикулярном направлению движения ее слоев.* Экспериментально найдено, что модуль силы:

$$F = \eta\left|\frac{dv}{dz}\right|S, \qquad (1.1)$$

где η – *динамическая вязкость*, или просто *вязкость*, которая называется также *коэффициентом вязкости*, Па·с, S – площадь поверхности соприкасающихся слоев жидкости, на которую действует сила F, м^2, dv/dz – градиент модуля скорости, 1/с.

Формула (1.1) называется *законом Ньютона для внутреннего трения или вязкости.* В этой формуле градиент взят по модулю, т. к. его проекция может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления оси z и характера изменения скорости, а модуль силы F всегда положительный. Закон (1.1) является верным для любого изменения скорости, а не только для линейного, показанного на рис. 1.

Из формулы (1.1) видно, что *вязкость* η *есть физическая величина, которая численно равна силе внутреннего трения F, действующей на единицу площади (1 м^2) соприкасающихся слоев, необходимой для поддержания разности скоростей, равной единице, между двумя слоями жидкости, находящимися на единичном расстоянии (1 м).* При ламинарном течении и при постоянной температуре величина η не зависит от градиента dv/dz. Единицей вязкости является 1 Па·с (паскаль-секунда). При такой вязкости на площадь соприкасающихся слоев 1 м^2 при градиенте скорости 1 м/с на 1 м действует сила внутреннего трения, равная 1 Н.

Вязкость η *зависит от природы жидкости* (*химической структуры*) *и температуры.* Обычно *величина* η *возрастает с увеличением молярной массы и уменьшается с повышением температуры.* Температурная зависимость вязкости определяется природой жидкости. Например, при увеличении температуры на 10°С (от 20 до 30 °С) вязкость воды уменьшается на 20 %, а вязкость глицерина – в 2,5 раза. Интересно отметить, что в природе имеется единственная жидкость – изотоп гелия ^{3}He, у которой при температуре $T \leq 2{,}2$ К вязкость $\eta = 0$, т. е. жидкость находится в сверхтекучем состоянии. Объясняется это необычное свойство гелия квантовой теорией. Характер движения жидкости определяется безразмерным числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \qquad (1.2)$$

где ρ – плотность жидкости, кг/м^3, v – скорость течения, м/с, l – характерный линейный размер (например, диаметр трубы, по которой течет жидкость или радиус шара, движущегося в жидкости), м.

---

* Рейнольдс Осборн(1842–1912) – английский физик и инженер.

При больших числах Рейнольдса вязкость η очень мала, т. е. жидкость может рассматриваться как идеальная. Однако такое утверждение неверно для движения жидкости вблизи поверхности твердого тела.

Число Рейнольдса равно по порядку величине отношению кинетической энергии жидкости к потере этой энергии, обусловленной вязкостью. Иными словами, величина Re определяет относительную роль инерции и вязкости при движении жидкости. При больших числах Re основную роль играет инерция, а при малых – вязкость. Рассмотренные выше ламинарное и турбулентное течения можно связать с числом Рейнольдса. При малых числах Re течение будет ламинарным. С увеличением числа Re течение становится турбулентным. Этот переход наблюдается при определенном значении числа Re, которое называется *критическим* ($\mathrm{Re}_{кр} = 2320$).

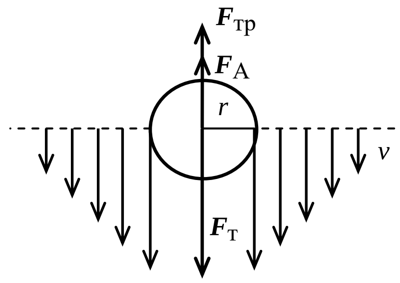


Рис. 2

Силы внутреннего трения или вязкости возникают и при движении твердого тела в покоящейся жидкости. Жидкость, обладающая вязкостью, прилипает к поверхности тела, которое она обтекает. Следовательно, ближний к телу слой жидкости движется со скоростью тела, другой слой, находящийся на некотором расстоянии от тела, движется медленнее из-за наличия сил трения, и тормозит движение слоя, прилегающего к телу. Чем дальше от тела слой, тем медленнее он движется (рис. 2). Расчет силы внутреннего трения, действующей на движущееся в жидкости тело, является сложной задачей. Эта сила зависит от свойств жидкости и от формы движущегося в ней тела. При небольших скоростях и небольших размерах шарообразных тел сопротивление жидкости обусловлено только силами внутреннего трения. Для этого случая Стокс* вывел формулу силы внутреннего трения (*формула Стокса*):

$$F_{тр} = 6\pi\eta vr, \tag{1.3}$$

где r – радиус шара, м.

Формула Стокса имеет многочисленные применения. Например, с помощью этой формулы находится скорость оседания мелких капелек тумана, частиц ила и т. д. Формула получила широкое применение в важных физических экспериментах (определение заряда электрона, броуновское движение и т. д.). Условием применимости формулы (1.3) является выражение:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho r v}{\eta} << 1, \tag{1.4}$$

т. е. формула Стокса применяется в случае малых чисел Рейнольдса.

---

* Стокс Джордж Габриель (1819–1903) – английский физик.

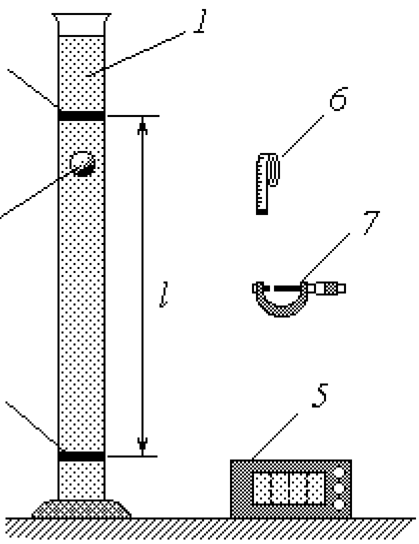
2. Цель работы. Схема экспериментальной установки

Целью работы является:

1) изучение законов движения тела в вязкой среде;

2) экспериментальное определение коэффициента вязкости жидкости.

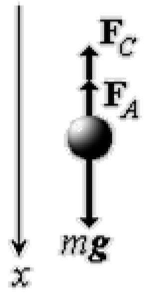
Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:



1 – цилиндрический сосуд с глицерином;
2 – свинцовый шарик;
3 – верхняя метка;
4 – нижняя метка;
5 – секундомер;
6 – сантиметровая лента;
7 – микрометр

3. Описание методики измерений

Рассмотрим движение тяжелого шарика в вязкой жидкости. Будем считать, что плотность материала шарика $\rho_ш$ больше плотности жидкости $\rho_ж$. Очевидно, что в этом случае шарик начнет тонуть. Характер его движения определяется тремя действующими на него силами (см. рис.): силой тяжести $m\boldsymbol{g}$, выталкивающей (архимедовой) силой $\vec{F}_A$ и силой внутреннего (вязкого) трения $\vec{F}_C$. Уравнение основного закона динамики (второго закона Ньютона) в данном случае имеет вид



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_C,$$

где m – масса шарика; $\vec{a}$ – ускорение его движения; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. В проекциях на ось $0x$ (т.е. на направление движения шарика) имеем:

$$ma = mg - F_A - F_C. \tag{3.1}$$

Особенность силы вязкого трения заключается в том, что ее величина зависит от скорости движения тела относительно жидкости. При малых скоростях эта зависимость прямо пропорциональная. Если тело имеет сферическую форму (как используемые в данной работе шарики), то модуль силы вязкого трения определяется формулой Стокса

$$F_C = 6\pi\eta\, r v, \tag{3.2}$$

где η – коэффициент вязкости жидкости; r – радиус шарика; v – скорость его движения относительно жидкости. Коэффициент вязкости имеет единицы измерения Н·с/м^2 = Па·с. Он является свойством данной жидкости и зависит от ее природы, концентрации растворенных веществ и температуры – поэтому в условиях лабораторной работы величину η можно считать постоянной.

Выразим массу шарика через его плотность $\rho_ш$ и объем $V_ш$:

$$m = \rho_ш V_ш = \rho_ш \cdot \frac{4}{3}\pi\, r^3, \tag{3.3}$$

а также запишем известное выражение для архимедовой силы:

$$F_A = \rho_ж V_ш g = \rho_ж \cdot \frac{4}{3}\pi\, r^3 g\,. \tag{3.4}$$

Подставляя выражения (3.2)-(3.4) в уравнение (3.1), после простых преобразований получим

$$a = \frac{g(\rho_ш - \rho_ж)}{\rho_ш} - \beta v, \tag{3.5}$$

где

$$\beta = \frac{9\eta}{2\rho_ш r^2}\,. \tag{3.6}$$

Учитывая, что ускорение представляет собой первую производную скорости по времени t, преобразуем (3.5) к виду дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \beta v = \frac{g(\rho_ш - \rho_ж)}{\rho_ш}\,. \tag{3.7}$$

Пусть в начальный момент времени t = 0 скорость шарика (вернее, ее проекция на ось Ox) равна v_0. С учетом этого начального условия решение уравнения (3.7) позволяет найти зависимость скорости от времени:

$$v(t) = v_0 + (v_{уст} - v_0)[1 - \exp(-\beta t)], \tag{3.8}$$

где

$$v_{уст} = \frac{2r^2 g(\rho_ш - \rho_ж)}{9\eta}\,. \tag{3.9}$$

Анализ выражения (3.8) показывает, что с течением времени скорость тела асимптотически приближается к постоянному (установившемуся) значению $v_{уст}$, определяемому соотношением (3.9). Движение приобретает установившийся характер тем скорее, чем больше значение коэффициента β, т.е., как следует из (3.6), чем больше вязкость жидкости, меньше плотность и размеры шарика.

Таким образом, в вязкой среде шарик, начав двигаться с ускорением (при $v < v_{уст}$ – ускоренно, при $v > v_{уст}$ – замедленно), по истечении некоторого времени будет двигаться практически равномерно со скоростью $v_{уст}$. К этому выводу можно прийти более простым способом, не прибегая к методам высшей математики. Для простоты положим начальную скорость шарика равной нулю. При этом, согласно (3.2), и сила внутреннего трения $F_C = 0$. Тогда, в соответствии с уравнением (3.1), начальное ускорение шарика определяется разностью между силой тяжести и архимедовой силой. При условии $\rho_ш > \rho_ж$ проекция ускорения на направление движения положительна, – следовательно, скорость шарика начинает расти. Однако это приводит к увеличению силы сопротивления движению F_C. Так как величина F_C входит в правую часть уравнения (3.1) с минусом, сумма проекций сил на направление движения уменьшается, – значит, уменьшается и ускорение. Поскольку оно остается положительным, скорость все еще растет, а ускорение уменьшается и т.д. Это продолжается до тех пор, пока величина F_C не уравновесит разность $mg - F_A$; тогда сумма проекций сил обращается в ноль, ускорение – тоже, и движение шарика приобретает равномерный характер. Уравнение (1) в этом случае имеет вид

$$mg - F_A - (F_C)_{уст} = 0; \qquad (3.10)$$

с учетом (3.2) – (3.4) имеем

$$\rho_ш \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_ж \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta\, r v_{уст} = 0 \cdot$$

Выражая из последнего уравнения скорость установившегося движения $v_{уст}$, придем к ранее полученному выражению (3.9).

Приведенные выше рассуждения лежат в основе одного из методов экспериментального определения коэффициента вязкости жидкости – метода Стокса.

Для этой цели применяется установка, схема которой изображена выше. На сосуде *1*, заполненном жидкостью с известной плотностью $\rho_ж$ и неизвестным коэффициентом вязкости η, нанесены метки. Верхняя метка *3* расположена ниже уровня жидкости таким образом, чтобы по достижении ее движение тонущего шарика *2* заведомо было установившимся, т.е. чтобы выполнялось условие (3.10). Нижняя метка *4* удалена от верхней на расстояние l. Измерив это расстояние, а также время t его прохождения шариком, легко определить скорость установившегося движения

$$v_{уст} = \frac{l}{t} \cdot \qquad (3.11)$$

В опытах используются шарики, изготовленные из материала с известной плотностью $\rho_ш > \rho_ж$; диаметр каждого шарика D также легко измерить. Таким образом, полученная выше формула (3.9) позволяет выразить неизвестный коэффициент вязкости через известные или измеряемые величины. Подставляя в эту формулу соотношения $r = \frac{D}{2}$, а также (3.11), находим

$$\eta = \frac{D^2 g(\rho_ш - \rho_ж)t}{18l}. \tag{3.12}$$

Для получения более достоверного результата необходимо провести опыты с несколькими шариками; при этом величины g, l, $\rho_ш$ и $\rho_ж$ остаются неизменными от опыта к опыту. Поэтому формулу (3.12) для удобства расчетов целесообразно представить в виде

$$\eta = CD^2 t \ , \tag{3.13}$$

где

$$C = \frac{g(\rho_ш - \rho_ж)}{18l} \ . \tag{3.14}$$

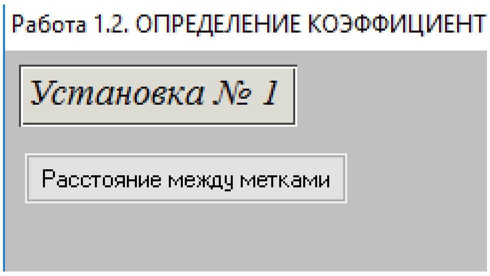
4. Порядок измерений и обработки результатов

1. Узнайте у преподавателя номер своего варианта и с помощью таблицы 2 определите номер своей лабораторной установки.

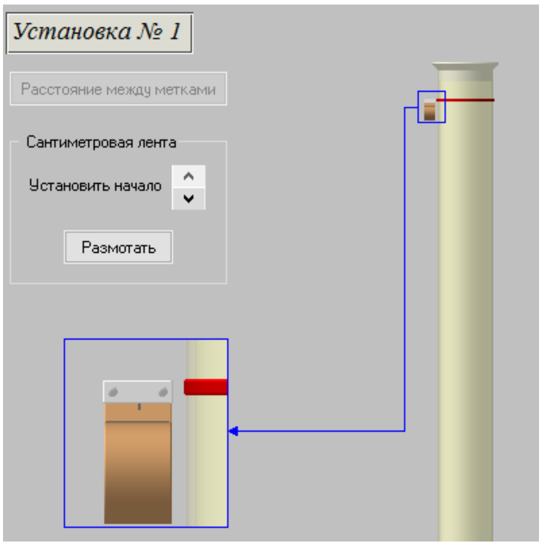
2. Используя справочные материалы, запишите в тетрадь значения плотности материала шарика (свинец) $\rho_ш$ и жидкости (глицерин) $\rho_ж$.

3. Измерьте сантиметровой лентой расстояние l между метками на сосуде, выразите его значение в метрах и запишите в тетрадь. Рассчитайте по формуле (3.14) константу C; полученное значение (в $Н/м^4$) также запишите в тетрадь.

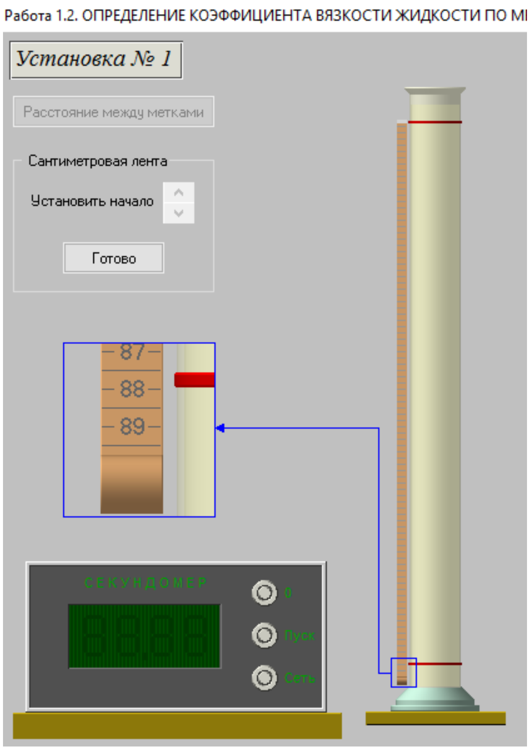
В виртуальном варианте лабораторной работы для измерения расстояния l необходимо в окне лабораторной работы нажать на кнопку «Расстояние между метками».



После этого окно программы изменится:



Необходимо кнопками-стрелочками «Установить начало» подвести начало сантиметровой ленты к верху красной метки на колбе. После этого необходимо нажать на кнопку «Размотать». После этого на экране появится изображение нижней красной метки



Величина l есть положение верхнего края красной метки на сантиметровой ленте

4. Научитесь пользоваться микрометром для измерения диаметра шарика. При этом обратите внимание на следующие моменты:

- для фиксации шарика между рабочими плоскостями микрометра следует использовать крайнюю хвостовую часть его рукоятки; ее вращение продолжать до появления характерного звука трещотки;

- показание микрометра (диаметр шарика) определяется как

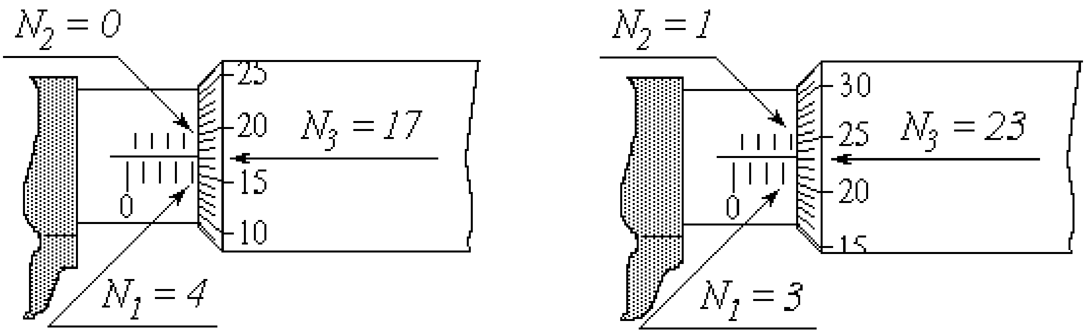
$$D = N_1 + 0{,}5N_2 + 0{,}01N_3 \ (мм),$$

где N_1 – количество открытых делений нижней части линейной шкалы; N_2 – количество делений верхней части линейной шкалы между последним открытым делением нижней и срезом круговой шкалы (N_2 может быть равным только 0 или 1); N_3 – показания круговой шкалы.

