Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

Кафедра физики

ФИЗИКА

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Индивидуальные домашние задания
для обучающихся всех специальностей
дневной и заочной форм обучения

Составитель: А.П.Зубарев

Самара
2022

УДК 537

Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: индивидуальные домашние задания для обучающихся по специальностям[Текст] / Составитель: Зубарев А.П., - Самара: Самарский университет, 2022. – 70 с.

Издание содержит индивидуальные домашние задания с примерами решения и оформления типовых задач.

Утвержден на заседании кафедры 2 сентября 2022 г., протокол № 1.
Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты:

Подписано в печать . Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ …

© Самарский университет, 2022

Правила выполнения индивидуальных домашних заданий

В качестве индивидуальных домашних заданий к практическим занятиям преподаватель представляет каждому обучающемуся определенное количество задач, которые ему необходимо решить и оформить в форме отчета.

Список задач определяется вариантом обучающегося. Обычно вариант совпадает с порядковым номером обучающегося в журнале. При этом список задач, которые должен решить и оформить обучающийся определяется по последней цифре порядкового номера обучающегося с помощью таблицы перед списком задач в данной методичке.

Отчет по решенным задачам оформляется в отдельной тетраде, либо в форме набора скрепленных между тетрадных двойных листов, либо в форме скрепленных между собой листов в формате А4. Первый лист является титульным. На нем располагается следующая информация:

ФГБОУ ВО
«Самарский университет»

Кафедра «Физики»

Отчет №1

по решению практических задач
по теме «Кинематика»

Вариант (порядковый номер) 23

Задачи № 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3

Выполнил: обучающийся Иванов Игорь Николаевич, группа 1146

Проверил: доцент Петров Иван Игоревич

Со второй страницы отчета оформляется решение задач. Решения оформляется в по следующим правилам:

1. Каждая задача переписывается.
2. Оформляются исходные данные в форме «Дано» «Найти».
3. Делается рисунок, если он необходим для решения задачи. На рисунке обязательно изображается система координат и наносятся величины, которые необходимы для понимания и решения задачи.
4. Каждая величина, не указанная в условии задачи, но необходимая для ее решения поясняется. В этом пояснении должно быть указано – что обозначает эта величина.
5. Каждая формула обосновывается. Т.е. указывается физический закон, на основании которого написана эта формула, либо другая формула, из которой первая формула выведена.
6. Решение задачи должно быть подробным. Недопустима запись ответа без его вывода.

7. Ответ должен быть представлен в общем виде, т.е. в виде формулы, в которую входят величины, представленные в условии задачи. Недопустима подстановка численных значений величин до того как получен ответ в виде окончательной формулы.

Сформированный отчет по решению задач в рамках практических занятий в обучения сканируется или фотографируется, переводится в файл формата doc, docx, rtf или pdf и загружается на страницу курса в системе ЭИОС в соответствующую папку. Один отчет должен содержаться только в одном файле. Размер файла не должен превышать 5 мегабайт. Название файла должно содержать фамилию, группу и номер задания, например:

Иванов__1123_практика_задание_1.pdf

или

Иванов_1123_практика_задание_1.docx

Работы, загруженные с нарушение требований, указанных выше не рассматриваются.

После получения отчета преподаватель производит его проверку и выставляет оценку по 5-бальной системе и выставляет ее в электронный журнал. При правильном решении задачи, но при наличие нарушений, указанных в пунктах 1. – 7. оценка может быть снижена на количество баллов от 1 до 3 в зависимости от вида и числа нарушений.

Отметим, что объяснение к задаче – неотъемлемое требование по ее оформлению. Обучающийся должен написать - какое физическое явление происходит в данной задаче, что означает каждая новая буква в формулах, на основании чего он записал данную формулу (физический закон), пояснить - что изображено на рисунке, привести подробные выкладки при получении ответа в общем виде. Объяснения по задаче свидетельствуют о том, как обучающийся освоил решение той или иной задачу. При правильных формулах, но при наличии задач без объяснений преподаватель при оценке решения задачи может снять от 1 до 2 баллов.

При решении не всех задач баллы снимаются пропорционально нерешенным задачам.

Задачи домашнего задания 1.
Кинематика

Задачи домашнего задания 1

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача					
	1	2	3	4	5	6
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1

Задача 1

1.1 Материальная точка движется в плоскости Oxy, и ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x(t)=\dfrac{at^3}{3}$, $y(t)=\dfrac{bt^2}{2}+ct$, где a, b и c – заданные константы. Найти: 1) модули векторов скорости и ускорения в произвольный момент времени t; 2) тангенциальное и нормальное ускорение точки в произвольный момент времени t; 3) радиус кривизны траектории в произвольный момент времени t.

1.2 Материальная точка движется в плоскости Oxy, и ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x(t)=\dfrac{at^2}{2}$, $y(t)=\dfrac{bt^3}{3}+ct$, где a, b и c – заданные константы. Найти: 1) модули векторов скорости и ускорения в произвольный момент времени t; 2) тангенциальное и нормальное ускорение точки в произвольный момент времени t; 3) радиус кривизны траектории в произвольный момент времени t.

1.3 Материальная точка движется в плоскости Oxy, и ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x(t)=at$, $y(t)=b\sin(\omega t)$, где a, b и ω – заданные константы. Найти: 1) модули векторов скорости и ускорения в произвольный момент времени t; 2) тангенциальное и нормальное ускорение точки в произвольный момент времени t; 3) радиус кривизны траектории в произвольный момент времени t.

1.4 Материальная точка движется в плоскости Oxy, и ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x(t)=a\cos(\omega t)$, $y(t)=bt$, где a, b и ω – заданные константы. Найти: 1) модули векторов скорости и ускорения в произвольный момент времени t; 2) тангенциальное и нормальное ускорение точки в произвольный момент времени t; 3) радиус кривизны траектории в произвольный момент времени t.

1.5 Материальная точка движется в плоскости Oxy, и ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x(t)=b+ct$, $y(t)=\dfrac{at^4}{4}$, где a, b и c – заданные константы. Найти: 1) модули векторов скорости и ускорения в произвольный момент времени t; 2) тангенциальное и нормальное ускорение точки в произвольный момент времени t; 3) радиус кривизны траектории в произвольный момент времени t.

Задача 2

2.1 Небольшое тело бросили с высоты h над поверхностью Земли под углом α ($0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$) к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти: 1) через какое время после броска тело упадет на Землю; 2) нормальное ускорение тела в момент броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2 Небольшое тело бросили с высоты h над поверхностью Земли под углом α ($0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$) к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти: 1) расстояние между точкой броска и точкой падения тела на Землю; 2) модуль скорости тела в момент его падения на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.3 Небольшое тело бросили с высоты h над поверхностью Земли под углом α ($0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$) к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти: 1) максимальную высоту подъема тела; 2) координаты положения тела, когда оно оказалось на максимальной высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.4 Небольшое тело бросили с высоты h горизонтально с начальной скоростью v_0. Найти: 1) модуль вектора скорости тела в момент падения; 2) нормальное ускорение тела в момент падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.5 Небольшое тело бросили с высоты h горизонтально с начальной скоростью v_0. Найти: 1) время полета тела; 2) тангенциальное ускорение тела в момент падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 3

3.1 Небольшое тело брошено под углом α. Чему равен этот угол, если горизонтальная дальность полета тела в $n = 2$ раза больше максимальной высоты траектории.

3.2 Артиллерийское орудие установлено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту на крыше здания, высота которого $H = 30$ м. Начальная скорость снаряда мины равна $v_0 = 60\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти время полета снаряда, максимальную высоту его подъема, горизонтальную дальность полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.3 Самолет, летевший на высоте $h = 3000\,\text{м}$ со скоростью $V = 500\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, сбросил бомбу. За какое время до прохождения над целью и на каком расстоянии от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы точно попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.4 Пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние между которыми равно $l = 1\,\text{м}$. Пробоина во втором листе оказалась на $h = 5\,\text{см}$ ниже, чем в первом. Определить скорость пули в момент ее подлета к первому листу, если известно, что в этот момент пуля двигалась горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.5 Небольшое тело, брошенное под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, дважды было на одной и той же высоте спустя время $t_1 = 3\,\text{с}$ и $t_1 = 4\,\text{с}$ после броска. Определить начальную скорость тела.