В примерах на рисунке:

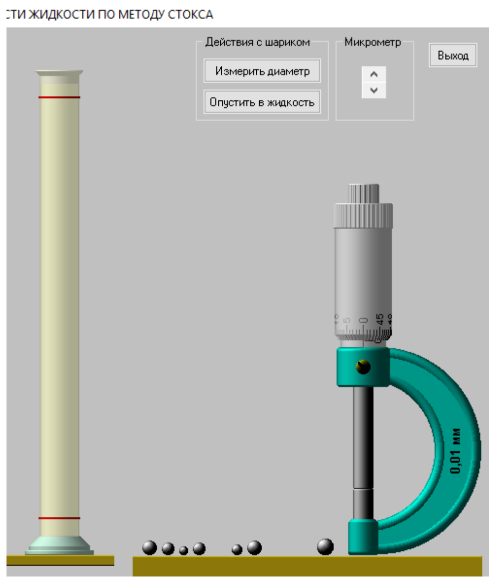
$$а)\ D = 4 + 0{,}5\cdot 0 + 0{,}01\cdot 17 = 4{,}17\ (мм);$$

$$б)\ D = 3 + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}01\cdot 23 = 3{,}73\ (мм).$$



а б

В виртуальном варианте лабораторной работы для измерения диаметра шарика нужно выбрать шарик и по нему щелкнуть мышью



Затем стрелками-кнопками «Микрометр» (стрелкой вверх) необходимо увеличить расстояние между рабочими плоскостями микрометра, чтобы оно превышало размеры выбранного шарика. После этого необходимо нажать на кнопку «Измерить диаметр» и шарик встанет между плоскостями микрометра. Затем необходимо сблизить плоскости микрометра (стрелкой вниз), чтобы они зажали шарик. После этого по показаниям микрометра нужно определить диаметр шарика.

5. Трижды измерьте микрометром диаметр одного из шариков в различных направлениях; результаты измерений занесите во второй столбец таблицы. Рассчитайте среднее из трех значений D и запишите его в тот же столбец таблицы 1.

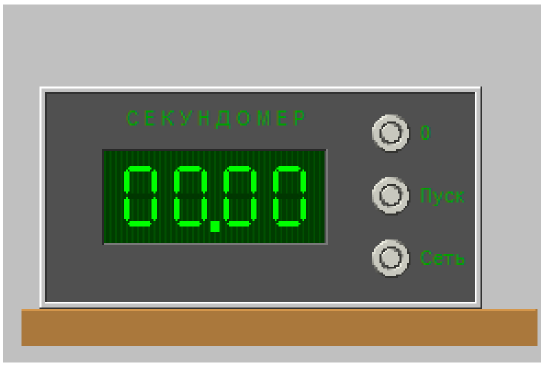
Таблица 1

Номер опыта	D, *мм*	t, *с*	η, *Па·с*	$\eta_i - \overline{\eta}$, *Па·с*	$(\eta_i - \overline{\eta})^2$, $(Па \cdot с)^2$
1	$D_1 = \ldots$ $D_2 = \ldots$ $D_3 = \ldots$ $\overline{D} = \ldots$				
2	$D_1 = \ldots$ $D_2 = \ldots$ $D_3 = \ldots$ $\overline{D} = \ldots$				
3	$D_1 = \ldots$ $D_2 = \ldots$ $D_3 = \ldots$ $\overline{D} = \ldots$				
4	$D_1 = \ldots$ $D_2 = \ldots$ $D_3 = \ldots$ $\overline{D} = \ldots$				
5	$D_1 = \ldots$ $D_2 = \ldots$ $D_3 = \ldots$ $\overline{D} = \ldots$				
			$\overline{\eta} = \ldots$		$\sum_{i=1}^{5}(\eta_i - \overline{\eta}) = \ldots$

6. Приготовьте к работе секундомер. Аккуратно опустите шарик в сосуд с глицерином; в момент прохождения им верхней метки включите секундомер, в момент прохождения нижней метки – выключите. Время движения между метками t занесите в третий столбец таблицы.

В виртуальном варианте лабораторной работы перед выполнением этого пункта необходимо включить секундомер в сеть и установить его на 0. Секундомер имеет 3 кнопки: «0», «Пуск» и «Сеть». Кнопка «Сеть» включает секундомер, кнопка «Пуск» поочередно запускает и останавли-

вает секундомер, кнопка «0» ставит секундомер в начальное положение (в положение 0).



После включения секундомера в сеть и установки его на 0 необходимо нажать кнопку «Опустить в жидкость». После того как шарик будет опущен в жидкость в момент прохождения им верхней красной метки запустите секундомер, нажав на кнопку «Пуск». В момент прохождения шариком нижней красной метки остановите секундомер, вторично нажав на кнопку «Пуск». По показаниям секундомера определите время движения между метками.

7. Повторите пп. 4 и 5 еще четыре раза с новыми шариками.

8. Для каждого из пяти опытов вычислите по формуле (3.12) (или (3.13)) коэффициент вязкости η, используя при расчетах среднее из трех значение диаметра шарика D, выраженное в метрах. Результаты запишите в следующий столбец таблицы.

9. Найдите среднее значение коэффициента вязкости $\overline{\eta}$. Результат занесите в таблицу 1.

10. Задаваясь доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$, рассчитайте погрешность $\Delta_s\eta$.

Строго говоря, для вычисления погрешности $\Delta_s\eta$ мы должны пользоваться формулами для косвенных измерений, поскольку величина η вычисляется по формуле (12), согласно которой результатом прямого измерения является величина t. Тем не менее, поскольку результатом прямого измерения в нашем эксперименте является лишь одна величина – время t, то для приближенного оценочного расчета можно воспользоваться формулами прямого измерения и считать, что результатом такого измерения является непосредственно величина η (см. Часть 1, раздел 5 описания к Лабораторной работе 1.0). Поэтому мы используем формулы

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(\eta_i - \overline{\eta}\right)}{5 \cdot 4}}$$

$$t_{n,\alpha} = 2.78$$

$$\Delta_s \eta = t_{n,\alpha} \cdot \sigma_\eta$$

11. Определите абсолютные приборные ошибки прямых измерений расстояния между метками δl, диаметра шарика δD и времени его падения δt, а также относительные ошибки E_l, E_D и E_t.

Приборная погрешность измерения расстояния между метками равна

$$\delta l = 0.25\,\text{см} = 0.0025\,\text{м}$$

Приборная погрешность измерения времени равна

$$\delta t = 0.01\,\text{с}$$

Приборная погрешность измерения диаметра шарика равна

$$\delta D = 0.005\,\text{мм} = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}$$

Относительные приборные ошибки вычисляются по формулам

$$E_l = \frac{\delta l}{l},\ E_t = \frac{\delta t}{t_{\min}},\ E_D = \frac{\delta D}{D_{\min}}.$$

12. Найдите абсолютную приборную погрешность косвенного измерения коэффициента вязкости $\delta\eta$. Для этого используйте формулу

$$\delta \eta = \overline{\eta}\,\sqrt{(2E_D)^2 + {E_t}^2 + {E_l}^2}\ .$$

13. Оцените полную абсолютную $\Delta\eta\,\Delta$ и относительную E погрешности по формулам

$$\Delta\eta = \sqrt{\Delta_s\eta^2 + \delta\eta^2}\ ,$$

$$E = \frac{\Delta\eta}{\overline{\eta}}.$$

14. Сделав необходимые округления, запишите окончательный результат измерения коэффициента вязкости в виде

$$\eta = \overline{\eta} \pm \Delta\eta\,.$$

15. Сравните полученное значение η с табличным.

5. Контрольные вопросы

1. Какое течение жидкости называется стационарным?
2. Какое течение жидкости называется нестационарным?
3. Какое свойство жидкости называют вязкостью?
4. Закон Ньютона для внутреннего трения.
5. Дайте определение физической величины – вязкости.
6. От чего зависит динамическая вязкость?
7. Формула для числа Рейнольдса.
8. Что определяет число Рейнольдса?
9. Формула Стокса.
10. При каком условии применима формула Стокса?
11. Какая формула определяет установившуюся скорость шарика в данной работе?

12. По какой формуле находится коэффициент вязкости в данной работе?
13. Простые задачи на формулы, применяемые в лабораторной работе.

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 2

Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	1
8	2
9	3
10	4
11	5
12	6
13	1
14	2
15	3
16	4
17	5
18	6
19	1
20	2
21	3
22	4
23	5
24	6
25	1
26	2
27	3
28	4
29	5
30	6

Лабораторная работа 1.3
Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека

1. Теоретические сведения

Вращение твердого тела описывается векторными величинами: угловым перемещением $\Delta\vec{\varphi}$ за время Δt относительно неподвижной оси вращения, угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Вектор углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ относительно данной оси вращения определяется как вектор, модуль которого равен величине угла поворота $\Delta\varphi$, выраженной в радианах, а направление определяется правилом правого винта: если вращение тела совпадает с вращением винта, то направление вектора $\Delta\vec{\varphi}$ совпадает с поступательным движением винта.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ определяется как предел отношения углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это угловое перемещение произошло, при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.1}$$

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ определяется предел отношения изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это угловое перемещение произошло, при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.2}$$

Иными словами (как следует из формулы (1.2)), угловое ускорение есть производная угловой скорости по времени.

Пусть ось вращения совпадает с координатной осью Oz. Будем обозначать модули векторов $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ соответственно через φ, ω и ε, а их проекции на ось вращения – через φ_z, ω_z и ε_z. Для любой точки вращающегося тела справедливы соотношения:

$$v = \omega r,\; a_t = \varepsilon r, \tag{1.3}$$

где v, a_t – модули линейной скорости и тангенциального ускорения, r – радиус окружности, по которой движется точка. Линейная скорость и тангенциальное ускорение являются векторными величинами, направленными по касательной к окружности в данной точке.

Инертность тела при вращательном движении описывается моментом инерции.

Момент инерции материальной точки относительно заданной оси вращения определяется как произведение массы материальной точки m квадрат расстояния r от материальной точки до оси вращения:

$$J = mr^2$$

Любое тело можно представить как множество материальных точек в некотором количестве n. Пронумеруем эти точки индексом $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Пусть m_i – масса материальной точки с номером i, и r_i – расстояние от материальной точки с номером i до оси вращения.

Моментом инерции J тела относительно неподвижной оси вращения называется сумма произведений масс m_i всех материальных точек тела на квадраты их расстояний r_i до оси вращения:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{1.4}$$

Существует аналогия между моментом инерции тела и его массой. Масса есть мера инертности тела при его поступательном движении. Момент инерции также является мерой инертности тела при его вращательном движении. Масса тела существует независимо от его поступательного движения, и момент инерции существует независимо от того, вращается тело или покоится. Так же, как и масса, *момент инерции является величиной аддитивной, т. е. момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции отдельных его частей относительно той же оси*:

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n. \tag{1.5}$$

Если масса непрерывно распределена по объему тела, то сумма (1.4) может быть записана через интеграл:

$$J = \int r^2 dm, \tag{1.6}$$

где r – расстояние бесконечно малого элемента массы dm до оси вращения тела. Интегрирование производится по всему телу. Если воспользоваться формулой плотности $\rho = dm/dV$, то интеграл (6) запишется:

$$J = \int \rho r^2 dV$$

Момент инерции зависит от плотности тела, его формы и размеров, а также от распределения массы в теле относительно интересующей нас оси.

Нахождение моментов инерции в общем случае является довольно сложной математической задачей. Однако для однородных и симметричных тел расчет значительно упрощается. Приведем некоторые формулы моментов инерции таких тел массы m относительно оси, проходящей через центр их масс.

1. Момент инерции тонкостенного цилиндра (или обруча) радиуса R относительно оси, совпадающей с его осью симметрии:

$$J = mR^2. \tag{1.7}$$

2. Момент инерции сплошного цилиндра (или тонкого диска) радиуса R относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра:

$$J = \frac{1}{2}mR^2. \tag{1.8}$$

3. Момент инерции тонкого стержня длины l относительно оси, нормальной стержню и проходящей через центр стержня:

$$J = \frac{1}{12}mR^2. \tag{1.9}$$

Вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси значительно упрощается, если воспользоваться *теоремой Штейнера: Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:*

$$J = J_0 + md^2. \tag{1.10}$$

При изучении динамики вращательного движения твердого тела наряду с моментом инерции используется также момент силы относительно точки и относительно оси. *Моментом силы относительно неподвижной точки O называется векторное произведение:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{1.11}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$, он проводится из точки O (рис. 1), знаком $\times$ обозначено векторное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Если на тело действуют несколько сил, то под $\vec{F}$ понимается равнодействующая всех сил. Направление вектора $\vec{M}$ определяется правилами векторного произведения и находится по правилу правого винта, которое состоит в следующем. *Если вращать винт по кратчайшему пути от радиуса-вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{F}$, то поступательное движение винта покажет направление вектора $\vec{M}$* (см. рисунок 1, где $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$.).

Из (1.11) следует, что модуль вектора $\vec{M}$ (модуль векторного произведения) равен

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l, \tag{1.12}$$

где α – угол между продолжением вектора $\vec{r}$ и силой $\vec{F}$; $l = r\sin\alpha$ – *плечо силы* $\vec{F}$*, которое равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы*.

Моментом силы относительно неподвижной оси Oz называется проекция на эту ось момента силы $\vec{M}$ *относительно неподвижной точки O, лежащей на оси Oz* (см. рис. 1). Учитывая определение момента силы относительно точки (1.11), момент силы относительно оси *Oz* равен $M_z = \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_z$. Отметим, что величина M_z не зависит от выбора точки *O* на оси *Oz*, а вектор $\vec{M}$ зависит от положения этой точки.

Любое тело, совершающее вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси обладает кинетической энергией, которая называется кинетической энергией вращательного движения. Если рассмотреть твердое тело как систему материальных точек, то вычисляя кинетическую энергию каждой точки и складывая кинетические энергии всех точек тела, можно вывести формулу для кинетической энергии вращательного движения тела. Например, если тело вращается относительно оси *Oz* с угловой скоростью $\vec{\omega}$, направленной по оси *Oz* (т.е. $\vec{\omega} = (0,0,\omega_z)$), то кинетическая энергия вращательного движения такого тела будет равна

$$E_{вр} = \frac{J_z \omega_z^2}{2}.$$

Вращение твердого тела относительно неподвижной оси описывается *основным уравнением динамики вращательного движения.* В проекции на ось *Oz* это уравнение записывается следующим образом:

$$J_z \varepsilon_z = M_z, \qquad (1.13)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси *Oz*; ε_z – проекция углового ускорения на ось *Oz*; M_z – суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения, совпадающей с осью *Oz*. Знаки величин ε_z и M_z зависят от направления оси *Oz* и вектора $\vec{M}$ (см. рис. 1). Если угол между вектором $\vec{M}$ и осью *Oz* меньше $\pi/2$, то $M_z > 0$ и, следовательно, $\varepsilon_z > 0$. Это видно из (1.13).

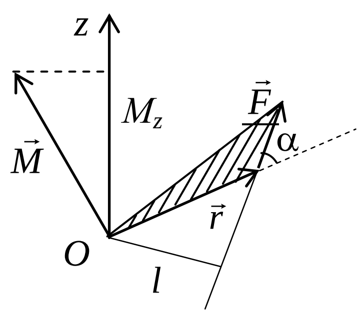


Рис. 1

2. Цель работы. Схема экспериментальной установки

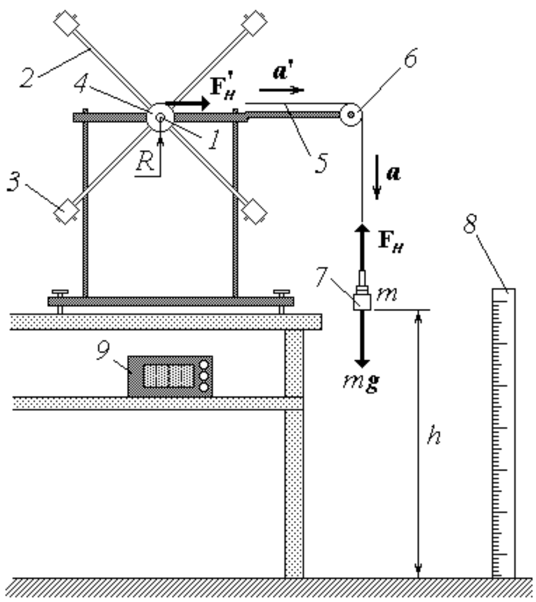
Целью работы является:

1) изучение кинематических и динамических характеристик вращательного движения;

2) экспериментальное определение момента инерции крестовины маятника Обербека и момента сил трения;

3) проверка справедливости закона сохранения (превращения) энергии механической системы.

Схема экспериментальной установки (маятник Обербека) изображена на рисунке:



1 – ось вращения;
2 – стержень;
3 – груз-насадка;
4 – шкив;
5 – нить;
6 – блок;
7 – груз;
8 – линейка;
9 – секундомер

Основным элементом маятника Обербека является крестовина, способная свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси *1*. Крестовина состоит из четырех стержней *2* с грузами-насадками *3*, расположенными симметрично относительно оси вращения. С крестовиной жестко скреплен шкив *4* радиусом *R*. На шкив намотана нить *5*, перекинутая через легкий блок *6*. К свободному концу нити привязан груз *7*, массу которого *m* можно изменять в процессе опытов. Для измерения высоты *h* расположения груза над полом служит линейка *8*, а для измерения времени его падения – секундомер *9*.

3. Описание методики измерений

Если поднятый на высоту *h* груз отпустить, то он начнет падать с ускорением $\boldsymbol{a}$, которое определяется вторым законом Ньютона. На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_н$ (сопротивлением воздуха в данном случае можно пренебречь). Уравнение основного закона динамики

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н$$

в проекции на направление движения груза имеет вид

$$ma = mg - F_н,$$

откуда

$$F_н = m(g - a). \qquad (3.1)$$

Пренебрегая массами нити *5* и блока *6*, можно считать, что нить действует на поверхность шкива касательной силой $\vec{F}_н{}'$, равной по модулю силе $\vec{F}_н$: | $|\vec{F}_н| = |\vec{F}_н{}'| = F_н$ |. Касательная сила создает вращающий момент $\vec{M}_н$, по модулю равный произведению модуля силы на ее плечо, т.е. на радиус шкива R: $M_н = F_н R$. С учетом (3.1) вращающий момент силы натяжения нити равен

$$M_н = m(g - a)\,R\ . \qquad (3.2)$$

Под действием момента $\vec{M}_н$ крестовина начинает вращаться с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$. При этом на оси вращения возникают, хотя и незначительные, силы трения. Эти силы создают тормозящий момент $\vec{M}_{тр}$, направленный противоположно угловому ускорению. С учетом направления моментов сил натяжения и трения алгебраическая (в проекции на ось вращения) запись уравнения основного закона динамики вращательного движения имеет вид

$$J\varepsilon = M_н - M_{тр}, \qquad (3.3)$$

где J – момент инерции крестовины маятника Обербека относительно оси вращения.

Известно, что момент инерции зависит только от распределения массы тела относительно оси. Для крестовины маятника величина J определяется в основном положением грузов-насадок *3* на стержнях *2*. Если их положение в ходе опытов не изменяется, то и момент инерции остается постоянным. Момент сил трения также можно считать практически неизменным. Поэтому зависимость углового ускорения ε от момента силы натяжения $M_н$, согласно уравнению (3.3), имеет линейный характер. Определив опытным путем значения ε при различных $M_н$ и обработав соответствующим образом полученную экспериментальную зависимость ε ($M_н$), с помощью этого уравнения можно найти неизвестные величины J и $M_{тр}$. Рассмотрим теперь методику измерения углового ускорения ε и момента силы натяжения $M_н$.