Задача 4

4.1 Точка движется по некоторой кривой. Тангенциальное ускорение точки постоянно и равно a_τ. Определить полное ускорение a точки на участке кривой с радиусом кривизны R, если точка движется на этом участке со скоростью v.

4.2 Точка начала двигаться по окружности радиусом R. При этом в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость точки была равна v_0. Известно, что тангенциальное ускорение точки постоянно и равно a_τ. Для момента времени $t = t_1$ определить длину пути, пройденного точкой.

4.3 Точка начала двигаться по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением. При этом в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость точки была равна v_0. Известно также, что в момент времени $t = t_1$ точка прошла путь длиной s. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки.

4.4. Точка начала двигаться по окружности радиусом R. При этом в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость точки была равна v_0. Известно, что тангенциальное ускорение точки постоянно и равно a_τ. Найти среднюю путевую скорость за промежуток времени от $t=0$ до $t=t_1$.

4.5. Материальная точка движется по дуге окружности радиусом R. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки a_n. В этот же момент времени векторы полного и нормального ускорений образуют угол φ. Найти скорость v точки в данный момент времени.

Задача 5

5.1 Во время подъема вертолета его винт вращается с частотой n. Скорость поступательного движения вертолета вверх относительно Земли равна v. С какой скоростью V движется один из концов винта относительно Земли, если радиус винта равен R?

5.2 Винт аэросаней вращается с частотой n. Радиус винта равен R, а скорость одного из концов винта относительно Земли равна v. С какой скоростью движутся аэросани относительно Земли?

5.3 На токарном станке протачивается вал диаметром d. За один оборот резец перемещается на расстояние Δx. Какова скорость v резания (скорость резца относительно поверхности вала), если за интервал времени Δt протачивается участок вала длиной Δl?

5.4 На токарном станке протачивается вал диаметром D. Частота вращения вала равна n. Какова скорость резца относительно поверхности вала, если скорость перемещения резца относительно оси вала равна V?

5.5 Скорость поступательного движения аэросаней относительно Земли равна v. Винт аэросаней вращается с частотой n. С какой скоростью u движется один из концов винта относительно Земли, если радиус винта равен R?

Задача 6

6.1 Диск радиусом R, находившийся в состоянии покоя, начал ускоренно вращаться с постоянным угловым ускорением ε относительно своей оси. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки, лежащей на окружности диска через время Δt после начала вращения.

6.2 Диск радиусом R, находившийся в состоянии покоя, начал ускоренно вращаться с постоянным угловым ускорением относительно своей оси. При этом через время Δt точка, лежащая на окружности диска, приобрела нормальное ускорение, равное a_n. Найти тангенциальное и полное ускорения точки и угловое ускорение диска через время Δt после начала вращения.

.

6.3 Диск радиусом R вращается равноускоренно относительно своей оси. Сделав полных N оборотов, он изменил частоту вращения от n_1 до n_2 $(n_2 > n_1)$. Определить угловое ускорение ε диска, а также тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки, лежащей на окружности диска, в момент времени, когда его частота стала равна n_2.

6.4 Диск радиусом R вращается равноускоренно относительно своей оси. Сделав полных N оборотов, он изменил частоту вращения от n_1 до n_2 $(n_2 > n_1)$. Определить угловое ускорение ε диска и величину промежутка времени, за который его частота изменилась от n_1 до n_2.

6.5 Диск, находившийся в состоянии покоя, начал ускоренно вращаться с постоянным угловым ускорением ε относительно своей оси. При этом через время Δt точка, лежащая на окружности диска, приобрела тангенциальное ускорение, равное a_τ. Найти радиус диска, а также нормальное и полное ускорения точки, лежащей на окружности диска через время Δt после начала вращения.

Домашнее задание 2.
Динамика. Законы сохранения энергии и импульса

Задачи домашнего задания 2

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1	10.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2	10.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3	10.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4	10.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2	10.1
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1	10.5
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5	10.4
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4	10.3
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3	10.2

Задача 1

1.1 К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 и m_2. Масса m_1 известна, масса m_2 неизвестна, но известно что $m_1 > m_2$. Найти массу m_2, если известно, что во время движения груза показания весов равно M. Массой блока и шнура пренебречь.

1.2 К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. Каково будет показание M весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

1.3 Два бруска массами m_1 и m_2, соединенные шнуром, лежат на столе. Найти силу натяжения шнура, если к первому бруску приложить силу, равную F, направленную горизонтально? Трением пренебречь.

1.4 На столе стоит тележка массой m. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок, закрепленный на краю стола, так чтодругой конец шнура висит между столом и полом. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой M? Трением пренебречь.

1.5 Два бруска массами m_1 и m_2, соединенные шнуром, лежат на столе. Масса m_1 известна, а масса m_2 неизвестна. Ко второму бруску приложили силу, равную F, направленную горизонтально, в результате чего бруски пришли в движение и сила натяжения шнура стала равной T? Найти массу m_2. Трением пренебречь.

Задача 2

2.1 Гибкий трос длиной L и массой m поднимают вверх за его верхний конец с ускорением a. Найти силу натяжения троса в точке, находящейся на расстоянии l от его нижнего конца.

2.2 Ракета, масса которой m, поднимается вертикально вверх. Двигатель ракеты развивает силу тяги F. Определить силу натяжения T троса, свободно свисающего с ракеты, на расстоянии, равном половине его длины от точки прикрепления троса. Масса троса известна и равна M. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

2.3 Ракета, масса которой m, поднимается вертикально вверх. Двигатель ракеты развивает силу тяги F. С ракеты свободно свисает трос. Определить массу троса, если известно, что сила натяжения троса на расстоянии, равном половине его длины от точки прикрепления троса, равно T. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

2.4 Гибкий трос длиной L и массой m поднимают вверх за его верхний конец. Найти ускорение, с которым поднимают трос, если известно, что сила натяжения троса в точке, находящейся на расстоянии l от его нижнего конца, равна T.

2.5 Гибкий трос массой m поднимают вверх за его верхний конец с ускорением a. Найти длину троса, если известно, что сила натяжения троса в точке, находящейся на расстоянии l от его нижнего конца, равна T.

Задача 3

3.1 Имеется наклонная плоскость с углом наклона α. Вверх по этой наклонной плоскости толкнули тело со скоростью v_0. На какую высоту поднимется тело, если коэффициент трения тела о плоскость равен k.

3.2 Имеется наклонная плоскость с углом наклона α. Вверх по этой наклонной плоскости толкнули тело со скоростью v_0. За какое время тело достигнет максимальной высоты, если коэффициент трения тела о плоскость равен k.

3.3 Имеется наклонная плоскость с углом наклона α. Вверх по этой наклонной плоскости толкнули тело. Найти скорость, с которой толкнули тело, если оно достигло максимальной высоты за время t_1. Коэффициент трения тела о плоскость равен k.

3.4 Имеется наклонная плоскость с углом наклона α. Вверх по этой наклонной плоскости толкнули тело. Найти скорость, с которой толкнули тело, если максимальная высота, на которую поднялось тело, равна h. Коэффициент трения тела о плоскость равен k.

3.5 Имеется наклонная плоскость с углом наклона α. Вверх по этой наклонной плоскости толкнули тело со скоростью v_0. Поднявшись по плоскости на максимальную высоту, тело вернулось к первоначальному положению. Найти время, через которое тело вернулось в исходную точку. Коэффициент трения тела о плоскость равен k.

Задача 4

4.1 Брусок массой m лежит на бруске массой M, который может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков равен k. Определить максимальное значение силы, приложенной к нижнему бруску, при которой начнется соскальзывание верхнего бруска.