Так как нить *5* практически нерастяжима, все ее точки, включая точки на поверхности шкива, движутся с одинаковым ускорением $\vec{a}'$, равным по модулю ускорению падающего груза $\vec{a}$: $|\vec{a}| = |\vec{a}'| = a$. Груз падает с высоты h равноускоренно; при этом за время t он проходит путь

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Измерив высоту h и время падения груза t, можем найти ускорение

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad . \qquad (3.4)$$

Если известны масса груза m и радиус шкива R, то по формуле (3.2) можно рассчитать момент силы натяжения нити $M_н$.

Угловое ускорение вращения шкива, а следовательно, и крестовины и тангенциальное (касательное) ускорение точек на поверхности шкива связаны известным соотношением

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad . \qquad (3.5)$$

Таким образом, зная массу груза m, радиус шкива R и высоту h, с которой падает груз, а также измерив время его падения t, можно экспериментально определить величины ε и $M_н$.

Рассмотрим теперь превращение энергии в вышеописанном опыте. Поднятый на высоту h груз обладает потенциальной энергией

$$W_p = mgh, \qquad (3.6)$$

а кинетическая энергия системы «груз + крестовина» при этом равна нулю. В момент падения груза на пол его потенциальная энергия обращается в ноль, но за счет ее уменьшения груз приобретает кинетическую энергию

$$W_{k1} = \frac{mv^2}{2}, \qquad (3.7)$$

а крестовина – кинетическую энергию вращения

$$W_{k2} = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (3.8)$$

где v – скорость груза в момент падения; ω – угловая скорость вращения крестовины к этому моменту.

Итак, начальное значение полной механической энергии рассматриваемой системы равно $W_0 = W_p$, а конечное $W = W_{k1} + W_{k2}$. Изменение энергии:

$$\Delta W = W - W_0 = W_{k1} + W_{k2} - W_p.$$

Как известно, изменение полной механической энергии консервативной системы равно нулю, а при наличии неконсервативных сил – их работе. В данной системе действуют неконсервативные силы трения, работа которых равна

$$A_{тр} = -\ M_{тр}\varphi, \qquad (3.9)$$

где φ – угол поворота крестовины за время падения груза. Знак « – » отражает тот факт, что работа сил трения и сопротивления всегда отрицательна (угол между направлениями силы и перемещения равен 180°). Итак, закон сохранения (превращения) энергии в данном случае можно записать как

$$W_{k1} + W_{k2} - W_p = A_{тр}$$

или

$$W_p = W_{k1} + W_{k2} - A_{тр} . \qquad (3.10)$$

С учетом соотношений (3.6) – (3.9) уравнение (3.10) примет вид

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + M_{тр}\varphi \ . \qquad (3.11)$$

Для экспериментальной проверки справедливости уравнения (3.11) необходимо знать все входящие в него величины. К ним относятся, во-первых, заранее известные ускорение свободного падения g, масса груза m и высота h; во-вторых, определяемые путем обработки экспериментальной зависимости момент инерции крестовины J и момент сил трения $M_{тр}$; в-третьих, кинематические характеристики системы v, ω и φ. Остановимся на определении последних.

Скорость груза в момент его падения на пол найдем исходя из закономерностей равноускоренного движения:

$$v = at \ . \qquad (3.12)$$

Такую же по величине скорость имеют и точки на поверхности шкива. Используя связь между линейной и угловой скоростями, получим

$$\omega = \frac{v}{R} . \qquad (3.13)$$

Так как линейное расстояние, пройденное точками на поверхности шкива, равно перемещению груза за тот же промежуток времени, угол φ (в радианах) может быть рассчитан как

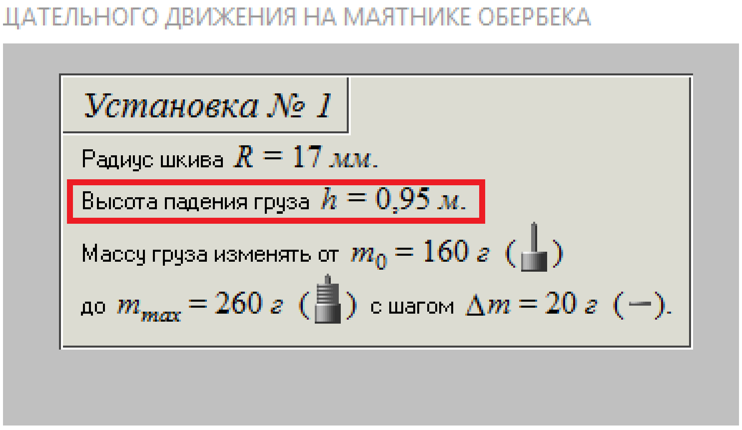
$$\varphi = \frac{h}{R} \ . \qquad (3.14)$$

4. Порядок измерений и обработки результатов

1. Узнайте у преподавателя номер своего варианта и по таблице 2 определите номер своей лабораторной установки.

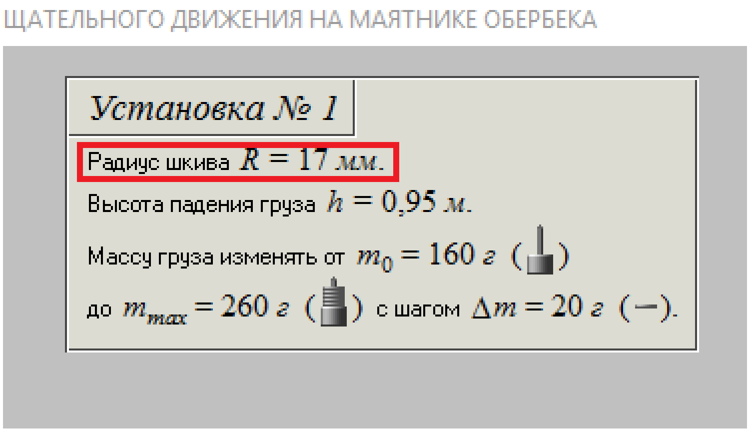
2.Ознакомьтесь с рекомендациями по выполнению работы на данной экспериментальной установке. Запишите в тетрадь рекомендуемое значение высоты h.

В виртуальном варианте лабораторной работы высота h *задана в окне лабораторной работы (зависит от номера установки):*



3. Освободив шкив от намотанной на него нити, измерьте штангенциркулем его диаметр. Определите радиус шкива R и, выразив его в метрах, также запишите в тетрадь.

В виртуальном варианте лабораторной работы радиус R шкива задан в окне лабораторной работы (зависит от номера установки):



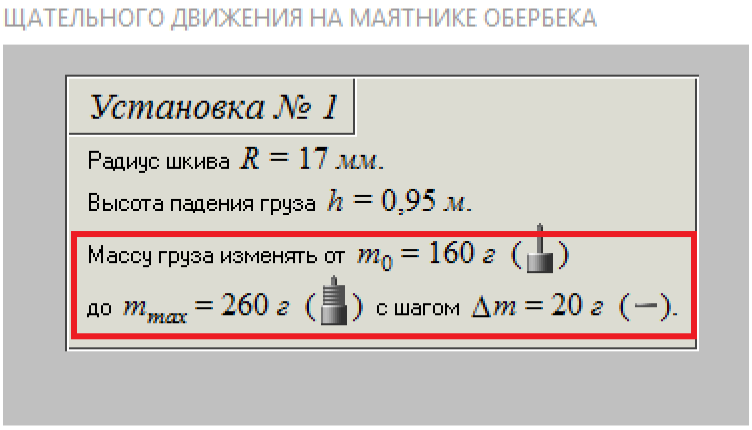
4. Занесите во второй столбец таблицы 1 значение массы груза m (в *кг*).

Таблица 1

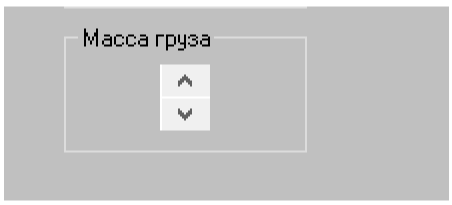
Номер опыта	m, *кг*	t, *с*	a, $м/с^2$	$M_н$, $Н \cdot м$	ε, $с^{-2}$
1		$t_1 = \ldots$ $t_2 = \ldots$ $t_3 = \ldots$ $\bar{t} = \ldots$			
2		$t_1 = \ldots$ $t_2 = \ldots$ $t_3 = \ldots$ $\bar{t} = \ldots$			
3		$t_1 = \ldots$			

		$t_2 = \dots$ $t_3 = \dots$ $\bar{t} = \dots$			
4		$t_1 = \dots$ $t_2 = \dots$ $t_3 = \dots$ $\bar{t} = \dots$			
5		$t_1 = \dots$ $t_2 = \dots$ $t_3 = \dots$ $\bar{t} = \dots$			
6		$t_1 = \dots$ $t_2 = \dots$ $t_3 = \dots$ $\bar{t} = \dots$			

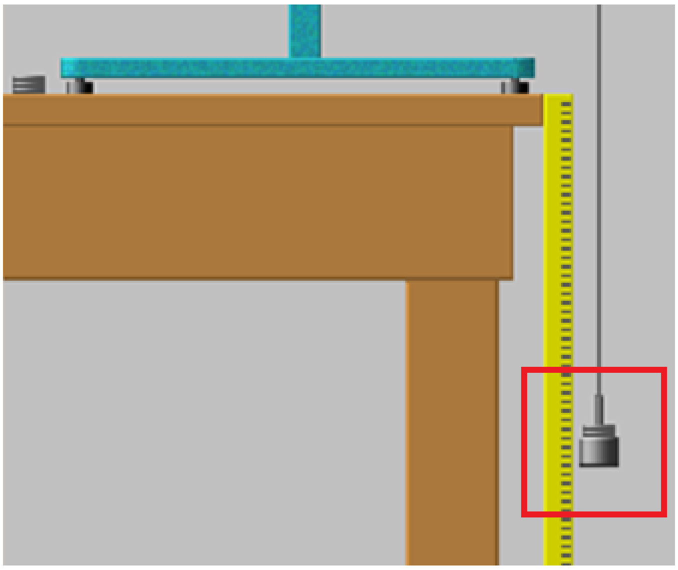
В виртуальном варианте лабораторной работы масса груза m определяется как $m = m_0 + k \cdot \Delta m$, где m_0 и Δm заданы в окне лабораторной работы:



а число k есть число дисков (перегрузков), лежащих на основном грузе. Это число дисков задается кнопками-стрелочками «Масса груза»



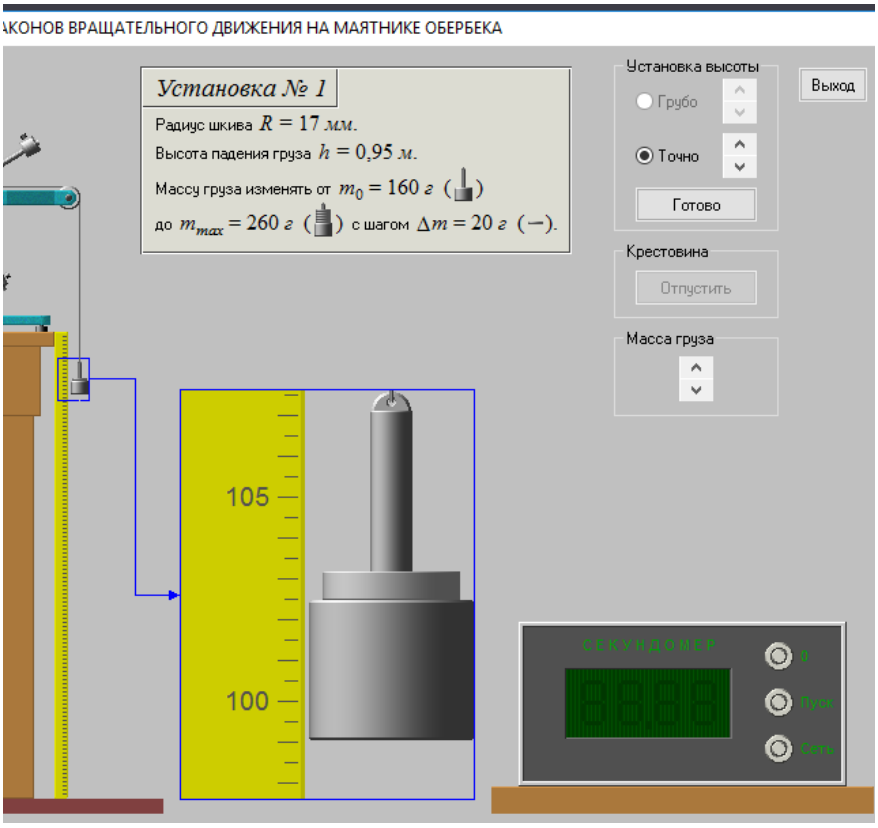
и визуально определяется как число дисков на основном грузе (на рисунке ниже k=2)



5. Вращая крестовину, намотайте нить на шкив (равномерно, одним слоем) так, чтобы нижняя поверхность груза *7* оказалась на заданной высоте *h* над полом.

В виртуальном варианте лабораторной работы высота устанавливается группой кнопок «Установка высоты» сначала грубо, а затем точно. Сначала необходимо поднять груз на нужную высоту, поставив указатель (точку) в положении «грубо».

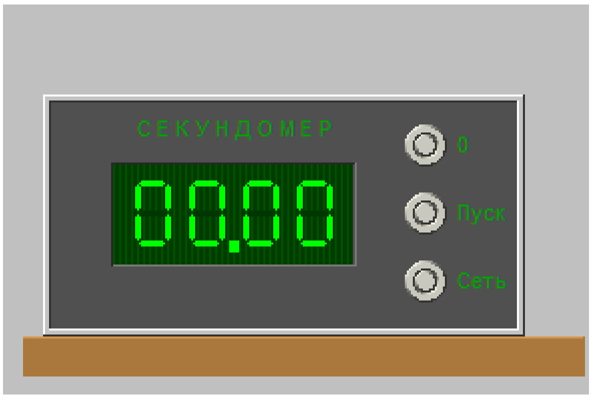
Затем необходимо поставить указатель в положение «точно», после чего появится увеличенное изображение положения груза. Необходимо кнопками-стрелками установить точное положение груза по его нижнему краю.



После установки высоты необходимо нажать на кнопку «Готово».

6. Отпустив крестовину, одновременно включите секундомер, а в момент касания грузом пола – выключите. Запишите время падения в третий столбец таблицы.

В виртуальном варианте лабораторной работы секундомер имеет 3 кнопки: «0», «Пуск» и «Сеть». Кнопка «Сеть» включает секундомер. Кнопка «Пуск» поочередно запускает и останавливает секундомер, кнопка «0» ставит секундомер в начальное положение (в положение 0 секунд).



Перед началом измерения необходимо установить секундомер на 0. После чего необходимо отпустить крестовину кнопкой «Отпустить» и сразу же нажать на кнопку «Пуск» секундомера. В момент когда груз коснется пола необходимо остановить секундомер, снова нажав на кнопку «Пуск».

7. Повторите пп. 4 и 5 с тем же грузом еще два раза. Рассчитайте и занесите в таблицу среднее из трех значений времени t.

8. Увеличивая массу груза согласно рекомендациям, выполните пп. 3 - 6 еще пять раз.

9. Для каждого из шести проделанных опытов рассчитайте ускорение a по формуле (3.4), подставляя в нее среднее из трех измеренных значений времени падения t. Величину a (с точностью не менее чем до трех значащих цифр) запишите в четвертый столбец таблицы.

10. По формулам (3.2) и (3.5) вычислите значения момента силы натяжения нити $M_н$ и углового ускорения ε. Результаты занесите в соответствующие столбцы таблицы.

11. Руководствуясь правилами, изложенными в части I лабораторной работы 1.0, постройте график зависимости углового ускорения от момента силы натяжения (в данной работе необходимо, чтобы начало координат совпадало с нулевыми значениями откладываемых величин ε и $M_н$). Нанесите на график экспериментально полученные точки.

12. Одним из описанных ниже способов* обработайте линейную экспериментальную зависимость $\varepsilon(M_н)$ и найдите значения момента инерции крестовины J и момента сил трения $M_{тр}$. Запишите эти значения в тетрадь.

13. Для одного из проделанных опытов* рассчитайте по формулам (3.12) – (3.14) скорость груза v, угловую скорость вращения ω и угол поворота φ крестовины маятника Обербека в момент падения груза на пол.

14. Вычислите значения левой и правой частей уравнения закона сохранения энергии (3.11). Сравнив эти значения между собой, сделайте выводы.

15. Сделать обработку экспериментальной зависимости $\varepsilon(M_н)$, пользуясь следующими указаниями.

Как мы уже знаем, угловое ускорение крестовины ε и момент силы натяжения нити $M_н$ связаны уравнением основного закона динамики вращательного движения (3.3). Зависимость $\varepsilon(M_н)$ можно представить в виде

$$\varepsilon = K M_н + b, \qquad (4.1)$$

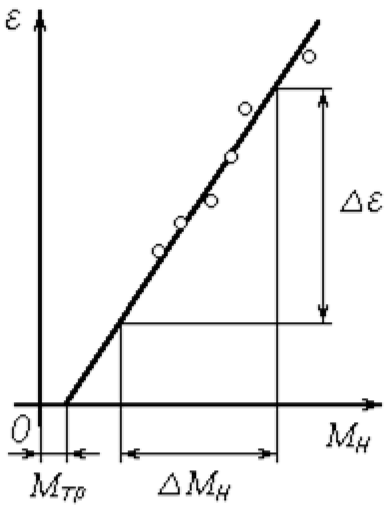
где $K = \frac{1}{J}$; $b = -\frac{M_{тр}}{J}$. Таким образом, определив коэффициенты линейной зависимости (4.1) K и b, легко найти момент инерции J и момент сил трения $M_{тр}$:

$$J = \frac{1}{K}; \quad M_{тр} = -J\,b. \qquad (4.2)$$

Обработку экспериментальной зависимости $\varepsilon(M_н)$ можно провести графически. По экспериментальным точкам проведите сглаживающую прямую. Из уравнения (3.3) следует, что угловое ускорение ε обращается в нуль

* По рекомендации преподавателя.

при $M_н = M_{тр}$. Таким образом, момент сил трения $M_{тр}$ определяется (с учетом масштаба!) отрезком, отсекаемым проведенной прямой на оси абсцисс (см. рисунок). Величина K в уравнении (4.1) представляет собой угловой коэффициент прямой, т.е. тангенс угла ее наклона к оси абсцисс. Согласно (4.2), момент инерции J есть величина, обратная K, – значит, его можно найти как котангенс этого угла. Выбрав на сглаживающей прямой две достаточно удаленные друг от друга точки, рассчитайте значение J как отношение отрезков



$$J = \frac{\Delta M_н}{\Delta \varepsilon},$$

причем величины отрезков $\Delta M_н$ и $\Delta\varepsilon$ должны быть взяты с учетом масштаба графика и выражены в соответствующих единицах измерения: $\Delta M_н$ – в $Н{\cdot}м$, а $\Delta\varepsilon$ – в $рад/с^2$ или в $с^{-2}$. Только в этом случае результат будет правильным, и момент инерции будет иметь размерность $кг{\cdot}м^2$.

5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения?
2. Нормальное и тангенциальное ускорения и их связь с угловой скоростью, и угловым ускорением вращающегося тела, а также с линейной скоростью произвольной точки тела?
3. Дайте определение момента инерции тела.
4. Чему равен момент инерции тонкостенного цилиндра, диска, стержня относительно осей их симметрии?
5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Момент инерции материальной точки, тонкого однородного стержня, однородного диска.
7. Момент силы относительно точки и относительно неподвижной оси.
8. Кинетическая энергия вращения.
9. Запишите основной закон динамики вращательного движения твердого тела.
10. Из каких частей состоит маятник Обербека?
11. Запишите уравнения динамики для вращающейся части маятника Обербека и для груза на нити, приводящего в движение маятник.
12. Вывести формулу для экспериментального определения момента инерции маятника Обербека.

13. Как в данной работе находятся погрешности нахождения момента инерции маятника?

14. Построение и обработка графических зависимостей в данной работе. Метод наименьших квадратов.

15. Простые задачи на вращательное движение твердого тела и на определение момента инерции.

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 2

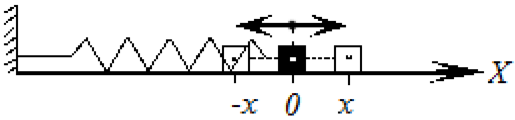
Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5
11	6
12	1
13	2
14	3
15	4
16	5
17	6
18	1
19	2
20	3
21	4
22	5
23	6
24	1
25	2
26	3
27	4
28	5
29	6

30	1

Лабораторная работа 4.1
Пружинный маятник

1. Теоретические сведения

Изучим простейшую колебательную систему – тело массы *m*, прикрепленное к пружине и скользящее без трения по горизонтальному столу (см. рисунок ниже). Такая система называется *пружинным маятником*.



Рассмотрим движение грузика пружинного маятника под действием *однократно* приложенной силы. Отклонение обозначим через *x*, и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. В этом случае пружина действует на груз с упругой силой *F*, пропорциональной смещению *x* и направленной в сторону обратную смещению. В проекции силы на ось *Ox* мы имеем

$$F_x = -kx, \tag{1.1}$$

где *k* - коэффициент пропорциональности, называемый также жесткостью пружины. Под действием этой силы маятник начнет совершать колебания.

В физике встречаются силы иного происхождения, чем упругие, которые обнаруживают такую же закономерность, т. е. оказываются равными -*kx*, где *k* – постоянная положительная величина. Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть *квазиупругими*.

Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, под действием квазиупругой силы, называется классическим осциллятором. Таким образом, пружинный маятник является классическим осциллятором.

Промежуток времени, по истечению которого движение повторится, называется периодом колебания и обозначается T, [T] = c.

Частота колебаний есть число полных колебаний за 1 с: $\nu = 1/T$. Частота измеряется в Гц. 1 Гц - это одно колебание за 1 с. В технике частоты измеряются также в килогерцах (1 кГц = 10^3 Гц), мегагерцах (1 Мгц = 10^6 Гц), гигагерцах (1ГГц = 10^9 Гц).

Выведем уравнение колебаний пружинного маятника. Напишем 2-й закон Ньютона в проекции на ось *Ox*: $F_x = ma_x$, где F_x определяется выражением (1.1), а проекция ускорения есть $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$. В итоге получаем $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.2}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Уравнение (1.2) является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Оно называется *дифференциальным уравнением свободных гармонических колебаний*. Его решением будет функция:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta), \tag{1.3}$$

где A - амплитуда колебаний, т. е. наибольшее отклонение колеблющегося грузика от положения равновесия; оно задается начальными условиями при однократном приложении силы.

Поскольку значения как cos так и sin через 2π радиан повторяются, то можно найти связь между периодом T_0 и ω_0: $\omega_0(t+T)+\theta = \omega_0 t + \theta + 2\pi$, откуда

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu$$

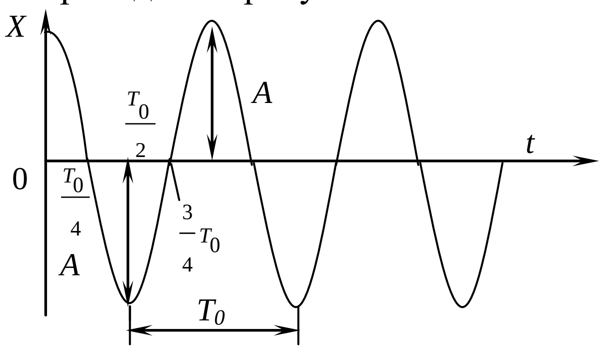
Величина ω_0 - называется собственной круговой частотой. Она равна числу полных колебаний за 2π секунд. Для вращательного движения круговая частота и величина угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$ совпадают.

Выражение $\omega_0 t + \theta$ называют фазой колебания. Она определяет смещение в данный момент времени t; θ – начальная фаза. Она характеризует смещение в начальный момент времени $t = 0$ и определяется начальными условиями, как и амплитуда A.

Пусть $\theta = 0$, тогда

$$x = A\cos(\omega t) = A\cos\frac{2\pi}{T_0}t = A\cos(2\pi\nu_0 t).$$

График этого уравнения приведен на рисунке ниже:



Из уравнений выше следует, что период колебания $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ не зависит от амплитуды колебаний A. Скорость

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta)$$

пропорциональна амплитуде и круговой частоте, и отличается по фазе от смещения x на $\pi/2$. Максимальная скорость $v_м = A\omega_0$. Ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \theta) = -\omega_0^2 x$$

пропорционально A и ω_0^2, и по направлению совпадает с направлением силы $\vec{F}$, а по фазе отличается от скорости V на $\pi/2$, и от смещения x – на π. Максимальное ускорение $a_м = A\omega_0^2$.

Простейшее периодическое колебание, при котором смещение изменяется со временем по закону косинуса или синуса, называется гармоническим колебанием.

Перейдем к рассмотрению затухающих колебаний.

Рассмотри вновь пружинный маятник. Предположим, что на материальную точку, закрепленной на конце невесомой пружины действует наряду с силой упругости также сила вязкого трения со стороны среды, пропорциональная скорости точки и направленная против скорости.

Пусть материальная точка движется по оси Ox. Тогда в проекции на ось Ox силы, действующие на точку равны

$$F_{упр,x} = -kx$$

$$F_{тр,x} = -rv_x$$

где r - коэффициент вязкого трения. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox

$$ma_x = F_{сопр,x} + F_{упр,x}$$

Учитывая, что

$$a_x = \ddot{x},\ v_x = \dot{x}$$

Запишем второй закон Ньютона в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},$$

или:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Тогда

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *дифференциальным уравнением затухающих гармонических колебаний.* Величина $\beta = \dfrac{r}{2m}$ называется коэффициентом затухания.

Для произвольных колебательных систем дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0\,. \tag{1.5}$$

Здесь ξ – координата (для пружинного маятника) или угол (для математического маятника). Решение уравнения (1.5) есть

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.6}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

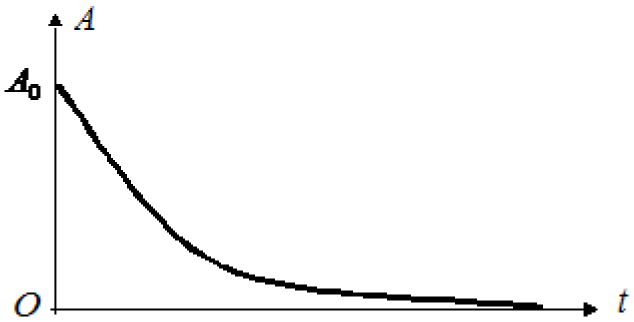
– частота затухающих колебаний. Период затухающих колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

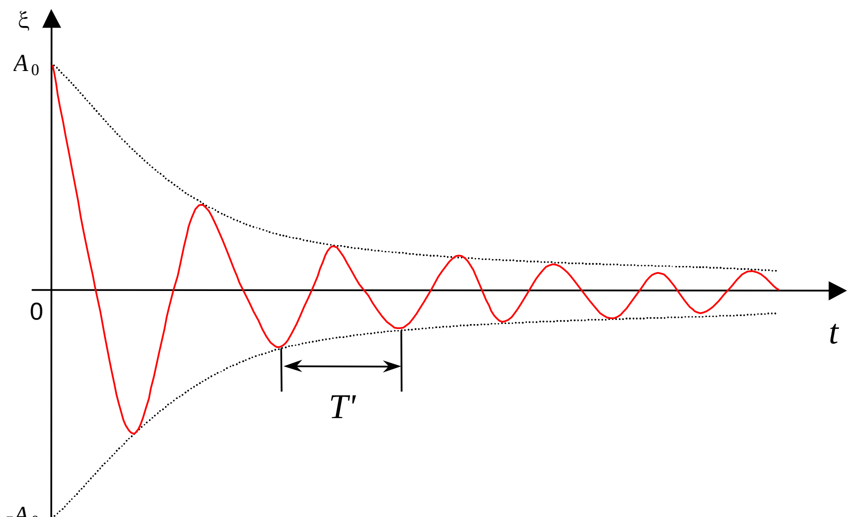
Затухающие колебания – это пример квазипериодического процесса, так как в каждом периоде амплитуда уменьшается по закону

$$A(t) = A_0\exp(-\beta t)\,.$$

График $A(t)$ изображен на рисунке:

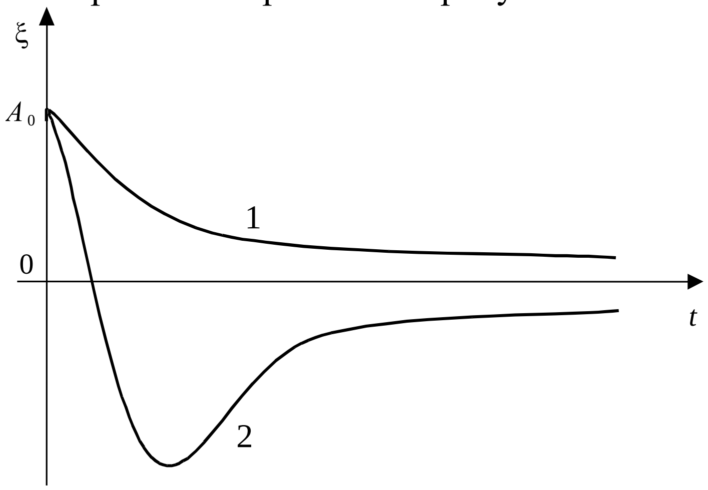


Пусть $\beta < \omega_0$. Тогда график зависимости $\xi(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$ имеет вид:



При $\beta = \omega_0$ – период колебаний обращается в бесконечность, то есть движение перестает быть периодическим.

При $\beta > \omega_0$ колебательная система, выведенная из положения равновесия, возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. При этом если при $t = 0$ скорость колебаний $\upsilon_0 = 0$, то движение изображается кривой 1 на рисунке. Если при $t = 0$ скорость колебаний отлична от нуля, то движение изображается кривой 2 на рисунке:



Затухающие колебания характеризуются следующими параметрами.

1. *Коэффициент затухания β.* Если за некоторое время τ_e амплитуда колебаний уменьшается в e раз, то

$$\frac{A(0)}{A(\tau_e)} = e, \text{ или } \frac{A(0)}{A(0)\cdot e^{-\beta\cdot\tau_e}} = e.$$

Тогда $e = e^{\beta\cdot\tau_e}$, а, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{\tau_e},$$

где величина τ_e называется временем релаксации.

2. *Логарифмический декремент затухания λ.* Логарифмический декремент равен натуральному логарифму отношения амплитуд соседних колебаний, то есть отличающихся на один период Т:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A(0)\cdot e^{-\beta t}}{A(0)\cdot e^{-\beta(t+T)}} = \beta\cdot T$$

$$\lambda = \beta\cdot T = \frac{T}{\tau_e} = \frac{1}{N_e}.$$

Здесь N_e - число колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз:

$$N_e = \frac{\tau_e}{T}$$

Физический смысл логарифмического декремента λ – величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз.

3. *Добротность Q.* Добротность определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

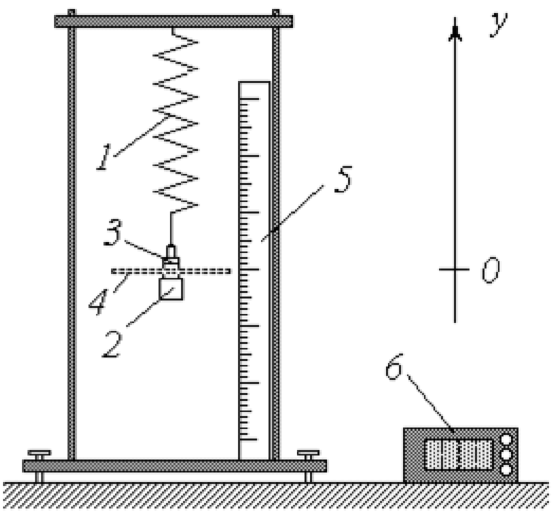
2. Цель работы. Схема экспериментальной установкти

Целью работы является:

1) изучение свободных колебаний пружинного маятника;

2) экспериментальное определение коэффициента жесткости пружины и коэффициента сопротивления среды.

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:



1 – пружина;
2 – груз;
3 – навески;
4 – съемный диск;
5 – линейка;
6 – секундомер

3. Описание установки и методики измерений

Мы рассмотрим пружинный маятник, который представляет собой подвешенный на пружине *1* жесткостью k груз *2* массой m. Из-за сравнительно малой силы сопротивления воздуха колебания такого маятника в течение длительного промежутка времени являются практически незатухающими. Их период определяется известной формулой

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.1}$$

Зная массу груза m и период колебаний T, из формулы (3.1) можно найти коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{(2\pi)^2 m}{T^2}. \tag{3.2}$$

Измерив секундомером *6* время нескольких (N) колебаний t, их период можно рассчитать как $T = t/N$. С учетом этого выражение (3.2) принимает вид

$$k = \frac{(2\pi N)^2 m}{t^2}. \tag{3.3}$$

Для повышения точности результата измерений и оценки его случайной погрешности необходимо провести несколько опытов, изменяя с помощью навесок *3* массу груза m. Расчетную формулу (3.3) удобно представить в виде

$$k = C \cdot \frac{m}{t^2}, \tag{3.4}$$

где

$$C = (2\pi N)^2. \tag{3.5}$$

Экспериментальная установка позволяет изучать и явно выраженные затухающие колебания. С этой целью к грузу *2* крепится съемный диск *4*, наличие которого существенно увеличивает сопротивление воздуха.

Как известно, решение уравнения гармонических затухающих колебаний имеет вид

$$y(t) = A(t)\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0), \tag{3.6}$$

где y – координата (смещение от положения равновесия) груза; t – время; A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза. Для затухающих колебаний амплитуда и циклическая частота определяются выражениями:

$$A(t) = A_0\cdot\exp(-\beta\cdot t); \tag{3.7}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}, \tag{3.8}$$

где A_0 – начальная амплитуда, β – коэффициент затухания, зависящий от коэффициента сопротивления среды b и массы колеблющегося груза:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \tag{3.9}$$

ω_0 – циклическая частота собственных (незатухающих) колебаний, связанная с их периодом известным соотношением $\omega_0 = 2\pi/T$ и, с учетом (3.1), равная

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.10}$$

Начальные амплитуда A_0 и фаза φ_0 зависят от способа выведения маятника из положения равновесия (от начальных условий):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{1}{\omega}\cdot\left(\beta + \frac{v_{y0}}{y_0}\right); \quad A_0 = y_0\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}, \tag{3.11}$$

где y_0 – начальное смещение груза; v_{y0} – проекция его скорости в начальный момент времени $t = 0$. Если $v_{y0} = 0$ (пружина просто сжата ($y_0 > 0$) или растянута ($y_0 < 0$), а затем отпущена), то выражения (3.11) с учетом (3.8) примут вид

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\beta}{\omega}; \quad A_0 = y_0 \cdot \frac{\omega_0}{\omega}. \tag{3.12}$$

Часто на практике (в том числе и в данной лабораторной работе) коэффициент затухания мал по сравнению с собственной частотой колебаний: $\beta << \omega_0$. Анализ выражений (3.8) и (3.12) показывает, что в этом случае циклическая частота затухающих колебаний $\omega \approx \omega_0$; начальная фаза $\varphi_0 \approx 0$; начальная амплитуда $A_0 \approx y_0$. Уравнение колебаний (3.6) с учетом зависимости амплитуды от времени (7) приближенно можно записать в виде

$$y(t) \approx y_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) . \tag{3.13}$$

Для расчетов по этому уравнению необходимо знать величины y_0, ω_0 и β. Начальное смещение от положения равновесия y_0 может быть установлено и измерено с помощью линейки *5*. Циклическая частота ω_0 определяется по формуле (3.10); масса груза m является заданной величиной; методика определения коэффициента жесткости пружины k описана выше. Для вычисления коэффициента затухания β по формуле (3.9) нужно знать коэффициент сопротивления среды b. Остановимся на методике определения этой величины.

Логарифмирование зависимости (3.7) дает

$$\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \beta t ,$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A}\right).$$

Выражая из формулы (3.9) коэффициент сопротивления $b = 2 \cdot m \cdot \beta$, получим

$$b = \frac{2m}{t} \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \tag{3.14}$$

Вместо того, чтобы засекать момент времени t, в который измеряется амплитуда A, удобнее проводить измерения через определенное число колебаний маятника N и зафиксировать лишь время окончания измерений $t_к$. Если за промежуток времени $t_к$ произошло $N_к$ полных колебаний, то их период $T = t_к / N_к$, а время произвольного числа N колебаний определится как $t = T \cdot N$ или

$$t = N \cdot \frac{t_к}{N_к} . \tag{3.15}$$

4. Порядок измерений и обработки результатов

Упражнение 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ

1. Ознакомьтесь с рекомендациями по выполнению работы на данной лабораторной установке. В окне виртуальной лабораторной работе рекомендуется выбрать число колебаний равным $N = 10$. Тем не менее, по указанию преподавателя возможен выбор числа колебаний в соответствие с номеров Вашего варианта (см. таблицу 3 в конце описания к работе). В этом случае и у Вас число колебаний N может быть равным 6, 7, 8, 9, 10 в зависимости от номера Вашего варианта. Определив Ваше значение N, рассчитайте по формуле (3.5) константу C и запишите ее значение в тетрадь.