4.2 На плоской поверхности лежит клин, массой M и углом α при основании. По клину скользит кубик массой m. Найти ускорение клина, если трение отсутствует.

4.3 На плоской поверхности лежит клин, массой M и углом α при основании. По клину скользит кубик неизвестной массы. Найти массу кубика, если ускорение клина равно a. Трение отсутствует.

4.4 На плоской поверхности лежит клин, массой M и углом α при основании. По клину без трения скользит кубик, массой m. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между клином и поверхностью, чтобы клин покоился.

4.5 На горизонтальной поверхности находится бросок массой m_1. Коэффициент трения бруска о поверхность равен k_1. На бруске находится другой брусок массой m_2. Коэффициент трения верхнего бруска о нижний равен k_2, причем $k_2 > k_1$. К верхнему бруску приложена сила F. Определить значение этой силы, при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.

Задача 5

5.1 Камень массы m бросили вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Считая, что на камень действует сила сопротивления со стороны воздуха, которая пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности k, найти время, за которое камень достигнет своей максимальной высоты.

5.2 Катер, имеющий массу m, движется по озеру с выключенным двигателем. В некоторый момент времени, когда скорость катера уменьшилась до v_0, катер включил двигатель. Найти, через какое время t после включения двигателя скорость катера станет равной v ($v > v_0$), если сила тяги катера постоянна и равна F, и на катер действует сила сопротивления воды, пропорциональная скорости с коэффициентом сопротивления k.

5.3 Стоящий на озере катер массой m включает двигатели и начинает движение по озеру. Найти, через какое время t скорость катера станет равной v, если сила тяги катера постоянна и равна F, и на катер действует сила сопротивления воды, направленная против движения катера, модуль которой определяется формулой $F_c = rv$, где r - известная постоянная.

5.4 С аэростата, неподвижно висящего на некоторой высоте над поверхностью Земли, сброшен груз массой m. Считая, что сила сопротивления воздуха изменяется пропорционально скорости с коэффициентом пропорциональности k, определить, через какой промежуток времени ускорение груза будет равно половине ускорения свободного падения.

5.5 С вертолета сбросили груз, масса которого m. Модуль силы сопротивления воздуха определяется формулой $F_c = rv$, где r - известная постоянная. Найти через какой промежуток времени Δt с момента бросания груза его скорость будет равна половине скорости установившегося движения. Начальная скорость груза равна нулю.

Задача 6

6.1 На рельсах стоит платформа, на которой закреплено орудие без противооткатного устройства так, что ствол его расположен в горизонтальном положении. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда равна $m_1 = 5$ кг, и его скорость $u_1 = 1$ км/с. После выстрела платформа начала откатываться назад. Через какое время после выстрела платформа остановится, если ее масса равна $M = 20$ т, а если коэффициент трения между платформой и рельсами равен k=0,002?

6.2 На рельсах стоит платформа, на которой закреплено орудие без противооткатного устройства так, что ствол его расположен в горизонтальном положении. Из орудия производят выстрел под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Масса снаряда равна $m_1 = 10$ кг, и его скорость $u_1 = 1$ км/с. После выстрела платформа начала откатываться назад. На какое расстояние l после выстрела платформа откатится, если ее масса равна $M = 20$ т, а если коэффициент трения между платформой и рельсами равен k=0,002?

6.3 На тележке стоит человек и держит в руках гирю. Масса гири $m_1 = 10$ кг, масса $m_2 = 60$ кг, масса тележки $m_3 = 30$ кг. Человек бросает гирю горизонтально со скоростью $u_1 = 1$ м/с. На какое расстояние l после броска тележка откатится, если коэффициент трения качения между ней и землей равен k=0,01?

6.4 На тележке стоит человек и держит в руках гирю. Масса гири $m_1 = 10$ кг, масса $m_2 = 60$ кг, масса тележки $m_3 = 30$ кг. Человек бросает гирю горизонтально со скоростью $u_1 = 5$ м/с. Через какое время после броска тележка остановится, если коэффициент трения качения между ней и землей равен k=0,05?

6.5 Человек массой $m_1 = 60$ кг стоит на коньках на льду и в руках держит гирю массой $m_2 = 1$ кг. Человек бросает гирю под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v =$ 2 м/с. На какое расстояние l после броска откатится человек, если коэффициент трения между льдом и коньками равен k=0,01?

Задача 7

7.1 Ракета в момент запуска имела массу вместе с горючим M. После запуска она движется в отсутствие внешних сил, испуская непрерывную струю газа со скоростью v, постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты в V момент, когда ее масса стала равна $M_1 = \frac{1}{4}M$.

7.2 Тележка с песком движется под действием постоянной силы F. В начальный момент времени ее масса вместе с песком равна M, а ее скорость равна нулю. В днище тележки вагонетки имеется отверстие, через которое песок высыпается, причем за единицу времени (в 1 секунду) высыпается масса песка, равная μ. Найти скорость тележки в момент времени t.

7.3 Ракета, масса которой в начальный момент времени M, запущена вертикально вверх. Скорость выхода продуктов сгорания относительно ракеты u. Через время t после начала движения ракеты ее ускорение стало равно a. Найти расход топлива (изменение массы топлива в единицу времени). Поле силы тяжести считать однородным.

7.4 Тележка с песком движется под действием постоянной силы F. В начальный момент времени ее масса вместе с песком равна M, а ее скорость равна нулю. В днище тележки вагонетки имеется отверстие, через которое песок высыпается, причем за единицу времени (в 1 секунду) высыпается масса песка, равная μ. Найти ускорение тележки в момент времени t.

7.5 Ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна v. Масса ракеты в начальный момент равна M_0. Найти закон изменения массы ракеты со временем $M(t)$. Найти также через какое время масса ракеты уменьшится в 2 раза по сравнению с начальной массой.

Задача 8

8.1 Двигатель тормозной системы некоторого тела развивает силу тяги, которая зависит от времени по закону времени: $F = at^2$, где $a = const$. В момент включения двигателя скорость тела составляла v_0. Считать, что масса тела равна m и масса двигателя много меньше массы тела. Пренебрегая трением, найти через какое время τ от момента включения тормозного двигателя тело остановится.

8.2 Автомобиль имеет массу m. Его двигатель развивает силу тяги, которая зависит от времени по закону времени: $F = at$, где $a = const$. В момент включения двигателя скорость тела составляла v_0. Пренебрегая трением, найти через какое время τ от момента включения двигателя скорость автомобиля возрастет в 3 раза.

8.3 Автомобиль имеет массу m. Его двигатель развивает силу тяги, которая зависит от времени по закону времени: $F = at$, где $a = const$. В момент включения двигателя автомобиль покоился. Пренебрегая трением, найти работу двигателя автомобиля в момент времени t после начала движения.

8.4 Автомобиль массы m двигается со скоростью V. В некоторый момент времени двигатель автомобиля отключили и включили тормозную систему. Сила торможения автомобиля зависит от времени по закону времени: $F = at$, где $a = const$. Пренебрегая трением, найти работу тормозной системы автомобиля с момента выключения двигателя и до полной остановки автомобиля.

8.5 Автомобиль имеет массу m. Его двигатель развивает силу тяги, которая зависит от времени по закону времени: $F = at^2$, где $a = const$. В момент включения двигателя автомобиль покоился. Пренебрегая трением, найти работу двигателя автомобиля в момент времени t после начала движения.

Задача 9

9.1 Молот массой M ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса наковальни равна m. Массой куска железа пренебречь. Определить КПД удара молота при данных условиях. Удар считать абсолютно неупругим.

9.2 Молот, масса которого M, падает с некоторой высоты на сваю массой m. Найти КПД удара молота, считая удар абсолютно неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

9.3 Молотком, масса которого M, забивают в стену гвоздь массой m. Найти КПД удара молотка. Удар считать абсолютно неупругим.

9.4 Молотком, масса которого M, забивают в стену гвоздь. КПД удара молотка равен η. Найти массу гвоздя. Удар считать абсолютно неупругим. Изменением потенциальной энергии гвоздя при его углублении пренебречь.