2. Освободите груз *2* от навесок *3* и диска *4*.

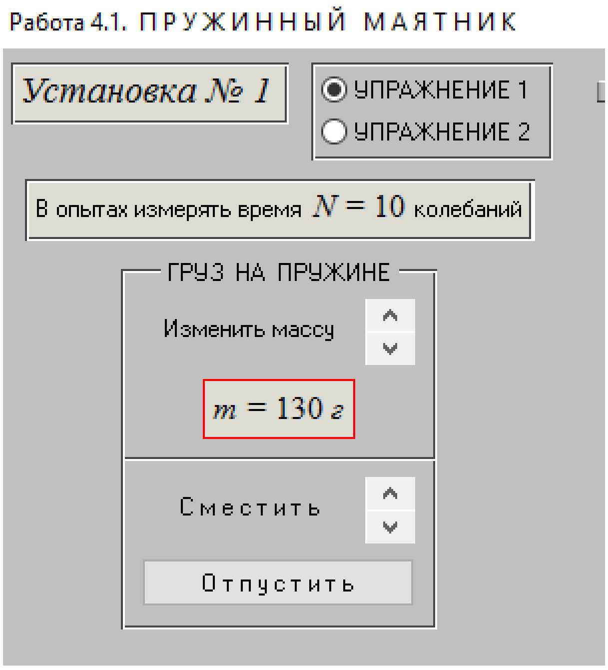
3. Занесите значение массы груза *m*, выраженное в *кг*, во второй столбец табл. 1.

Таблица 1

Номер опыта	m, *кг*	t_i, *с*	k_i, *Н/м*	$\Delta k_i = k_i - \bar{k}$, *Н/м*	$(\Delta k_i)^2$, $(Н/м)^2$
1					
2					
3					
4					
5					
			$\bar{k} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} k_i}{5} = \\ = \ldots$		$\sum_{i=1}^{5} (\Delta k_i)^2 = \\ = \ldots$

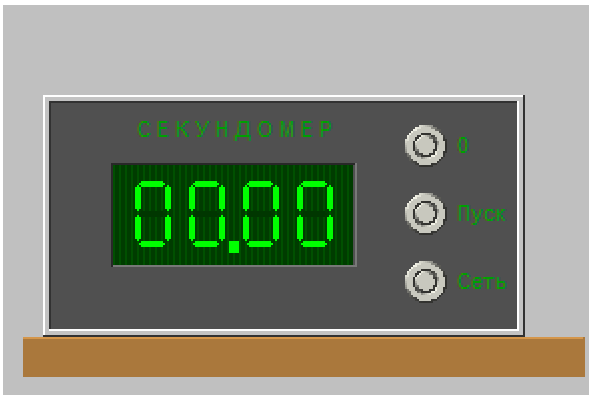
4. Выведите маятник из положения равновесия и отпустите. С помощью секундомера *6* измерьте время *N* полных колебаний и занесите результат в третий столбец таблицы.

Смещение маятника из положения равновесия вверх или вниз в виртуальном варианте лабораторной работы осуществляется кнопками-стрелками «вверх» и «вниз» напротив надписи «Сместить»:



После смещения маятника необходимо нажать на кнопку Отпустить», после чего маятник начнет совершать колебания, а кнопка «Отпустить» заменится на кнопку «Остановить».

Время колебаний измеряется с помощью секундомера. В виртуальном варианте лабораторной работы секундомер имеет 3 кнопки: «0», «Пуск» и «Сеть». Кнопка «Сеть» включает секундомер. Кнопка «Пуск» поочередно запускает и останавливает секундомер, кнопка «0» ставит секундомер в начальное положение (в положение 0 секунд).



Секундомер необходимо запустить сразу после запуска маятник. После того как маятник совершит необходимое число колебаний, секундомер необходимо остановить.

5. Изменяя массу груза с помощью навесок *3*, выполните пп. 3 и 4 еще четыре раза.

В виртуальном варианте лабораторной работы установка навесок на груз производится кнопками-стрелками «вверх» и «вниз» напротив надписи «Изменить массу».

6. Для каждого из пяти проведенных опытов вычислите по формуле (3.4) коэффициент жесткости пружины; результаты занесите в четвертый столбец таблицы.

7. Найдите среднее значение коэффициента жесткости $\bar{k}$ и запишите его в таблицу.

8. Для каждого i-го опыта найдите отклонение значения от среднего $\Delta k_i = k_i - \bar{k}$, а также квадрат отклонения $(\Delta k_i)^2$. Результаты расчетов занесите в два последних столбца табл. 1.

9. Рассчитайте сумму квадратов отклонений и запишите ее в соответствующую ячейку таблицы. Вычислите среднеквадратичную ошибку σ_k по формуле

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - k)^2}{n \cdot (n-1)}},$$

где $n = 5$ – число опытов.

10. Выберите из таблицы приложения значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ для $n = 5$ опытов и доверительной вероятности α = 0,95. Рассчитайте по формуле

$$\Delta_s k = t_{N,\alpha} \cdot \sigma_k$$

и запишите в тетрадь случайную погрешность измерения $\Delta_s k$.

11. Определите абсолютные приборные ошибки прямых измерений массы δm и времени δt, а также относительные ошибки E_m и E_t:

$$\delta m = 0{,}5\ \text{г},\ \delta t = 0{,}005\ \text{с},\ E_m = \frac{\delta m}{m_{\min}},\ \ E_t = \frac{\delta t}{t_{\min}},$$

где $m_{\min}$ и $t_{\min}$ – минимальные значения массы груза и времени колебаний из таблицы 1.

12. Найдите абсолютную приборную погрешность косвенного измерения коэффициента жесткости δk. Для этого, если потребуется, используйте формулу

$$\delta k = \bar{k} \cdot \sqrt{E_m{}^2 + (2E_t)^2}.$$

13. Оцените полную абсолютную Δk и относительную E_k погрешности по формулам:

$$\Delta k = \sqrt{(\Delta_s k)^2 + (\delta k)^2},$$

$$E_k = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \cdot 100\%.$$

14. Сделав необходимые округления, запишите окончательный результат измерения коэффициента жесткости в виде

$$k = \bar{k} \pm \Delta k.$$

Упражнение 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

1. Прикрепите к грузу *2* съемный диск *4*. Положите на груз навески *3* в количестве n_1, которое определяется Вашим вариантом (см. таблицу 3 в конце описания к работе). При этом значение общей массы колеблющегося груза m_1 занесите (в *кг*) в верхнюю строку табл. 2.

В виртуальном варианте лабораторной работы съемный диск уже прикреплен к грузу. Изменение массы груза за счет установления навесок в данном упражнении производится так же, как и в упражнении 1.

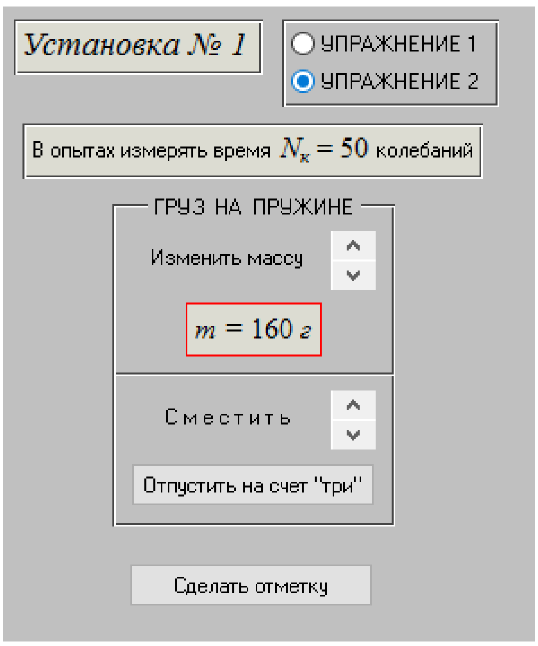
Таблица 2

$m_1 = \ldots$ *кг*				$m_2 = \ldots$ *кг*				$m_3 = \ldots$ *кг*			
N	*t,с*	*А,мм*	*b,кг*	*N*	*t,с*	*А,мм*	*b,кг/с*	*N*	*t,с*	*А,мм*	*b,кг/с*
0	0		-	0			-	0			-
10				10				10			
20				20				20			
30				30				30			
40				40				40			
50				50				50			

2. Приложив к измерительной линейке *5* полоску бумаги, отметьте на ней положение равновесия диска (для этого проведите горизонтальную черту против диска *4*).

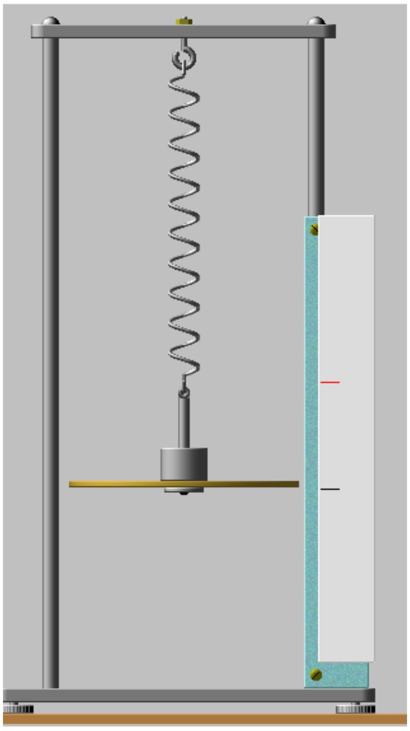
В виртуальном варианте лабораторной работы полоска бумаги уже установлена. Для отметки положения равновесия необходимо нажать на кнопку «Сделать отметку».

Работа 4.1. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК



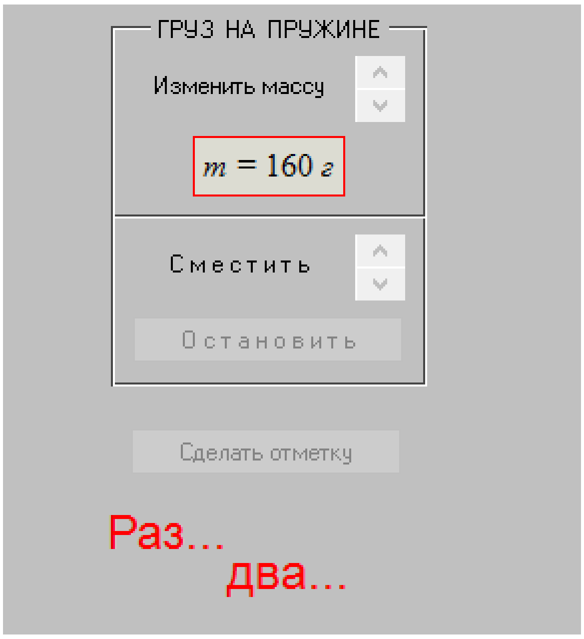
3. Сместите груз по вертикали на некоторое расстояние и отметьте положение диска чертой на полоске бумаги.

В виртуальном варианте лабораторной работы в данном упражнении смещение груза по вертикали производится так же, как и в упражнении 1. Рекомендуется смещать груз на максимальное расстояние. Для отметки положения диска необходимо снова нажать на кнопку «Сделать отметку». В итоге на полоске бумаге у Вас будет две отметки: одна - начальное положение диска, вторая – смещенное положение диска:



4. Отпустите груз, одновременно включив секундомер.

В виртуальном варианте лабораторной работы в данном упражнении работать с секундомером необходимо так же, как и в упражнении 1. Включать секундомер нужно на счет «три» (красная надпись):



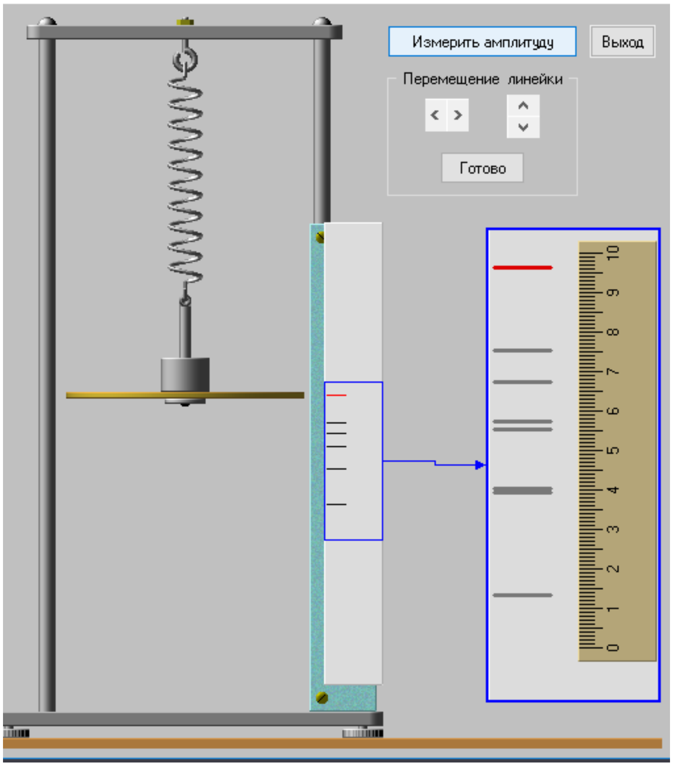
5. Отсчитав $N = 10$ полных колебаний маятника, отметьте чертой крайнее положение диска; повторите то же для $N = 20$, 30, 40 и 50 колебаний. После 50 колебаний выключите секундомер. Запишите значение времени $t_к$ в таблицу против $N = N_к = 50$.

В виртуальном варианте лабораторной работы отметка крайних положений диска после 10, 20, 30, 40 и 50 колебаний осуществляется кнопкой «Сделать отметку».

6. По формуле (3.15) рассчитайте время t для $N = 10$, 20, 40 и 50 колебаний. Результаты занесите во второй столбец таблицы.

7. Измеряя с помощью линейки расстояние от положения равновесия до соответствующих отметок на бумажной полоске. Эти расстояния и будут значениями амплитуды A колебаний груза для $N = 0$, 10, 20, 30, 40 и 50. Занесите эти значения в таблицу 2.

В виртуальном варианте лабораторной работы для измерения расстояний от положения равновесия до соответствующих отметок на бумажной полоске необходимо нажать на кнопку «Измерить амплитуду»:



После этого появится линейка, которую можно двигать кнопками-стрелками вверх, вниз, вправо и влево для удобства определения расстояний

8. Используя формулу (3.14), вычислите и занесите в таблицу значения коэффициента сопротивления воздуха b.

9. Повторите вышеописанные измерения, проведенные в пунктах 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и расчеты еще дважды, с другим числом навесок n_2 и n_3, определяемых Вашим вариантом в соответствие с таблицей 3.

10. Рассчитайте среднее из 15 полученных значений коэффициента b.

11. Для масс m_1, m_2 и m_3 вычислите по формулам (3.10) и (3.9) собственную частоты колебаний ω_0 и коэффициенты затухания β. При подстановке в формулы используйте средние значения коэффициента жесткости пружины k (из Упражнения 1) и коэффициента сопротивления воздуха b. Убедитесь в справедливости сделанного ранее допущения $\beta << \omega_0$.

5. Контрольные вопросы

1. Что называется классическим осциллятором?
2. Какие силы называются квазиупругими?
3. Что называется периодом колебаний?
4. Что называется частотой колебаний?
5. Запишите уравнение незатухающих колебаний пружинного маятника.
6. Запишите уравнение затухающих колебаний пружинного маятника.

7. Что называется фазой колебаний $x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$
8. Формула для циклической частоты затухающих колебаний.
9. Что называется логарифмическим декрементом затухания?
10. Как определяется добротность?
11. При каком условии движения маятника перестают быть периодическими?
12. Укажите правильную формулу для экспериментального определения коэффициента жесткости пружины в данной работе.
13. По какой формуле вычисляется коэффициент сопротивления среды в данной работе?
14. Простые задачи на гармонические колебания.

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 3

Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки	Число колебаний N в упражнении 1	Число n_1 навесок на грузе общей массой m_1 в упражнении 2	Число n_2 навесок на грузе общей массой m_2 в упражнении 2	Число n_3 навесок на грузе общей массой m_3 в упражнении 2
1	1	10	0	1	2
2	2	9	1	2	3
3	3	8	2	3	4
4	4	7	0	1	2
5	5	6	1	2	3
6	6	10	2	3	4
7	1	9	1	2	4
8	2	8	0	1	2
9	3	7	1	2	3
10	4	6	2	3	4
11	5	10	0	1	2
12	6	9	1	2	3
13	1	8	2	3	4
14	2	7	1	2	4
15	3	6	0	1	2
16	4	10	1	2	3
17	5	9	2	3	4
18	6	8	0	1	2
19	1	7	1	2	3

20	2	6	2	3	4
21	3	10	1	2	4
22	4	9	0	1	2
23	5	8	1	2	3
24	6	7	2	3	4
25	1	6	0	1	2
26	2	10	1	2	3
27	3	9	2	3	4
28	4	8	1	2	4
29	5	7	0	1	2
30	6	6	1	2	3

Лабораторная работа 2.1
Определение коэффициента вязкости воздуха

1. Теоретические сведения

Согласно молекулярно-кинетическая теории :

1. Все вещества состоят из атомов или молекул, размеры которых порядка 10^{-10} м.

2. Атомы и молекулы вещества разделены промежутками, свободными от вещества.

3. Между молекулами тела одновременно действуют силы взаимного протяжения и силы взаимного отталкивания.

4. Молекулы всех тел находятся в состоянии беспорядочного непрерывного движения. Хаотическое движение молекул называют также тепловым движением.

Скорость движения молекул связана с температурой тела в целом: чем больше эта скорость, тем выше температура. Таким образом, скорость движения молекул определяет тепловое состояние тела – его внутреннюю энергию.

От интенсивности теплового движения молекул и интенсивности их взаимодействия зависит, в каком из возможных агрегатных состояний находится вещество (в твердом, жидком, газообразном, плазменном). По мере увеличения интенсивности теплового движения среднее расстояние между молекулами возрастает, а силы притяжения уменьшаются, и тело переходит из твердого состояния в жидкое.

Идеальный газ – это идеализированная система частиц, обладающая следующими свойствами:

1. Суммарный собственный объем частиц намного меньше размеров сосуда, в котором они находятся.

2. Частицы взаимодействуют друг с другом только во время столкновений.

3. В промежутках между столкновениями частицы движутся свободно, прямолинейно и равномерно, причем время свободного движения гораздо больше времени взаимодействия.

4. Столкновение частиц друг с другом и со стенками сосуда подчиняются законам абсолютно упругого столкновения.

5. Полностью отсутствует упорядоченное движение частиц.

Идеальный газ – это лишь простейшая модель газообразного состояния, но этой моделью описываются реальные газы в условиях, близких к нормальным, а также в условиях низкого давления и высокой температуры.

Физические величины, характеризующие то или иное состояние вещества, называются *параметрами состояния.* Основными параметрами газообразного состояния являются масса газа m, объем V, давление p и температура T.