9.5 Молот массой M ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. КПД удара молота при данных условиях равен η. Найти массу наковальни. Массой куска железа пренебречь Удар считать абсолютно неупругим.

Задача 10

10.1 Движущийся шар 1 сталкивается с покоящимся шаром 2, причем масса второго шара больше массы первого шара. В результате удара меньший шар потерял $\frac{3}{4}$ своей кинетической энергии. Определить отношение масс шаров. Удар прямой и абсолютно упругий.

10.2 Движущийся шар 1 сталкивается с покоящимся шаром 2. Известно, что масса первого шара больше массы второго шара. Какую максимальную часть кинетической энергии может передать первый шар второму? Удар прямой и абсолютно упругий.

10.3 Движущийся шар 1 сталкивается с покоящимся шаром 2, причем масса второго шара больше массы первого шара. В результате удара меньший шар потерял половину своей кинетической энергии. Определить отношение масс шаров. Удар прямой и абсолютно упругий.

10.4 Движущийся шар массой m_1 ударяет неподвижный шар массой m_2, причем $m_2 > m_1$. Скорости шаров после удара стали равны v_1' и v_2'. Удар прямой, абсолютно упругий. Найти скорость v_1 первого шара до удара.

10.5 Происходит абсолютно упругий центральный удар двух шаров, массы которых m_1 и m_2. После удара скорости шаров стали равны v_1' и v_2'. Найти скорости шаров до удара. Удар прямой и абсолютно упругий.

Домашнее задание 3.
Динамика твердого тела. Колебания

Задачи домашнего задания 3

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3

Задача 1

1.1 Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через точку, удаленную от одного из его концов на расстояние $a = \frac{l}{3}$, если угол между осью вращения и стержнем составляет $\alpha = 30^\circ$.

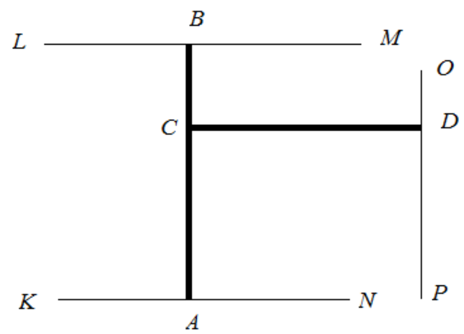
1.2 Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через точку, удаленную от одного из его концов на расстояние $a = \frac{l}{4}$, если угол между осью вращения и стержнем составляет $\alpha = 45^\circ$.

1.3 Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через точку, удаленную от одного из его концов на расстояние $a = \frac{l}{5}$, если угол между осью вращения и стержнем составляет $\alpha = 60^\circ$.

1.4 Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через точку, удаленную от одного из его концов на расстояние $a = \frac{l}{5}$, если угол между осью вращения и стержнем составляет $\alpha = 30^\circ$.

1.5 Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси вращения, проходящей через точку, удаленную от одного из его концов на расстояние $a = \frac{l}{3}$, если угол между осью вращения и стержнем составляет $\alpha = 45^\circ$.

Задача 2



2.1 Два одинаковых тонких стержня AB и CD длиной l и массой m скреплены в точке C так, как показано на рисунке выше. При этом известно что, $CB = \frac{l}{3}$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси OP.

2.2 Два одинаковых тонких стержня AB и CD длиной l и массой m скреплены в точке C так, как показано на рисунке выше. При этом известно что, $CB = \frac{l}{3}$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси LM .

2.3 Два одинаковых тонких стержня AB и CD длиной l и массой m скреплены в точке C так, как показано на рисунке выше. При этом известно что, $CB = \frac{l}{3}$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси KN .

2.4 Два одинаковых тонких стержня AB и CD длиной l и массой m скреплены в точке C так, как показано на рисунке выше. При этом известно что, $CB = \frac{l}{4}$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси OP.

2.5 Два одинаковых тонких стержня AB и CD длиной l и массой m скреплены в точке C так, как показано на рисунке выше. При этом известно что, $CB = \frac{l}{4}$. Определить момент инерции J такой системы относительно оси LM .

Задача 3

3.1 Однородный тонкий стержень массой M и длиной l висит вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку A на стержне на расстоянии равном $a = \frac{l}{3}$ от оси вращения попадает маленький пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня и перпендикулярно стержню) со скоростью v и прилипает к стержню. Масса шарика равна m. Определить угол максимального отклонения стержня после попадания в него шарика.

3.2 Однородный тонкий стержень массой M и длиной l висит вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку A на стержне на расстоянии равном $a = \frac{3l}{4}$ от оси вращения попадает маленький пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня и перпендикулярно стержню) со скоростью v и прилипает к стержню. Масса шарика равна m. Определить угол максимального отклонения стержня после попадания в него шарика.

3.3 Однородный тонкий стержень массой M и длиной l висит вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку A на стержне на расстоянии равном $a = \frac{l}{4}$ от оси вращения попадает маленький пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня и перпендикулярно стержню) со скоростью v и прилипает к стержню. Масса шарика равна m. Определить угол максимального отклонения стержня после попадания в него шарика.

3.4 Однородный тонкий стержень массой M и длиной l висит вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку A на стержне на расстоянии равном $a = \frac{2l}{3}$ от оси вращения попадает маленький пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня и перпендикулярно стержню) со скоростью v и прилипает к стержню. Масса шарика равна m. Определить угол максимального отклонения стержня после попадания в него шарика.

3.5 Однородный тонкий стержень массой M и длиной l висит вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку A на стержне на расстоянии равном $a = \frac{l}{5}$ от оси вращения попадает маленький пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения стержня и перпендикулярно стержню) со скоростью v и прилипает к стержню. Масса шарика равна m. Определить угол максимального отклонения стержня после попадания в него шарика.

Задача 4.

4.1 Через блок, укреплённый на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 и m_2. При этом грузы движутся с ускорением, равным по модулю a. Найти массу блока m. Блок считать однородным диском.

4.2 Блок в форме сплошного цилиндра укреплён на конце стола. Две гири массой m_1 и $m_2 (m_1 < m_2)$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через блок, при этом одна гиря лежит на столе, а другая висит на нити. Блок отпустили, при этом гири стали двигаться с ускорением, равным по модулю a. Найти массу блока M. Трением пренебречь.

4.3 Имеется сплошной цилиндрический блок, который может без трения вращаться. На этот блок намотали нить, на который подвесили груз, массой m. После того как груз отпустили он начал под действием силы тяжести опускаться вниз с ускорением равным по модулю a. Найти массу M блока.

4.4 Насаженный на ось сплошной диск массой M и радиусом R может без трения вращаться относительно оси. Диск раскрутили так, что его угловая скорость стала равна ω. После этого к цилиндрической поверхности диска прижали тормозную колодку с силой F, под действием которой диск остановился через время t_1 после прижатия. Определить коэффициент трения k тормозной колодки о поверхность диска.

4.5 Насаженный на ось сплошной диск массой M и радиусом R может без трения вращаться относительно оси. Диск раскрутили так, что его угловая скорость стала равна ω. После этого к цилиндрической поверхности диска прижали тормозную колодку с силой F. Найти время, через которое диск остановится после прижатия, если коэффициент трения тормозной колодки о поверхность диска равен k.

Задача 5.

5.1 На неподвижной скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень, расположенный вертикально на одной линии с осью вращения скамьи. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня, при этом колесо вращается с угловой скоростью ω. Радиус колеса равен R, его масса равна m. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского, если человек повернет стержень на угол 90°? Массу колеса считать равномерно распределенной по ободу. Считать, что суммарный момент инерции человека и скамьи равен J и его изменением после поворота стержня пренебречь.

5.2 На скамье Жуковского стоит человек и ловит рукой мяч массой m, летящий в горизонтальном направлении со скоростью v. Траектория мяча проходит на расстоянии l от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен J?

5.3 На скамье Жуковского стоит человек и ловит рукой мяч массой m, летящий в горизонтальном направлении со скоростью. Траектория мяча проходит на расстоянии l от вертикальной оси вращения скамьи. Найти скорость мяча, пойманного человеком, если после того как человек поймал мяч, скамья Жуковского стала вращаться с угловой скоростью ω, а суммарный момент инерции человека и скамьи известен и равен J?

5.4 На скамье Жуковского, вращающейся с угловой скоростью ω стоит человек и держит тонкий стержень длиной L и массой m так, что стержень стоит вертикально, опираясь на скамью и находится на оси вращения скамьи. Затем человек поворачивает стержень в горизонтальное положение, так что ось вращения скамьи пересекает середину стержня. С какой угловой скоростью при этом будет вращаться скамья с человеком, если суммарный момент инерции человека и скамьи известен и равен J?

5.5 На скамье Жуковского, вращающейся с угловой скоростью ω стоит человек и держит тонкий стержень длиной L так, что стержень стоит вертикально, опираясь на скамью и находится на оси вращения скамьи. Затем человек поворачивает стержень в горизонтальное положение, так что ось вращения скамьи пересекает середину стержня. При этом угловая скорость скамьи изменилась и стала равной ω_1. Определить массу стержня, если известно, что суммарный момент инерции человека и скамьи известен и равен J?

Задача 6

6.1 На краю горизонтальной платформы массы M, имеющей форму диска радиусом R, стоит человек массой m. При этом платформа вращается относительно оси с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением при вращении платформы, найти, с какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться платформа, если человек начнет идти по краю платформе со скоростью v, в направлении, *противоположном* направлению ее вращения, сохраняя при этом неизменным расстояние между собой и центром платформы.

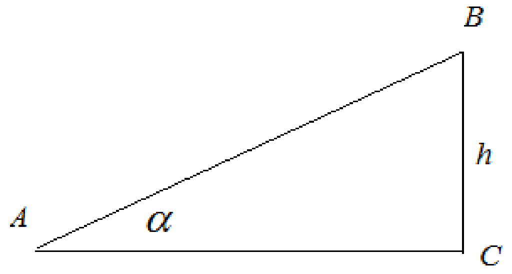
6.2 На краю горизонтальной платформы массы M, имеющей форму диска радиусом R, стоит человек массой m. При этом платформа вращается относительно оси с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением при вращении платформы, найти, с какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться платформа, если человек начнет идти по краю платформы со скоростью v, в направлении, *совпадающем* с направлением вращения платформы.

6.3 На горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R, стоит человек массой m. Расстояние между человеком и центром платформы равно $l = \frac{R}{2}$. При этом платформа вращается относительно оси с угловой скоростью ω. После того, как человек начал идти по платформе со скоростью u в направлении, *совпадающем* с направлением вращения платформы, сохраняя неизменным расстояние между собой и центром платформы, угловая скорость платформы стала равна ω_1. Найти массы платформы M. Трением при вращении платформы пренебречь.

6.4 Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой m_1 На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, достигнув *противоположной* на платформе точки, остановится. Масса платформы равна m_2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. Трением при вращении платформы пренебречь.

6.5 Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой m_1. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и и обойдя ее вернется в *исходную* точку на платформе? Масса платформы равна m_2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. Трением при вращении платформы пренебречь.

Задача 7



7.1 Имеется наклонная плоскость с ABC высотой h с углом при основании α (см. рисунок выше). Найти сколько времени из точки B в точку A будет скатываться сплошной шар?

7.2 Имеется наклонная плоскость с ABC высотой h с углом при основании α (см. рисунок выше). Найти сколько времени из точки B в точку A будет скатываться сплошной диск?

7.3 Имеется наклонная плоскость с ABC высотой h с углом при основании α (см. рисунок выше). Найти сколько времени из точки B в точку A будет скатываться обруч, масса которого распределена по ободу?

7.4 Имеется наклонная плоскость с ABC с углом при основании α (см. рисунок выше). Найти высоту наклонной плоскости h (обозначена на рисунке), если сплошной шар скатывается из точки B в точку A за время Δt.

7.5 Имеется наклонная плоскость с ABC с углом при основании α (см. рисунок выше). Найти высоту наклонной плоскости h (обозначена на рисунке), если сплошной диск скатывается из точки B в точку A за время Δt.

Задача 8

8.1 Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длины l и массой m, к нижнему концу которого прикреплен шар массой M и радиуса R. Найти период колебаний такого маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня.

8.2 Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Найти радиус обруча, если его период колебаний равен T.

8.3 Однородный диск колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Период колебаний диска равен T. Чему равен при этом радиус диска?

8.4 Однородный диск радиуса R колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину отрезка, соединяющего центр и край диска. Чему равен период колебаний диска?

8.5 Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длины l массой M на каждом из концов которого закреплены маленькие с массами m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) соответственно. Найти период колебаний такого маятника относительно горизонтальной оси, отстоящей от шарика массой m_1 на расстояние $\frac{l}{4}$. Шарики рассматривать как материальные точки.

Задача 9

9.1 Поплавок массой m в форме цилиндра радиуса R плавает в жидкости, так что ось цилиндра перпендикулярна поверхности жидкости. Период вертикальных колебаний поплавка в жидкости равен T. Определить плотность жидкости.

9.2 Ареометр, имеющий трубку диаметром d, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания с периодом T. Найти массу ареометра.

9.3 Поплавок массой m в форме цилиндра плавает в воде, так что ось цилиндра перпендикулярна поверхности воды. Период вертикальных колебаний поплавка в воде равен T. Определить диаметр поплавка.

9.4 Толстая деревянная прямоугольная доска с размерами сторон a и b плавает в воде, будучи частично погруженной в нее по толщине. Период вертикальных колебаний доски в воде равен T. Определить массу доски.

9.5 Ареометр, массой m, имеющий трубку радиусом R, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период колебаний ареометра.

Домашнее задание 4.
Молекулярная физика и термодинамика

Задачи домашнего задания 4.

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3

Задача 1

1.1 В баллоне объемом V находится азот под давлением p_1 при температуре T_1. После того как в баллон закачали азот массой m, температура в баллоне увеличилась до T_2. Определить давление p_2 азота, оставшегося в баллоне.

1.2 В сосуде вместимостью V находится гелий при температуре T. После того как часть гелия израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp при той же температуре. Определить массу m израсходованного гелия.

1.3 Воздушный шар имеет объем V. Чему равна подъемная сила F гелия, наполняющего оболочку, на высоте, где давление равно p, а температура равна T. При подъеме шара гелий может выходить через отверстие в нижней части шара.

1.4 Оболочка аэростата вместимостью V, находящегося на поверхности Земли, наполнена гелием при давлении p_1 и температуре T_1. Аэростат подняли на некоторую высоту, где давление равно p_2 ($p_2 < p_1$)и температура T_2 ($T_2 < T_1$). Определить массу Δm гелия, вышедшего из отверстие в нижней части аэростата при его подъеме.

1.5 В сосуде объемом V находится гелий при давлении p температуре T. После того как в сосуд закачали еще некоторое количество гелия, давление в баллоне увеличилось на Δp при той же температуре. Определить массу m закаченного гелия.

Задача 2

2.1 Ротор центрифуги имеет радиус R заполненный аргоном, вращается с угловой скоростью ω. Определить давление газа p_0 в центре ротора, если давление газа p на стенки ротора известно. Температуру аргона по всему объему считать одинаковой и равной T.

2.2 Ротор центрифуги имеет радиус R. Внутри ротора при температуре T находится газ с молярной массой μ. Ротор вращается с угловой скоростью ω. Определить отношение концентраций молекул у стенок ротора и в его центре.

2.3 Ротор центрифуги имеет радиус R заполненный азотом, вращается с угловой скоростью ω. Определить концентрацию газа у стенок ротора, если в его центре концентрация n известна. Температуру азота по всему объему считать одинаковой и равной T.

2.4 Ротор центрифуги радиусом R вращается с угловой скоростью ω. В центрифуге находится некоторый газ при температуре T. Определить молярную массу газа, если давление у стенки ротора в 2 раза больше давления в его центре.