Под объемом V системы в случае идеального газа подразумевается пространство, предоставленное для движения молекул системы, т.е. объем сосуда, в котором заключен газ.

Давлением P называется скалярная физическая величина, характеризующая распределение силы по поверхности, на которую она действует, и численно равная силе, действующей на единичную площадку в направлении, перпендикулярном к площадке.

При равномерном распределении силы по плоской поверхности S давление

$$p = \frac{F\ \cos\alpha}{S} = \frac{F_n}{S}, \tag{1.1}$$

при неравномерном

$$p = \frac{d\left(F\cos\alpha\right)}{dS} = \frac{dF_n}{dS}\ , \tag{1.2}$$

где α - угол между направлением силы и направлением нормали к поверхности. В системе СИ давление измеряется в паскалях (Па), т.е. в Н/м^2. Кроме того, используются внесистемные единицы: физическая атмосфера (атм), миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.), бар и другие. 1 атм = 1,013·10^5 Па; 1 бар ==10^5 Па; 1 мм рт. ст.=133 Па.

Температура это скалярная физическая величина, характеризующая интенсивность хаотического движения частиц системы и пропорциональная средней кинетической энергии поступательного движения одной частицы:

$$T = \gamma < \varepsilon_{пост.} > , \tag{1.3}$$

где γ – размерный коэффициент пропорциональности, $<\ldots>$ – знак среднего значения. Выражение (1.3) отражает определение абсолютной температуры. *За начало отсчета абсолютной температуры – абсолютный нуль – принята такая температура, при которой прекращается хаотическое поступательное движение частиц системы*: $T = 0$, если $<\varepsilon_{пост.}> = 0$. В этом смысле можно говорить, что температура характеризует степень нагретости тела. Абсолютная температура измеряется в системе СИ в градусах Кельвина (К). Она связана с температурой по шкале Цельсия соотношением: T К = t° С + 273,16.

Рассмотрим идеальный одноатомный газ и предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа намного меньше, чем число ударов о стенки сосуда столкновения молекул со стенками сосуда носят характер абсолютно упругого удара. В рамках данных предположений можно вывести уравнение

$$p = \frac{1}{3} nm\langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{1.4}$$

где

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}, \tag{1.5}$$

есть средняя квадратичную скорость сред молекул газа, m есть масса молекул газа, p есть давление газа, N есть число молекул газа в сосуде. Уравнение (1.4) называется *основным уравнением молекулярно- кинетической теории идеального газа или уравнением Клаузиуса.*

Учитывая, что концентрация молекул газа есть $n = N/V$, где V - объем газа, получим

$$pV = \frac{1}{3} Nm\langle v_{\text{кв}} \rangle^2 \tag{1.6}$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \tag{1.7}$$

где

$$E = N \frac{m\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}$$

есть суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Уравнение (1.7) является еще одной формой записи основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Еще одна важная форма записи основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов есть:

$$p = \frac{2}{3} n\varepsilon$$

где $\varepsilon = \dfrac{m\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа.

Уравнение (1.7) позволяет получить все известные законы идеального газа: Гей-Люссака, Бойля – Мариотта, Шарля, Менделеева – Клапейрона и др. Действительно, если в сосуде объемом V при давлении p и температуре T находится N молекул, то $n = N/V$, а $E = cT$ в силу (1.3), где c – коэффициент пропорциональности. Тогда

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V} cT,$$

или

$$\frac{pV}{T} = \frac{2}{3} Nc,$$

Коэффициент $2/3Nc = B$ зависит от массы газа и его природы. Если масса газа постоянна, то можно записать закон Клапейрона – Менделеева

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const} . \qquad (1.8)$$

В соответствии с первым законом Авогадро *моли всех газов при нормальных условиях занимают одинаковый объем, равный 22,4 м*^{3}*/моль.* Отсюда следует, что в случае, когда количество газа равно одному молю, величина B в (1.8) будет одинаковой для всех газов и ее можно обозначить буквой R и назвать *универсальной газовой постоянной* (R=8,31 Дж/(К·моль)). Тогда уравнение (1.8) для одного моля запишется в виде

$$pV_\mu = RT. \qquad (1.9)$$

От уравнения для одного моля можно перейти к уравнению для любой массы газа, приняв во внимание, что при одинаковых давлении и температуре $\nu = M/\mu$ молей будут занимать в ν раз больше объем, чем один моль, в результате получим:

$$V = \nu V_\mu = \frac{M}{\mu} V_\mu , \qquad (1.10)$$

где M – масса газа, μ – масса моля газа (молярная масса). С учетом (1.11),

$$pV = \frac{M}{\mu} RT . \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется *уравнением состояния идеального газа* или *уравнением Менделеева – Клапейрона для произвольной массы газа*.

Согласно закону Авогадро, *моли всех газов содержат одинаковое число молекул, равное* N_A *= 6,02·10*^{26} *моль*$^{-1}$. С учетом этого уравнение (1.12) можно преобразовать к новому виду. Для этого введем величину $k = R/N_A$. Подставив в выражении k численные значения R и N_A, получим

$$k = \frac{8{,}31\,\text{Дж/моль}}{6{,}023 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}.$$

Величина k называется постоянной Больцмана. Умножив и разделив правую часть уравнения (1.11) на N_A, получим

$$pV = \nu N_A kT\,p.$$

Произведение νN_A равно числу молекул N, содержащихся в массе газа M. С учетом этого получим

$$pV = NkT ,$$

а с учетом того, что $N/V = n$ – число молекул в единице объема, можно записать:

$$p = nkT. \qquad (1.12)$$

Уравнение (1.12) показывает, что *давление идеального газа при данной температуре определяется только числом молекул в единице объема и не зависит от рода молекул.*

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории молекулам задаются различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое количество молекул. Согласно молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул газа массой *M* в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, остается постоянной. Это можно видеть, если приравнять левые части основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа, записанные в различных формах $p = nkT$ и $p = \frac{1}{3} nm\langle v \rangle_{кв}^{\ 2}$

$$nkT = \frac{1}{3} nm\langle v \rangle_{кв}^{\ 2}$$

и выразить отсюда $\langle v \rangle_{кв}$:

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Это объясняется тем, что в газе, находящимся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, подчиняющееся вполне определенному закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом. Максвелл предполагал, что газ состоит из большого числа *N* тождественных молекул (они находятся в состоянии хаотического теплового движения при одинаковой температуре) и, что силовые поля на газ не действуют.

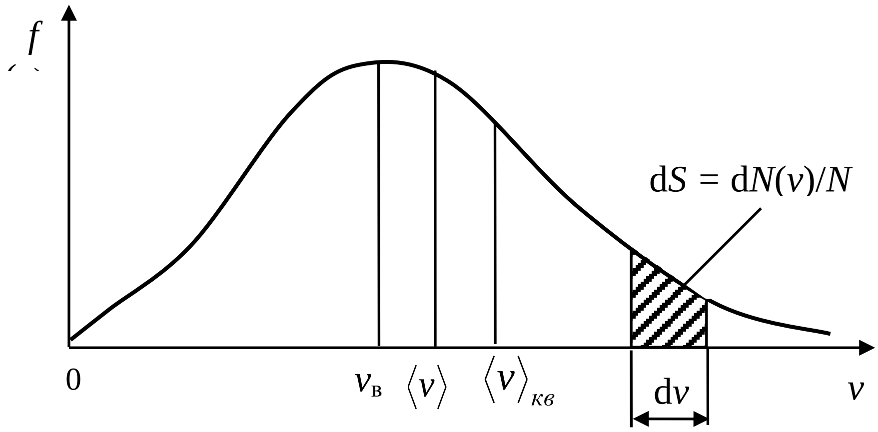
Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой *функцией распределения молекул по скоростям*. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv, то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, т.е. $dN(v)/N = f(v)dv$, откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}.$$

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашел функцию $f(v)$ – *закон для распределения молекул идеального газа по скоростям:*

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{mv^2}{2kT} \right). \qquad (1.13)$$

Из (1.13) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (масса молекулы) и от параметра состояния (температура *T*). График функции (1.13) приведен на рисунке ниже:



При возрастании скорости v множитель $\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2kT}\right)$ уменьшается быстрее, чем растет множитель v^2, то функция $f(v)$, начинаясь с нуля, достигает максимума при наиболее вероятной скорости $v_в$ и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно $v_в$.

Относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, находится как площадь полоски на рисунке. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1.$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется *наиболее вероятной скоростью* $v_в$. Значение наиболее вероятной скорости можно найти, продиффеденцировав выражение (1.13) (постоянные множители опускаем) по аргументу v, приравняв результат к нулю и использовав условие для максимума выражения $f(v)$:

$$\frac{d}{dv}\left(v^2 \exp\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)\right) = 2v\left(1 - \frac{mv^2}{2kT}\right)\exp\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0.$$

Значения $v = 0$ и $v = \infty$ соответствуют минимумам выражения (1.13), значение v, при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость $v_в$:

$$v_в = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2RT/M}\,, \qquad (1.14)$$

где M - масса одного моля газа. Из формулы (1.14) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям смещается вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

Средняя скорость (*средний модуль скорости*) молекулы $\langle v \rangle$ определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v\ dN(v) = \int_0^\infty v\ f(v)dv\,.$$

Подставляя в последнее выражение $f(v)$ и интегрируя его, получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad (1.15)$$

Итак, скорости, характеризующие состояние газа есть:

1) наиболее вероятная скорость

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

2) *средняя скорость*

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1.13 v_в$$

3) *средняя квадратичная скорость* определяется как величина, квадрат которой равен

$$\langle v \rangle_{кв}^2 = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 dN(v) = \int_0^\infty v^2\ f(v)dv\,.$$

Как мы уже знаем, средняя квадратичная скорость равна

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1.22 v_в\,.$$

Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v) = N\cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \varepsilon \exp\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)dv\,, \qquad (1.16)$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии ε. Для этого перейдем от переменной v к переменной $\varepsilon = \dfrac{mv^2}{2}$.

Подставив в уравнение (1.16) $v = \sqrt{2\varepsilon/m}$ и $dv = (2m\varepsilon)^{-1/2} d\varepsilon$, получим

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2kT}\right)d\varepsilon = Nf(\varepsilon)d\varepsilon\,,$$

где $dN(\varepsilon)$ – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$. Таким образом, функция распределения молекул по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2kT}\right)$$

При этом средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа

$$\langle\varepsilon\rangle=\int_0^\infty \varepsilon\ f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2kT}\right)d\varepsilon=\frac{3}{2}kT\,.$$

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторое расстояние l, которое называется *длиной свободного пробега* молекул. Эти расстояния могут быть самыми разными. Поэтому в кинетической теории вводится понятие средней длины свободного пробега молекул $<l>$.

При вычислении $<l>$ необходимо принять определенную модель газа. Будем считать, что молекулы представляют собой шарики некоторого диаметра d порядка 10^{-10} *м*, зависящего от природы газа. Двигаясь со средней скоростью $<v>$, молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся в цилиндре радиуса d. Расчеты показывают, что среднее число столкновений $<z>$, которое испытает молекула с другими неподвижными молекулами за время Δt, будет определяться формулой

$$<z>=\sqrt{2}\pi d^2<v>n\Delta t\,, \qquad (1.17)$$

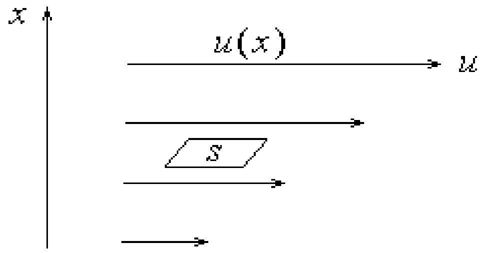
где n - концентрация молекул. Тогда средняя длина свободного пробега молекул

$$<l>=<v>\frac{\Delta t}{<z>}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\,, \qquad (1.18)$$

т.е. *обратно пропорциональна концентрации молекул (или давлению p т. к., $p=nkT$).* Можно показать, что при нормальных условиях $<l>\approx 10^{-7}$ м и число столкновений за 1 секунду $\dfrac{<z>}{\Delta t}\approx 10^{10}\,c^{-1}$.

Беспорядочность теплового движения молекул газа, непрерывные столкновения между ними приводят к постоянному перемешиванию частиц и изменению их скоростей и энергий. Если в газе существует пространственная неоднородность плотности, температуры, скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев, то происходит самопроизвольное выравнивание этих неоднородностей. В этом случае в газе возникают потоки вещества, энергии, импульса упорядоченного движения молекул. Эти потоки, характерные для неравновесных состояний газа, являются физической основой особых процессов, объединенных общим названием *явления переноса*. К этим явлениям относятся диффузия, теплопроводность и внутреннее трение. Здесь мы рассмотрим только внутреннее трение. Для простоты ограничимся одномерными явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

Внутреннее трение возникает между слоями газа, движущимися упорядоченно с различными скоростями u (см. рисунок). Из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее и ускорению слоя, движущегося медленнее. Согласно закону Ньютона (1687 г) сила внутреннего трения между слоями газа (жидкости)



$$F = -\eta(du/dx)S, \tag{1.19}$$

где *(du/dx)* характеризует быстроту изменения скорости u на единицу длины x , S – площадь, на которую действует сила (площадка S перпендикулярна x), η *– коэффициент внутреннего трения* (он также называется *динамической вязкостью* или *коэффициентом динамической вязкости*) и знак минус в (1.19) указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости слоев u. С помощью молекулярно-кинетической теории можно показать, что для коэффициента внутреннего трения справедлива формула

$$\eta = \frac{1}{3} < v >< l > \rho . \tag{1.20}$$

2. Цель работы. Схема экспериментальной установки

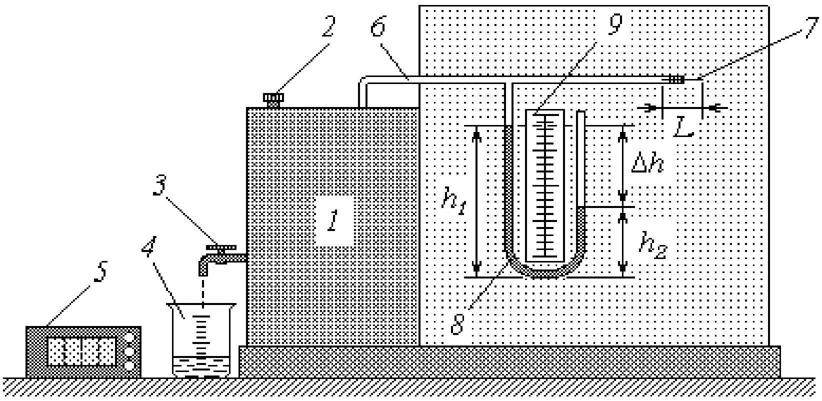
Целью работы является:

1) изучение явления внутреннего трения в газах;

2) экспериментальное определение коэффициента вязкости воздуха;

3) оценка средней длины свободного пробега молекул и их эффективного диаметра.

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке ниже. Элементы установки выполняют следующие функции. В резервуар *1* заливается вода, после чего он герметично закрывается завинчивающейся крышкой *2*. Для слива воды предназначен кран *3*; мерный стакан *4* позволяет контролировать объем сливаемой воды V, а секундомер *5* – время ее истечения t. Воздух в надводной части резервуара сообщается с атмосферой через трубку *6*, в свободный конец которой вмонтирован капилляр (очень узкая стеклянная трубка) *7* длиной L. По мере вытекания воды из резервуара его надводный объем увеличивается, что приводит к падению в нем давления воздуха. При возникновении на концах капилляра перепада давлений Δp начинается всасывание воздуха. Для измерения перепада давлений Δp используется манометр *8*, представляющий собой U-образную стеклянную трубку с подкрашенной водой. Одно колено манометра сообщается через трубку *6* с воздухом в резервуаре, а другое (открытое) – с атмосферой. Уровни воды в коленах манометра h_1 и h_2 измеряются с помощью линейки *9*.



1 – резервуар;
2 – крышка;
3 – кран;
4 – мерный стакан;
5 – секундомер;
6 – трубка;
7 – капилляр;
8 – манометр;
9 – линейка

3. Описание методики измерений

При понижении давления в резервуаре уровень воды в левом (на схеме) колене повышается, а в правом – понижается, пока давление столба воды $\Delta h = h_1 - h_2$ не уравновесит перепад давлений Δp:

$$\Delta p = \rho_в \, g \, (h_1 - h_2) \,, \tag{3.1}$$

где $\rho_в$ – плотность воды; g – ускорение свободного падения.

В установившемся режиме объемный расход воздуха G (объем, протекающий за единицу времени) через капилляр длиной L и радиуса r, равен объемному расходу вытекающей из резервуара воды:

$$G = \frac{V}{t} \,. \tag{3.2}$$

Очевидно, что величина G тем больше, чем больше перепад давлений Δp и внутренний радиус капилляра r, и тем меньше, чем длиннее капилляр и больше вязкость текущего воздуха η. Количественно взаимосвязь этих величин определяется *формулой Пуазейля*

$$G = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 L \eta} \,,$$

С учетом соотношений (3.1) и (3.2) эта формула примет вид

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 \rho_в g (h_1 - h_2)}{8 L \eta} \,. \tag{3.3}$$

Зная геометрические размеры (длину L и радиус r) капилляра и измеряя величины V, t, h_1 и h_2, с помощью формулы (3.3) можно найти коэффициент вязкости воздуха:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho_в g(h_1 - h_2)t}{8LV}$$

Значения L, r, g и $\rho_в$ представляют собой константы; если в процессе опытов поддерживать неизменным освобождаемый объем V, то расчетную формулу для коэффициента вязкости можно представить в виде

$$\eta = C(h_1 - h_2)t \ , \tag{3.4}$$

где

$$C = \frac{\pi r^4 \rho_в g}{8LV} \ . \tag{3.5}$$

Молекулярно-кинетическая теория дает следующее выражение для коэффициента вязкости идеального газа:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho <l><v>, \tag{3.6}$$

где ρ – плотность газа; $<l>$ – средняя длина свободного пробега молекул; $<v>$ – средняя скорость их хаотического (теплового) движения. Из выражения (3.6) можно найти среднюю длину пробега:

$$<l> = \frac{3\eta}{\rho <v>} . \tag{3.7}$$

Плотность газа выразим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT ,$$

откуда

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} , \tag{3.8}$$

где p – давление, V – объем; m – масса газа, μ – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Распределение молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла) позволяет найти среднюю скорость их теплового движения как

$$<v> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} . \tag{3.9}$$

Подставляя выражения (3.8) и (3.9) в (3.7), получим

$$<l> = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}} \ . \tag{3.10}$$

В соответствии с теорией, средняя длина свободного пробега $<l>$ молекул идеального газа обратно пропорциональна их концентрации n и эффективному сечению σ, т.е. квадрату эффективного диаметра $d_э$:

$$<l> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_э{}^2 n} ,$$

откуда

$$d_э = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}\pi n < l >}}.$$

Учитывая известное соотношение

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана, выразим концентрацию молекул через давление газа и его температуру:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Тогда

$$d_э = \sqrt{\frac{kT}{\pi\sqrt{2}p < l >}} \quad . \qquad (11)$$

4. Порядок измерений и обработки результатов

1. Узнайте номер своего варианта и в соответствие с ним с помощью таблицы 2 определите номер лабораторной установки и число опытов n, которые Вам необходимо сделать.