2.5 В роторе центрифуги радиуса R находится гелий при температуре T. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью ω. Найти концентрацию частиц гелия на расстоянии $\frac{R}{2}$ от стенок ротора, если концентрация частиц у стенок ротора известна и равна n.

Задача 3

3.1 В сосуде содержится гелий, количество вещества которого равно 1 моль. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число ΔN молекул, скорости v которых меньше $\delta \cdot v_{кв}$, где $v_{кв}$ - средняя квадратичная вероятная скорость и $\delta = 0.01$

3.2 Чему равно относительное число молекул идеального газа, кинетические энергии которых отличаются от среднего значения кинетической энергии не более чем на 1 %?

3.3 Чему равно относительное число молекул идеального газа, кинетические энергии которых заключены в пределах от нуля до значения, равного $0{,}001 \cdot \varepsilon_{в}$, где $\varepsilon_{в}$ - наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул.

3.4 Чему равно относительное число молекул идеального газа, кинетические энергии которых заключены в пределах от нуля до значения, равного $0{,}001 \cdot \langle \varepsilon \rangle$, где $\langle \varepsilon \rangle$ - среднее значение кинетической энергии молекул.

3.5 Чему равно относительное число молекул идеального газа, кинетические энергии которых отличаются от наиболее вероятного значения энергии не более чем на 0,1 %?

Указание при решении задач 3.2 и 3.5: при вычислении интеграла вида $\int\limits_{\varepsilon_0-\Delta\varepsilon}^{\varepsilon_0+\Delta\varepsilon} f(\varepsilon)d\varepsilon$ при $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$ необходимо воспользоваться приближенной формулой $\int\limits_{\varepsilon_0-\Delta\varepsilon}^{\varepsilon_0+\Delta\varepsilon} f(\varepsilon)d\varepsilon \approx 2f(\varepsilon_0)\Delta\varepsilon$.

Задача 4

4.1 На некоторой гипотетической планете ускорение на поверхности составляет $g=20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, давление на поверхности планеты $p_0=180$ кПа, а на высоте $h=1$ км $p=100$ кПа. Какова средняя молярная масса газов, из которых состоит атмосфера планеты, если температура атмосферы не изменяется с высотой и равна $T=300$ К?

4.2 На некоторой гипотетической планете ускорение на поверхности составляет $g=10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, давление на поверхности планеты $p_0=200$ кПа, а на высоте $h=1$ км $p=100$ кПа. Каково давление на высоте $H=3$ км, если температура атмосферы не изменяется с высотой и равна $T=300$ К?

4.3 На какой высоте летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление $p_0=100$ кПа, а во время полета барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $p=90$ кПа? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

4.4 На взлетной площадке барометр показывал давление $p_0=90$ кПа, а во время полета барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $p=100$ кПа. Вертолет летит на высоте $h=1$ км. Определить температуру воздуха, считая ее не изменяющейся с высотой.

4.5 Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление p=80 кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с t_1=2°С до t_2=7°С. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Задача 5

5.1 Вычислить удельные теплоемкости гелия и неона при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v

и c_p смеси гелия и неона, если массовые доли этих газов соответственно равны ω_1=0.9 и ω_2=0.1.

5.2 Вычислить удельные теплоемкости гелия и углекислого газа при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси гелия и углекислого газа, если массовые доли этих газов соответственно равны ω_1=0.3 и ω_2=0.7.

5.3 Вычислить удельные теплоемкости кислорода и азота при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси кислорода и азота, если массовые доли этих газов соответственно равны ω_1=0.5 и ω_2=0.5.

5.4 Вычислить удельные теплоемкости газов CO и CO_2 при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси CO и CO_2, если массовые доли этих газов соответственно равны ω_1=0.1 и ω_2=0.9.

5.5 Вычислить удельные теплоемкости водорода и азота при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси водорода и азота, если массовые доли этих газов соответственно равны ω_1=0.4 и ω_2=0.6.

Задача 6

6.1 Гелий находится под давлением p_1=500 кПа и занимает объем V_1=3 м^3. Газ сначала охладили при постоянном давлении до объема V_2=1 м^2, а затем охладили при постоянном объеме до давления p_2=200 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;
2) совершенную им работу A;
3) количество теплоты Q, отданное газом.

6.2 Азот занимает объем V_1=1 м^3 и находится под давлением p_1=500 кПа. Газ сначала нагрели при постоянном давлении до объема V_2=3 м^2, а затем охладили при постоянном объеме до давления p_2=400 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;
2) совершенную им работу A;
3) суммарное количество теплоты Q, переданное газу.

6.3 Азот занимает объем V_1=3 м^3 и находится под давлением p_1=100 кПа. Газ сначала охладили при постоянном давлении до объема V_2=2 м^2, а затем нагрели при постоянном объеме до давления p_2=400 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;
2) совершенную им работу A;

3) суммарное количество теплоты Q, переданное газу.

6.4 Углекислый газ (CO_2) первоначально занимал объем V_1=2 м^3 и находился под давлением p_1=100 кПа. Газ сначала нагрели сначала при постоянном давлении до объема V_2=4 м^2, а затем нагрели при постоянном объеме до давления p_2=200 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;

2) совершенную им работу A;

3) количество теплоты Q, переданное газу.

6.5 Углекислый газ (CO_2) первоначально занимал объем V_1=5 м^3 и находился под давлением p_1=500 кПа. Газ сначала охладили при постоянном давлении до объема V_2=2 м^2, а затем охладили при постоянном объеме до давления p_2=300 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;

2) совершенную им работу A;

3) количество теплоты Q, отданное газом.

Задача 7

7.1 Идеальный одноатомный газ, содержащий количество вещества ν=3 моль, совершает замкнутый цикл, состоящий из:

1) изохорического нагревания при объеме $V_1 = 2\,\text{м}^3$ при котором давление увеличилось от $p_1 = 100\,\text{кПа}$ до $p_2 = 300\,\text{кПа}$;

2) изобарического расширения при давлении $p_2 = 300\,\text{кПа}$ при котором объем увеличился от $V_1 = 2\,\text{м}^3$ до $V_2 = 4\,\text{м}^3$;

3) изохорического охлаждения при объеме $V_2 = 4\,\text{м}^3$ при котором давление уменьшилось от $p_2 = 300\,\text{кПа}$ до $p_1 = 100\,\text{кПа}$;

4) изобарического сжатия при давлении $p_1 = 100\,\text{кПа}$ при котором объем увеличился от $V_2 = 4\,\text{м}^3$ до $V_1 = 2\,\text{м}^3$.

Построить график цикла. Определить термический КПД η цикла.

7.2 Идеальный трехатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ кмоль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем $V_1 = 3\,\text{м}^3$, наибольший $V_2 = 5\,\text{м}^3$, наименьшее давление $p_1 = 200\,\text{кПа}$, наибольшее $p_2 = 400\,\text{кПа}$. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η.

7.3 Идеальный одноатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 2$ кмоль, находится под давлением $p_1 = 200\,\text{кПа}$ и занимает объем $V_1 = 1\,\text{м}^3$. Сначала газ изохорически нагревают до температуры T_2=400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарического сжатия возвращают газ в начальное состояние. Построить график цикла. Определить термический КПД η цикла.

7.4 Одноатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 0.5$ кмоль, под давлением $p_1 = 200$ кПа занимал объем $V_1 = 3\,\text{м}^3$. Газ сжимался изобарически до объема $V_2 = 1\,\text{м}^3$, затем сжимался адиабатически и расширялся при постоянной температуре до начальных объема и давления. Построить график процесса. Найти термический КПД η цикла.

7.5 Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 2 раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.

Задача 8

8.1 В тепловой машине, работающей по циклу Карно температура T_1 нагревателя в 4 раза выше температуры T_2 охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты $Q_1 = 10$ кДж. Найти работу A, совершенную газом за цикл и термический КПД η цикла.

8.2 В тепловой машине, работающей по циклу Карно температура нагревателя равна $T_1 = 500$ К, температура охладителя равна $T_2 = 300$ К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Найти также количество теплоты Q_2**,** которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии и термический КПД η цикла.

8.3 Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в четыре раза выше температуры T_2 охладителя. Какую долю ω количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

8.4 Идеальный газ совершает цикл Карно. Количество тепла, полученное газом от нагревателя равно $Q_1 = 5000$ Дж. За цикл газ совершает работу $A = 800$ Дж. Найти термический КПД η этого цикла.

8.5 Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа изотермического сжатия газа равна $A_2 = 10$ Дж. Определить работу A_1 изотермического расширения, если термический КПД цикла равен $\eta = 0.3$.

Задача 9

9.1 Азот массой $m = 1\,\text{кг}$ был изобарически охлажден так, что объем его уменьшился в $n = 2$ раза, затем этот же азот был изохорически нагрет так, что давление его увеличилось в $n = 2$ раза. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

9.2 Вода массой $m = 2$ кг нагревается от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 373$ К и затем полностью превращается в пар той же температуры. Найти изменение ΔS энтропии воды в этом процессе.

9.3 Воду массой $m_1 = 5$ кг при температуре $T_1 = 273$ К смешали с водой массой $m_2 = 2$ кг при температуре $T_2 = 333$ К. Найти температуру и изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

9.4 Лед массой $m_1 = 1$ кг при температуре $T_1 = 273$ К был превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру $T_2 = 373$ К. Определить массу m_2 израсходованного пара и изменение ΔS энтропии системы лед-пар?

9.5 Лед массой $m = 1$ кг при температуре $T_1 = 253$ К, был нагрет до температуры $T_2 = 273$ К и расплавлен. Затем образовавшаяся вода была нагрета до температуры $T_3 = 293$ К. Определить изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

Примеры решения и оформления некоторых типовых задач

Задачи домашнего задания 1.
Кинематика

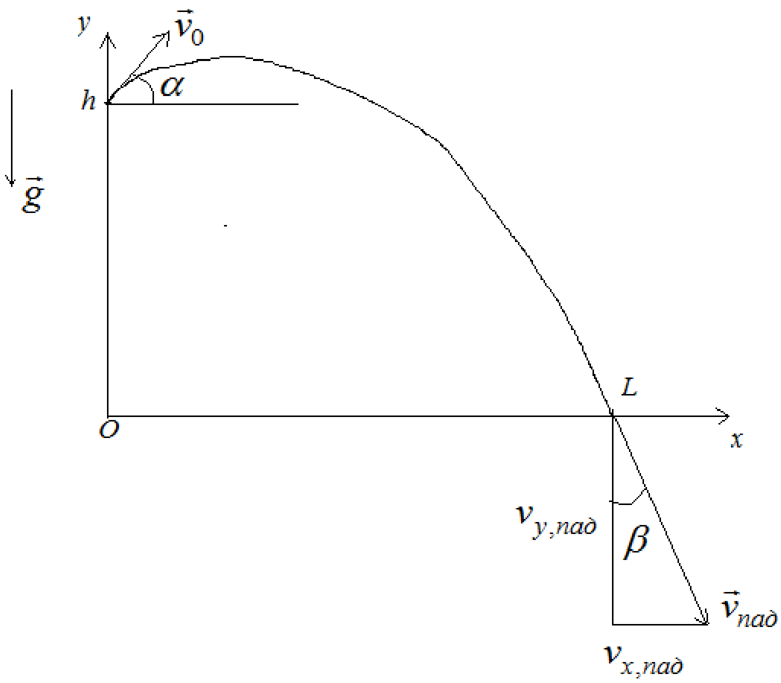
Задача 1. Тело сбросили с балкона дома, находящегося на высоте h м от поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти:

1. Время полета (или момент времени падения)
2. Расстояние от дома до места падения тела.
3. Скорость тела в момент падения.
4. Тангенциальное и нормальное ускорение тела в момент падения.

Дано: h, α, v_0, g

Найти: $t_{пад}$, L, $v_{пад}$, $a_{n,пад}$, $a_{\tau,пад}$

Решение. Выберем систему отсчета Oxy и сделаем рисунок



Здесь обозначено $\vec{v}_{пад}$, $v_{x,пад}$, $v_{y,пад}$ скорость в момент падения и ее проекции на оси Ox и Oy.

Будем решать задачу координатным методом.

Запишем общие уравнения равноускоренного движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (2)$$

Теперь запишем проекции этих уравнений на координатные оси Ox и Oy.
Уравнения (1) и (2) в проекции на координатные оси запишутся в виде

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (3)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \qquad (4)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (5)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad (6)$$

Заметим, что $\vec{a} = \vec{g}$ и проекции ускорения на координатные оси Ox и Oy равны соответственно

$$a_x = 0,\ a_y = -g\ . \qquad (7)$$

Проекции вектора начальной скорости $\vec{v}_0$ на координатные оси Ox и Oy равны соответственно

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \qquad (8)$$

Начальные координаты x_0 и y_0 равны

$$x_0 = 0,\ y_0 = h \qquad (9)$$

Учитывая (7), (8) и (9), мы перепишем уравнения (3), (4), (5) и (6) в виде

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad (10)$$

$$y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (11)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad (12)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \quad (13)$$

Уравнения (10), (11), (12) и (13) полностью описывают движение тела и позволяют найти любую величину, относящуюся к этому движения.

Найдем момент времени $t_{пад}$, в который тело упало на землю. В данный момент времени $y = 0$, поэтому из уравнения (11) имеем

$$0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

или

$$gt_{пад}^2 - 2v_0 \sin\alpha \cdot t_{пад} - 2h = 0$$

Решаем данное квадратное уравнение относительно $t_{пад}$:

$$D = 4v_0^2 \sin^2\alpha + 8gh$$

$$t_{пад} = \frac{2v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2\alpha + 8gh}}{2g} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Мы должны выбрать перед корнем знак «+», в противном случае $t_{пад}$ будет отрицательным, что не допустимо.

$$t_{пад} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \quad (14)$$

Расстояние L от дома до места падения тела равно координате x тела в момент времени $t_{пад}$. Поэтому подставляя (14) в (10), получаем:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t_{пад} = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} =$$

$$= v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \quad (15)$$

Чтобы найти скорость тела в момент падения, нужно найти координаты скорости в момент падения $v_{x,пад}$, $v_{y,пад}$. Эти величины можно найти, подставив в уравнения для проекций скоростей (12) и (13) время падения (14):

$$v_{x,пад} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{y,пад} = v_0 \sin\alpha - g\frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} =$$

$$= -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \quad (16)$$

Знак «-» в формуле (16) показывает, что проекция вектора скорости на ось *Oy* направлен против оси *Oy*.

Значение модуля $v_{пад}$ вектора скорости $\vec{v}_{пад}$ определяем по теореме Пифагора:

$$v_{пад} = \sqrt{v_{x,пад}^2 + v_{y,пад}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (17)$$

Тангенциальное ускорение тела в момент падения есть проекция полного ускорения $\vec{g}$ на касательную к траектории. Из рисунка видно, что

$$a_{\tau,пад} = g\cos\beta$$

С другой стороны из рисунка видно, что

$$\cos\beta = \frac{|v_{y,пад}|}{v_{пад}} = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Поэтому

$$a_{\tau,пад} = g\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \qquad (17)$$

Нормальное ускорение найдем условия, что квадрат полного ускорения равен сумме квадратов нормального и тангенциального ускорения:

$$g^2 = a_{\tau,пад}^2 + a_{n,пад}^2$$

Отсюда

$$a_{n,пад} = \sqrt{g^2 - a_{\tau,пад}^2} = \sqrt{g^2 - \left(g\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)^2} =$$

$$= g\sqrt{1 - \frac{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}{v_0^2 + 2gh}} = g\sqrt{\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2 + 2gh}} \qquad (17)$$

Ответ: $t_{пад} = \dfrac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$, $L = v_0^2\sin\alpha\cos\alpha\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right)$,
$v_{пад} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $a_{\tau,пад} = g\dfrac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$, $a_{n,пад} = g\sqrt{\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2 + 2gh}}$

Задача 2. Материальная движется в плоскости Oxy и в данной системе отсчета координаты материальной точки зависят от времени по закону:

$x(t) = at^2 + bt + c$

$y(t) = dt^3$

где a, b, c, d - константы. Найти модуль скорости, модуль ускорения, нормальное и тангенциальное ускорение в момент времени t_1.