2. Ознакомьтесь с рекомендациями по выполнению работы на данной установке. Выпишите в тетрадь геометрические размеры капилляра L и r, выразив их в метрах. Используя справочные материалы, спишите значения известных констант g, R, k, а также плотность воды $\rho_в$. Молярную массу воздуха примите равной $\mu = 29$ *кг/кмоль*. Запишите рекомендуемое значение объема выливаемой из резервуара воды V.

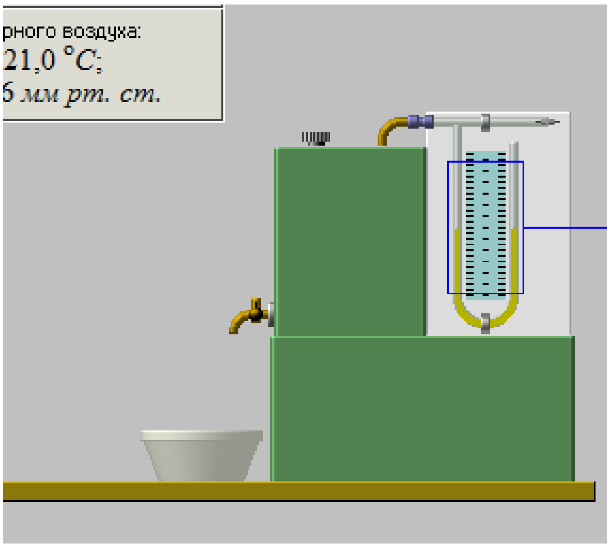
3. Рассчитайте по формуле (3.5) и запишите в тетрадь значение константы C (в $Н/м^3$).

4. Спишите с экрана монитора данные о параметрах окружающего воздуха.

5. Температуру воздуха T переведите из градусов Цельсия в кельвины, а давление p – из миллиметров ртутного столба в паскали.

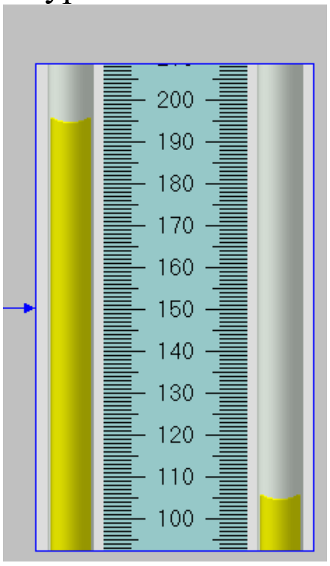
6. Подставьте под кран сливную емкость; откройте кран и следите за уровнями воды в манометре.

В виртуальном варианте лабораторной работы сливная емкость уже стоит под краном:

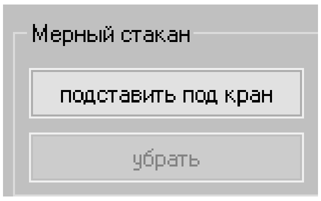


Чтобы открыть кран необходимо нажимать на кнопки-стрелки «вверх» и «вниз», регулируя расход воды в кране:

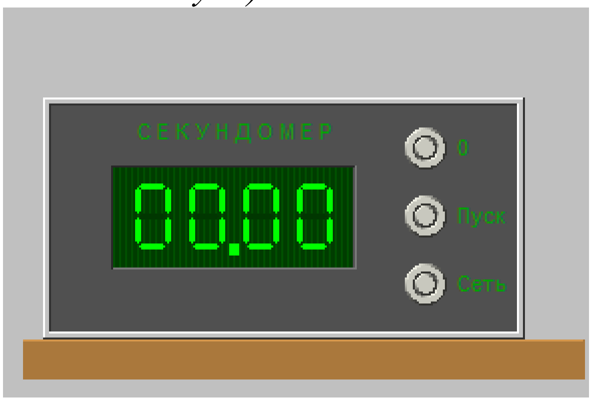
После установления постоянных уровней



с помощью линейки определите и запишите в таблицу высоту уровней h_1 и h_2, выразив эти значения в метрах. Затем, не меняя расхода воды в кране, подставьте под кран мерный стакан. *В виртуальном варианте лабораторной работы для того чтобы подставить мерный стакан под кран необходимо нажать на кнопку «подставить под кран»:*



В момент, когда мерный стакан установится под кран, необходимо запустить секундомер (предварительно включив его и установив в начальной положение, т.е. в положение 0 секунд). *В виртуальном варианте лабораторной работы секундомер имеет 3 кнопки: «0», «Пуск» и «Сеть». Кнопка «Сеть» включает секундомер. Кнопка «Пуск» поочередно запускает и останавливает секундомер, кнопка «0» ставит секундомер в начальное положение (в положение 0 секунд).*



В момент наполнения стакана до заданного объема *V* выключите секундомер и затем закройте кран (*в виртуальном варианте лабораторной работы кран закрывается автоматически в момент наполнения стакана до заданного объема V*). Занесите в таблицу показания секундомера *t* (номер опыта 1).

Таблица 1

Номер опыта	h_1, *м*	h_2, *м*	*t, c*	η_i, *мкПа·с*	$\Delta\eta_i = \eta_i - \overline{\eta}$, *кПа·с*	$(\Delta\eta_i)^2$, *кПа·с*
1						
2						
3						
…	…	…	…	…	…	…
n						
				$\overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i = \ldots$		$\sum_{i=1}^{n}(\Delta\eta_i)^2 = \ldots$

Повторите описанный в п. 5 опыт еще $n-1$ раз, стараясь устанавливать различный расход воды из крана (а значит, различный перепад уровней воды в манометре).

7. Для каждого из n проделанных измерений вычислите коэффициент вязкости воздуха по формуле (3.4) и занесите его в таблицу. Для удобства записи и дальнейших расчетов переведите полученные значения в *мкПа·с*.

8. Найдите среднее значение коэффициента вязкости $\overline{\eta}$ и занесите его в таблицу 1.

9. Найдите отклонения $\Delta\eta_i = \eta_i - \overline{\eta}$, и их квадраты $(\Delta\eta_i)^2$, и занесите их значения в последние два столбца таблицы 1.

10. Рассчитайте сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}(\Delta\eta_i)^2$ коэффициента вязкости и запишите ее в соответствующую ячейку таблицы.

11. Вычислите среднеквадратичную ошибку σ_η по формуле

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta\eta_i)^2}{n\cdot(n-1)}}$$

12. Выберите из таблицы приложения значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ для n опытов и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$. Рассчитайте по формуле

$$\Delta_s\eta = t_{N,\alpha}\cdot\sigma_\eta$$

и запишите в тетрадь случайную погрешность измерения $\Delta_s\gamma$.

13. Определите абсолютные приборные ошибки прямых измерений уровней воды δh, радиуса δr и длины δL капилляра, объема выливаемой воды δV и времени ее истечения δt, а также относительные ошибки

$$E_h = \frac{2\delta h}{\min(h_1 - h_2)},\quad E_r = \frac{\delta r}{r},\quad E_L = \frac{\delta L}{L},\quad E_V = \frac{\delta V}{V} \quad \text{и} \quad E_t = \frac{\delta t}{\min(t)},$$

где $\min(h_1 - h_2)$ есть минимальное значение разности уровней h_1 и h_2 из таблицы 1, $\min(t)$ есть минимальное значение времени t из таблицы 1.

14. Найдите абсолютную приборную погрешность косвенного измерения коэффициента вязкости $\delta\eta$ с помощью формулы

$$\delta\eta = \overline{\eta}\sqrt{E_h{}^2 + (4E_r)^2 + E_L{}^2 + E_V{}^2 + E_t{}^2}\ .$$

15. Вычислите полную погрешность

$$\Delta\eta = \sqrt{\delta\mu^2 + \Delta_s\eta^2}\ .$$

16. Запишите ответ в виде

$$\eta = \overline{\eta} \pm \Delta\eta\,.$$

17. Подставляя в формулу (3.10) среднее значение коэффициента вязкости $\overline{\eta}$ (в *Па·с*), оцените среднюю длину свободного пробега молекул воздуха $<l>$, а затем по формуле (3.11) – их эффективный диаметр $d_э$.

5. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории.
2. Что называется идеальным газом?
3. Какие величины называются параметрами состояния?
4. Что подразумевается под объемом системы?
5. Что называется давлением?
6. Что такое температура системы?
7. Запишите основное уравнение молекулярно- кинетической теории идеального газа.
8. Запишите формулу для средней квадратичной скорости молекул газа.
9. Запишите уравнение Менделеева – Клапейрона для произвольной массы газа.
10. Как связана постоянная Больцмана с универсальной газовой постоянной?
11. Как связано давление идеального газа с его температурой и концентрацией молекул?
12. Что такое функция распределения молекул по скоростям?
13. Запишите закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям.
14. Как определяется наиболее вероятная скорость через функцию распределения молекул идеального газа по скоростям?
15. Как определяется средняя скорость (средний модуль скорости) через функцию распределения молекул идеального газа по скоростям?
16. Как определяется средняя квадратичная скорость (средний модуль скорости) через функцию распределения молекул идеального газа по скоростям?
17. Запишите формулу для функции распределения молекул по энергиям теплового движения.
18. Что называется длиной свободного пробега молекул?
19. Как связано среднее число столкновений со средним модулем скорости молекул?
20. Запишите закону Ньютона для силы внутреннего трения между слоями газа (жидкости)
21. Как выражается коэффициент внутреннего трения через средний модуль скорости и среднюю длину свободного пробега молекул?
22. Запишите формулу Пуазейля и поясните входящие в нее величины.
23. Запишите расчетную формулу для коэффициента вязкости воздуха, которая используется в данной работе.

24. Запишите расчетную формулу для среднюю длину свободного пробега молекул воздуха, которая используется в данной работе
25. Запишите расчетную формулу для их эффективного диаметра молекул воздуха, которая используется в данной работе

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 2

Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки	Число опытов n
1	1	8
2	2	7
3	3	6
4	4	5
5	5	4
6	6	8
7	1	7
8	2	6
9	3	5
10	4	4
11	5	8
12	6	7
13	1	6
14	2	5
15	3	4
16	4	8
17	5	7
18	6	6
19	1	5
20	2	4
21	3	8
22	4	7
23	5	6
24	6	5
25	1	4
26	2	8
27	3	7
28	4	6
29	5	5
30	6	4

Лабораторная работа 2.2
Определение отношения теплоемкостей газа методом адиабатического расширения

1. Теоретические сведения

Всякая термодинамическая система в любом состоянии обладает некоторой энергией: кинетической энергией системы как целого, потенциальной энергией во внешнем поле сил и внутренней энергией. В термодинамике обычно рассчитывают макроскопически неподвижные системы, не подверженные действию внешних полей. Для таких систем значения полной и внутренней энергии совпадают. Поэтому понятие внутренней энергии является одним из основных в термодинамике.

Внутренняя энергия произвольной термодинамической системы U равна сумме всех видов энергий движения и взаимодействия частиц, составляющих данную систему, за вычетом кинетической энергии движения системы как целого. Внутренняя энергия системы включает в себя:

- кинетическую энергию поступательного и вращательного движения молекул;
- кинетическую энергию колебательного движения атомов в молекуле;
- потенциальную энергию взаимодействия молекул и атомов внутри молекулы;
- энергию электронных оболочек атомов;
- энергию движения и взаимодействия нуклонов в ядрах атомов.

Таким образом, *под внутренней энергией газа понимается энергию теплового движения (поступательного и вращательного) молекул и потенциальную энергию их взаимодействия.*

Из данного определения следует, что внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы, ее значение не зависит от того, каким образом система пришла в данное состояние, т.е. не зависит от вида процесса перехода.

В случае идеального газа нет сил межмолекулярного взаимодействия и внутренняя энергия равна сумме энергий беспорядочного (теплового) движения всех молекул.

Работа газа A – это количественная мера изменения энергии термодинамической системы при ее переходе из одного состояния в другое. Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, воздействующих на систему. Например, при перемещении поршня, закрывающего заключенный в сосуде газ, совершается работа A'. По третьему закону Ньютона газ при этом совершает над поршнем работу $A = A'$. Таким образом, работа представляет собой процесс передачи энергии упорядоченного движения. Совершение работы над системой приводит к увеличению ее внутренней энергии.

Теплота Q – это также количественная мера изменения энергии термодинамической системы при переходе ее из одного состояния в другое. Однако теплообмен представляет собой процесс, не связанный с макроскопическим перемещением взаимодействующих тел. Этот процесс передачи энергии неупорядоченного движения от одних тел к другим осуществляется за счет обмена энергией непосредственно между хаотически движущимися частицами тел. Например, при соприкосновении «холодного» и «горячего» газов молекулы нагретого газа при случайных столкновениях передают энергию молекулам холодного газа.

В реальных условиях оба способа передачи энергии термодинамической системе (в форме работы и теплопередачи) сопутствуют друг другу. Например, при нагревании тела расширяются и совершают работу над внешними телами. Количество переданного тепла, как и работа, – есть функции процесса. Поэтому говорить о «запасе тепла» или о «запасе работы» в термодинамической системе бессмысленно.

Все три величины – энергия, работа и теплота в системе СИ измеряются в джоулях (Дж).

Рассмотрим термодинамическую систему – газ. Работа, совершаемая при конечном изменении объема газа от V_1 до V_2 определяется общей формулой

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV, \tag{1.1}$$

где P – давление газа, dV – приращение его объема. Приращение объема газа может быть как положительным, так и отрицательным. Если $dV > 0$, то $dA > 0$: система совершает работу над внешними телами – отдает им часть своей энергии. Если $dV < 0$, то $dA < 0$: внешние тела совершают над системой работу – система получает энергию извне.

Графически работа изображается в координатах p и V площадью, ограниченной кривой $P = f(V)$ и двумя ординатами, соответствующими начальному V_1 и конечному V_2 объемам (Рис. 1):

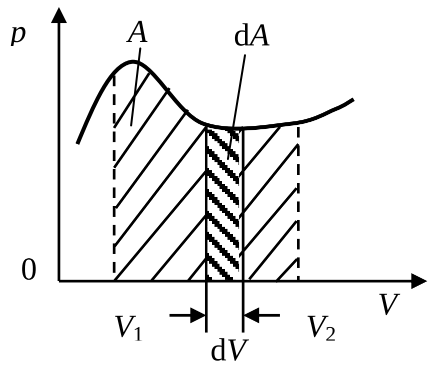


Рис. 1

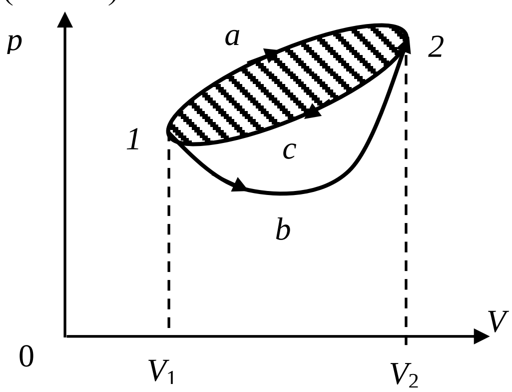


Рис. 2

Элементарная работа системы dA численно равна площади узкой заштрихованной полоски, полная работа A – площади криволинейной трапеции.

Процесс, при котором система, пройдя некоторую последовательность состояний, снова возвращается в исходное состояние, называется круговым процессом (циклом). Вместе с тем, численное значение работы зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое. Так, если система переходит из состояния 1 в состояние 2 один раз по пути (a), а другой раз по пути (b) (рис. 6), то $A_{1a2} \neq A_{1b2}$. Следовательно, работа, совершаемая при круговом процессе, отлична от нуля. Это означает, что силы давления – неконсервативные силы.

Графически работа при круговом процессе изображается площадью, заключенной внутри кривой процесса (заштрихованная область на рис. 2). Работа за цикл положительна (система отдает энергию внешним телам), если цикл обходится по часовой стрелке, и отрицательна (система получает энергию извне), если цикл проходится против часовой стрелки. Действительно, работа, совершаемая системой за цикл $1a2c1$, равна сумме работ, совершаемых на участках $1a2$ и $2c1$:

$$A = A_{1a2} + A_{2c1}$$

Работа на участке $1a2$ положительна (система расширяется) и по абсолютной величине равна площади криволинейной трапеции V_1aV_2. Работа на участке $2c1$ отрицательна (объем системы уменьшается) и по абсолютной величине равна площади криволинейной трапеции V_1cV_2, которая меньше площади V_1aV_2. Следовательно,

$$A = A_{1a2} + A_{2c1} > 0$$

Пользуясь общим выражением работы в термодинамике, найдем работу в изопроцессах.

Изохорический процесс осуществляется при нагревании или охлаждении газа при постоянном объеме сосуда. В этом процессе $V_1 = V_2$ и газ не совершает работы:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_1} pdV = 0\,. \tag{1.2}$$

Изобарический процесс осуществляется при нагревании или охлаждении газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем. В изобарическом процессе

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)\ . \tag{1.3}$$

Изотермический процесс должен осуществляться настолько медленно, чтобы теплообмен между газом и окружающей средой не вызвал изменение температуры газа. Совершаемая газом в изотермическом процессе работа

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{M}{\mu}RT\frac{dV}{V}=\frac{M}{\mu}RT\,\ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad (1.4)$$

где p находится из уравнения Менделеева – Клапейрона.

Передача тепловой энергии (теплоты) – энергии хаотического движения молекул – зависит от физических свойств системы, характера термодинамического процесса и выражается изменением температуры тела. Для характеристики способности тел повышать свою температуру за счет полученного извне тепла вводится понятие теплоемкость.

Теплоемкость C – скалярная физическая величина, характеризующая связь между количеством сообщенного системе тепла и изменением ее температуры.

Различают *молярную и удельную теплоемкости.*

Удельной теплоемкостью вещества называется величина, равная количеству теплоты, которую необходимо сообщить единице массы вещества для увеличения ее температуры на один Кельвин:

$$c=\frac{\delta Q}{mdT}. \qquad (1.5)$$

Теплоемкость одного моля вещества называется *молярной теплоемкостью*:

$$C=\frac{\delta Q}{\frac{m}{\mu}dT}. \qquad (1.6)$$

где m – масса, μ – молярная масса вещества.

Значение теплоемкости газов зависит от условий их нагревания. Согласно первому началу термодинамики *количество теплоты δQ, сообщенное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии dU и на выполнение системой работы δA против внешних сил:*

$$\delta Q=dU+\delta A \qquad (1.7)$$

Увеличение внутренней энергии идеального газа в случае изменения его температуры на dT:

$$dU=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}\cdot R\cdot dT, \qquad (1.8)$$

где i – число степеней свободы молекулы, под которым подразумевается число независимых координат, определяющих положение молекулы в пространстве: i=3 – для одноатомной; i=5 – для двухатомной; i=6 – для трех- и многоатомной, R – универсальная газовая постоянная; R=8,31 Дж/(моль·К).

При расширении газа система выполняет работу

$$\delta A=pdV \qquad (1.9)$$

Если газ нагревать при постоянном объеме $V=const$, то $\delta A=0$ и согласно с (1.7) все полученное газом количество теплоты расходуется только на увеличение его внутренней энергии $\delta Q_V = dU$ и, учитывая (1.8), молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объёме

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} \cdot R. \qquad (1.10)$$

Если газ нагревать при постоянном давлении $P=const$, то полученное газом количество теплоты расходуется на увеличение внутренней энергии dU и выполнение работы δA

$$\delta Q_P = dU + PdV.$$

Тогда молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_P = \frac{dU}{dT} + P \cdot \left(\frac{dV}{dT}\right)_P, \qquad (1.11)$$

где индекс P у производной $\left(\frac{dV}{dT}\right)_P$ означает, что при ее вычислении считается, что давление газа постоянно. Используя уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{\mu} \cdot RT,$$

можно показать, что для одного моля газа

$$p\left(\frac{dV}{dT}\right)_P = R$$

и, поэтому

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} \cdot R. \qquad (1.12)$$

Формула (1.12) называется формулой Майера. Из формул (1.10) и (1.12) следует, что отношение теплоемкостей равно

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \qquad (1.13)$$

Адиабатическим (или *адиабатным*) называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой, $\delta Q=0$. На практике этот процесс может быть осуществлен в системе, окруженной теплоизоляционной оболочкой, но поскольку для теплообмена необходимо некоторое время, то адиабатическим можно считать также процесс, который протекает так быстро, что система не успевает вступить в теплообмен с окружающей средой. Первый закон термодинамики с учетом (1.8) – (1.10) для адиабатного процесса имеет вид

$$\frac{m}{\mu} \cdot C_V \cdot dT = -PdV. \qquad (1.14)$$

Продифференцировав уравнение Клапейрона-Менделеева

$$PdV + VdP = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot dT$$

и подставляя dT в формулу (1.14), получим

$$\left(C_V + R\right)PdV + \mu C_V VdP = 0.$$

Учитывая соотношение между молярными теплоемкостями идеального газа при постоянном давлении и объеме, которое описывается формулой Майера (1.12), а также (1.13), получим

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0.$$

Решение написанного дифференциального уравнения имеет вид

$$PV^{\gamma} = const \qquad (1.15)$$

Уравнение (1.15) называется *уравнением адиабаты* (*уравнением Пуассона*), а введенная в (1.13) величина γ – *показателем адиабаты*.

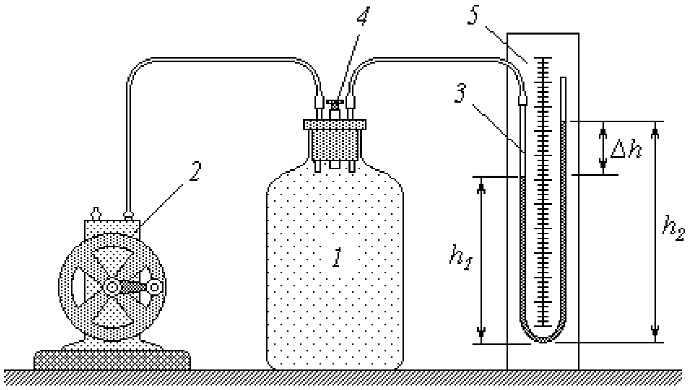
2. Цель работы. Схема экспериментальной установки

Целью работы является:

1) изучение первого начала термодинамики в различных изопроцессах;

2) экспериментальное определение показателя адиабаты для воздуха.

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:



1 – сосуд с воздухом;
2 – насос;
3 – манометр;
4 – пробка;
5 – линейка

Основной элемент установки – сосуд *1* с воздухом, соединенный гибкими шлангами с насосом *2* и манометром *3* (устройство и принцип действия манометра описаны в руководстве к работе 2.1). Сосуд закрыт пробкой *4*, вынимая которую можно обеспечить сообщение воздуха в сосуде с атмосферой. Линейка *5* служит для измерения разности уровней в коленах манометра.

3. Описание установки и методики измерений

В открытом сосуде устанавливаются температура T_1 и давление p_1 воздуха, равные соответствующим параметрам окружающей атмосферы. На рисунке ниже изображена p-V диаграмма, где это начальное состояние воздуха обозначено точкой *1*. Под величиной V здесь и в дальнейшем будем иметь в виду объем достаточно малой массы воздуха (например, 1 *г*), постоянно находящегося внутри сосуда.

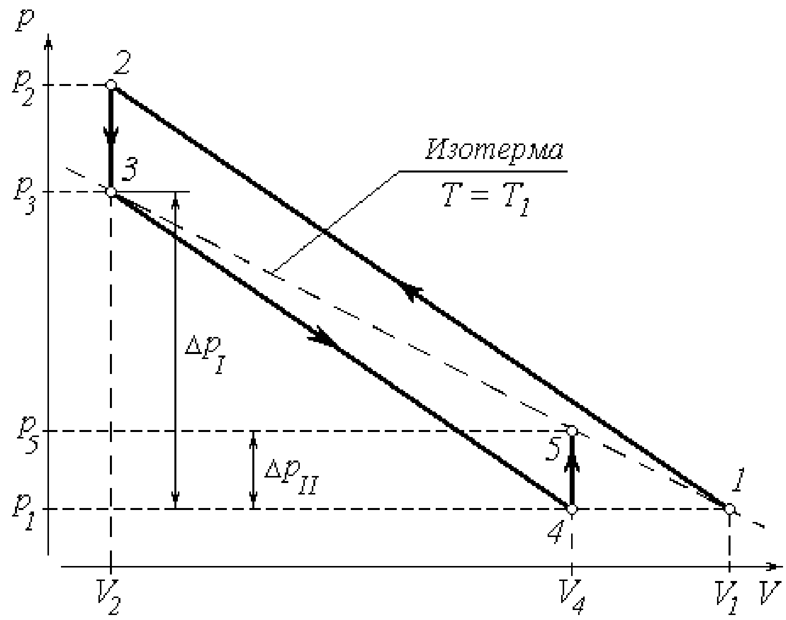


Рисунок 1.

Если сосуд закрыть пробкой и закачать в него из атмосферы некоторое дополнительное количество воздуха, то давление в нем повысится до величины p_2. При достаточно быстром осуществлении этого процесса теплообмен с окружающей средой не успевает происходить, и сжатие можно считать адиабатическим (кривая *1-2*). Совершенная внешними силами работа сжатия целиком переходит во внутреннюю энергию газа; следовательно, повышается и его температура. По окончании работы насоса объем газа остается неизменным, и начинается его изохорическое охлаждение до температуры окружающей среды T_1. На диаграмме этот процесс изображен отрезком *2-3*. Понижение температуры при постоянном объеме ведет, как известно, к уменьшению давления до значения p_3, которое все же превышает (из-за ранее накаченного воздуха) атмосферное давление p_1 на некоторую величину Δp_I.

Если теперь открыть сосуд, вынув пробку, и тут же опять закрыть, то давление воздуха в нем сравняется с атмосферным p_1 за счет того, что часть воздуха покинет сосуд. Это падение давления происходит очень быстро, и процесс расширения *3-4* также можно считать адиабатическим. Внутренняя энергия газа уменьшается на величину работы расширения, поэтому его температура падает ниже установившегося ранее значения T_1. Далее воздух в закрытом сосуде нагревается при постоянном объеме до температуры T_1 (на диаграмме – отрезок изохоры *4-5*). Установившееся в конце этого процесса давление p_5 превышает (вследствие роста температуры) начальное значение p_1 на величину Δp_{II}.

Рассмотрим подробнее два заключительных процесса: адиабатическое расширение *3-4* и изохорическое нагревание *4-5*. Для первого из них запишем уравнение адиабаты

$$p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma}, \qquad (3.1)$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ – показатель адиабаты, представляющий собой отношение теплоемкости газа при постоянном давлении C_p к его теплоемкости при постоянном объеме C_V. Учитывая, что в состоянии *4* давление воздуха в сосуде равно атмосферному ($p_4 = p_1$), а объем имеет то же значение, что и в конечном состоянии *5* ($V_4 = V_5$), перепишем (1) в виде

$$\frac{p_3}{p_1} = \left(\frac{V_5}{V_3}\right)^{\gamma}. \tag{3.2}$$

Температура воздуха в состояниях *3* и *5* одинакова и равна температуре окружающей атмосферы T_1. Воспользовавшись уравнением изотермы

$$p_3V_3 = p_5V_5,$$

находим

$$\frac{V_5}{V_3} = \frac{p_3}{p_5},$$

и уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{p_3}{p_1} = \left(\frac{p_3}{p_5}\right)^{\gamma},$$

откуда показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{\ln\dfrac{p_3}{p_1}}{\ln\dfrac{p_3}{p_5}}. \tag{3.3}$$

Преобразуем знаменатель дроби в правой части выражения (3.3)

$$\ln\frac{p_3}{p_5} = \ln\left(\frac{p_3}{p_1}\cdot\frac{p_1}{p_5}\right) = \ln\frac{p_3}{p_1} - \ln\frac{p_5}{p_1}, \tag{3.4}$$

а также величины давлений p_3 и p_5 (см. рис. 1):

$$p_3 = p_1 + \Delta p_I, \quad p_5 = p_1 + \Delta p_{II};$$

тогда

$$\ln\frac{p_3}{p_1} = \ln\left(1 + \frac{\Delta p_I}{p_1}\right), \quad \ln\frac{p_5}{p_1} = \ln\left(1 + \frac{\Delta p_{II}}{p_1}\right). \tag{3.5}$$

Как известно, атмосферное давление эквивалентно давлению столба воды высотой около 10 *м*. Перепады давлений, измеряемые в данной работе манометром, составляют величины порядка нескольких сантиметров водного столба. Таким образом, величины Δp_I и Δp_{II} несоизмеримо малы по сравнению с p_1, и отношения

$$\frac{\Delta p_I}{p_1} << 1; \quad \frac{\Delta p_{II}}{p_1} << 1.$$

Используем известное в математике соотношение, имеющее место при малых x ($x << 1$):

$$\ln(1 + x) \approx x.$$

Тогда выражения (3.5) и (3.4) преобразуются к виду

$$\ln\frac{p_3}{p_1} = \frac{\Delta p_I}{p_1}, \quad \ln\frac{p_5}{p_1} = \frac{\Delta p_{II}}{p_1};$$

$$\ln\frac{p_3}{p_5} = \frac{\Delta p_I - \Delta p_{II}}{p_1},$$

а их подстановка в (3.3) дает

$$\gamma = \frac{\Delta p_I}{\Delta p_I - \Delta p_{II}}. \qquad (3.6)$$

Как известно, перепад давлений Δp прямо пропорционален разности $\Delta h = h_1 - h_2$ уровней воды в коленах манометра:

$$\Delta p = \rho_в\, g\,(h_1 - h_2),$$

где $\rho_в$ и g есть соответственно плотность воды и ускорение свободного падения. С учетом этого выражение (3.6) примет вид

$$\gamma = \frac{\Delta h_I}{\Delta h_I - \Delta h_{II}}, \qquad (3.7)$$

где

$$\Delta h_I = h_2^I - h_1^I; \qquad (3.8)$$

$$\Delta h_{II} = h_2^{II} - h_1^{II}; \qquad (3.9)$$

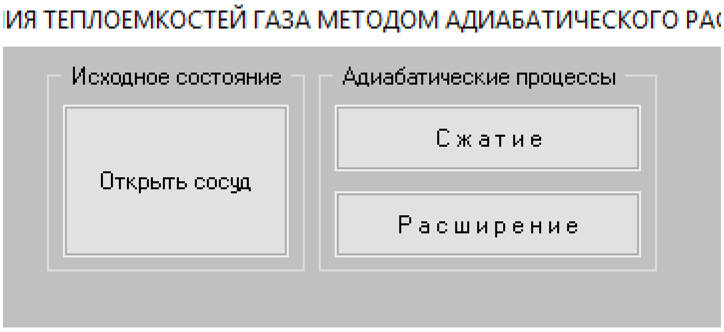
h_1^I и h_2^I – высота уровня воды в закрытом (на схеме – левом) и открытом (правом) коленах манометра после изохорического охлаждения, т.е. в состоянии *3*; h_1^{II} и h_2^{II} – то же, после изохорического нагревания (состояние *5*).

4. Порядок измерений и обработки результатов

1. По таблице 2 в соответствие с Вашим вариантом определите номер Вашей лабораторной установки и число опытов n, которые Вы должны сделать.

2. Откройте сосуд *1* с воздухом, вынув пробку *4*. Дождавшись установления постоянных одинаковых уровней воды в манометре *3*, закройте сосуд.

Для того, чтобы измерить вынуть пробку в сосуде в виртуальном варианте лабораторной работы, необходимо нажать мышью на кнопку с надписью «Открыть сосуд». После этого надпись на кнопке изменится на надпись «Закрыть сосуд». Нажав на эту кнопку еще раз вы закроете сосуд.



3. Вращая рукоятку насоса *2*, следите за манометром. По достижении разности уровней около 15-20 *см* прекратите накачивать воздух (*в противном случае может произойти выброс воды из открытого колена манометра!*).

Для того, чтобы накачать воздух в виртуальном варианте лабораторной работы, необходимо нажать на кнопку «Сжатие». Одно нажатие произведет накачку определенной порции воздуха, о чем будет свидетельствовать вращение рукоятки насоса и увеличение перепада уровней в манометре. Нажатие кнопки «Сжатие» необходимо произвести несколько раз до достижения нужной разности уровней.

4. Наблюдайте показания манометра в течение двух-трех минут (разность уровней должна уменьшаться). После установления неизменной разности уровней измерьте и занесите в таблицу значения h_1^I и h_2^I. Рассчитайте по формуле (8) и запишите в таблицу 1 перепад Δh_I.

Таблица 1

Номер опыта	h_1^I, *мм*	h_2^I, *мм*	Δh_I, *мм*	h_1^{II}, *мм*	h_2^{II}, *мм*	Δh_{II}, *мм*	γ_i	$\Delta\gamma_i = \gamma_i - \bar{\gamma}$	$(\Delta\gamma_i)^2$
1									
2									
3									
4									
5									
6									
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n									
							$\bar{\gamma} = \ldots$		$\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - \bar{\gamma})^2 = \ldots$

5. Вынув пробку, откройте и быстро закройте сосуд. Следите за показаниями манометра (разность уровней должна увеличиваться). Выждав две-три минуты до установки постоянного перепада давлений, измерьте и занесите в таблицу значения h_1^{II} и h_2^{II}; по формуле (3.9) рассчитайте и запишите установившуюся разность уровней Δh_{II}.

Для того, чтобы обеспечить быстрое открытие и последующее закрытие сосуда в виртуальном варианте лабораторной работы, необходимо нажать на кнопку «Расширение». При этом пробка сосуда откроется и сразу же закроется. После этого уровни выровняются, но после этого левый уровень начнет медленно опускаться, а правый – подниматься. Необходимо подождать 2-3 минуты до того как движение уровней остановится.

6. Повторите измерения, описанные в пп. 1-4, еще $n-1$ раз (число опытов n определяется вариантом Вашей работы в таблице 2).

7. Для каждого из n проведенных опытов вычислите по формуле (3.7) и занесите в таблицу значения показателя адиабаты γ.

8. Найдите среднее значение показателя адиабаты $\bar{\gamma}$ и занесите его в таблицу 1.

9. Найдите отклонения $\Delta\gamma_i = \gamma_i - \bar{\gamma}$ и их квадраты $(\Delta\gamma_i)^2$ и занесите их значения в последние два столбца таблицы 1.

10. Рассчитайте сумму квадратов отклонений показателя адиабаты и запишите ее в соответствующую ячейку таблицы.

11. Вычислите среднеквадратичную ошибку σ_γ по формуле

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta\gamma_i)^2}{n\cdot(n-1)}}$$

12. Выберите из таблицы приложения значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ для n опытов и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$. Рассчитайте по формуле

$$\Delta_s\gamma = t_{N,\alpha}\cdot\sigma_\gamma$$

и запишите в тетрадь случайную погрешность измерения $\Delta_s\gamma$.

13. Определите абсолютную приборную ошибку прямых измерений показаний манометра δl и абсолютную приборную ошибку прямого измерения высоты уровней воды в манометре δh:

$$\delta l = \delta h = 0{,}5\,\text{мм} = 0{,}0005\,\text{м}$$

а также относительные ошибки по формулам

$$E_1 = \frac{2\delta h}{\min(\Delta h_I)} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{4\delta h}{\min(\Delta h_I - \Delta h_{II})}.$$

14. Найдите абсолютную приборную погрешность косвенного измерения показателя адиабаты $\delta\gamma$ по формуле

$$\delta\gamma = \bar{\gamma}\sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2}}\,.$$

15. Вычислите полную погрешность

$$\Delta\gamma = \sqrt{\delta\gamma^2 + \Delta_s\gamma^2}\,.$$

16. Запишите ответ в виде

$$\gamma = \bar{\gamma} \pm \Delta\gamma\,.$$

5. Контрольные вопросы

1. Внутренняя энергия произвольной термодинамической системы.
2. Что понимается под внутренней энергией газа?
3. Работа идеального газа.
4. Изотермический, изобарический и изохорический процессы.
3. Работа идеального газа в изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах.
6.Определение теплоемкости.
7.Удельная и молярная теплоемкости.
8. Первое начало термодинамики.
9. Внутренняя энергия идеального газа.
10. Число степеней свободы молекулы газа.

11. Формулы для молярной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

12. Связь между молярными теплоемкостями идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

13. Адиабатический процесс.

14. Уравнение адиабатического процесса и его графическое изображение в координатах p-V, p-T, V-T.

15. Связь показателя адиабаты с теплоемкостями идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

15. Простые задачи на изопроцессы.

6. Варианты лабораторной работы

Таблица 3

Номер варианта (порядковый номер в журнале)	Номер установки	Число опытов n
1	1	6
2	2	7
3	3	8
4	4	9
5	5	10
6	6	6
7	1	7
8	2	8
9	3	9
10	4	10
11	5	6
12	6	7
13	1	8
14	2	9
15	3	10
16	4	6
17	5	7
18	6	8
19	1	9
20	2	10
21	3	6
22	4	7
23	5	8
24	6	9
25	1	10

26	2	6
27	3	7
28	4	8
29	5	9
30	6	10