Дано: $x(t) = at^2 + bt + c$, $y(t) = dt^3$, t_1

Найти: $v(t_1)$, $a(t_1)\,a_n(t_1)$, $a_\tau(t_1)$

Решение. В данной задаче рисунок не требуется.

Известно, что координаты вектора скорости материальной точки есть производные по времени от ее координат, т.е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Вычисляя производные, находим:

$$v_x = 2at + b, \quad v_y = 3dt^2$$

Модуль вектора скорости вычисляем по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2at+b)^2 + (3dt^2)^2} = \sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}$$

Подставляя вместо t значение t_1 получаем:

$$v = \sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}$$

Также известно, что координаты вектора ускорения материальной точки есть производные по времени от координат вектора скорости материальной точки, т.е.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y$$

Вычисляя производные, находим:

$$a_x = 2a, \quad a_y = 6dt$$

Модуль вектора ускорения вычисляем по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2}}$$

Для того чтобы найти тангенциальное ускорение a_τ, вспомним, что a_τ есть первая производная от модуля вектора скорости по времени, то есть

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Подставляя в эту формулу выражение $v = \sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}$ и беря производную по времени (как производную сложной функции) получаем:

$$a_\tau = \frac{1}{2}\frac{2(2at+b)\cdot 2a + 36d^2t^3}{\sqrt{(2at+b)^2 + 9d^2t^4}}.$$

В момент времени $t = t_1$ получаем

$$a_\tau = \frac{(2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}}{\sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$$

Нормальное ускорение определяем по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

Или, подставляя формулы $a == \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2}}$, $a_\tau = \dfrac{(2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}}{\sqrt{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$, получаем

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4a^2 + 36d^2t_1^{\,2} - \frac{\left((2at_1+b)\cdot 2a + 36d^2t_1^{\,3}\right)^2}{(2at_1+b)^2 + 9d^2t_1^{\,4}}}$$

Ответ: $v=\sqrt{(2at_1+b)^2+9d^2t_1^{\,4}}$, $a=\sqrt{4a^2+36d^2t_1^{\,2}}$, $a_\tau=\dfrac{(2at_1+b)\cdot 2a+36d^2t_1^{\,3}}{\sqrt{(2at_1+b)^2+9d^2t_1^{\,4}}}$,

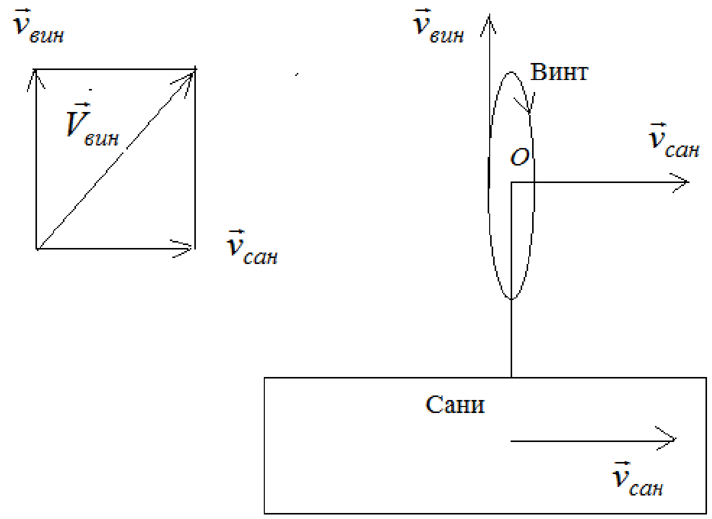
$$a_n=\sqrt{4a^2+36d^2t_1^{\,2}-\frac{\left((2at_1+b)\cdot 2a+36d^2t_1^{\,3}\right)^2}{(2at_1+b)^2+9d^2t_1^{\,4}}}$$

Задача 3. Винт аэросаней вращается с частотой n. Скорость поступательного движения аэросаней равна $v_{сан}$. С какой скоростью движется один из концов винта, если радиус винта равен R?

Дано: n, R, $v_{сан}$

Найти: $V_{вин}$

Решение. Сделаем рисунок



Наши обозначения:

$\vec{v}_{сан}$ - скорость саней относительно земли или то же самое – скорость оси вращения винта относительно земли.

$\vec{v}_{вин}$ - скорость точки на конце винта относительно саней

$\vec{V}_{вин}$ - скорость точки на конце винта относительно земли.

Нам нужно найти $\vec{V}_{вин}$.

По правилу сложения скоростей, скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета плюс скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Подвижная система отсчета – сани (или ось вращения винта).

Неподвижная система отсчета – земля.

Материальная точка – это точка на конце винта.

Поэтому

$$\vec{V}_{вин}=\vec{v}_{вин}+\vec{v}_{сан}$$

Поскольку направления скоростей $\vec{v}_{сан}$ и $\vec{v}_{вин}$ перпендикулярны, то модуль Модуль $V_{вин}$ вектора $\vec{V}_{вин}$ определяется по теореме Пифагора:

$$V_{вин} = \sqrt{v_{вин}{}^2 + v_{сан}{}^2}$$

Найдем $v_{сан}$ и $v_{вин}$. Величина $v_{сан}$ известна из условия задачи. Величина $v_{вин}$ есть модуль линейной скорости точки, находящейся на краю винта, вращающейся по окружности радиуса R относительно оси вращения. Эта величина связана с модулем угловой скорости вращения ω уравнением

$$v_{вин} = \omega R$$

Величина ω связана с частотой вращения винта формулой

$$\omega = 2\pi n$$

Поэтому

$$v_{вин} = 2\pi nR$$

Подставляя в формулу $V_{вин} = \sqrt{v_{вин}{}^2 + v_{сан}{}^2}$ получаем

$$V_{вин} = \sqrt{(2\pi nR)^2 + v_{сан}{}^2}$$

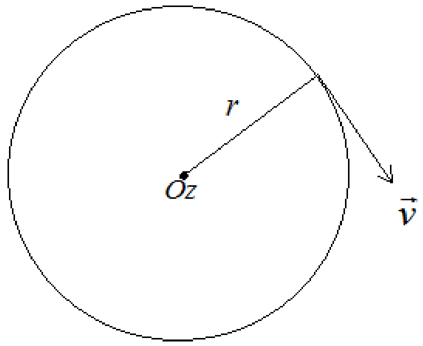
Ответ: $V_{вин} = \sqrt{(2\pi nR)^2 + v_{сан}{}^2}$

Задача 4 Диск радиусом r, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска спустя время t после начала вращения.

Дано: r, ε, t

Найти: a_n, a_τ, a

Решение. Рассмотрим одну точку на окружности диска. Это точка совершает вращательное движение относительно оси диска. Обозначим ось диска через Oz



При движении по окружности с постоянным угловым ускорением, нормальное ускорение точки равно центростремительному ускорению, т.е.

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где v- линейная скорость материальной точки. Модуль линейной скорости связан с модулем угловой скорости ω формулой

$$v = \omega r .$$

При движении по окружности с постоянным угловым ускорением, известны формулы для проекции угловой скорости ω_z на ось вращения

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t$$

Поскольку диск в начальный момент времени находился в состоянии покоя, то $\omega_{0z} = 0$. Далее, поскольку ось вращения неподвижна, $\varepsilon_z > 0$ и направление вектора углового ускорения не изменяется, то $\omega_z = \omega$, $\varepsilon_z = \varepsilon$ и мы имеем

$$\omega = \varepsilon t .$$

Поэтому

$$v = \varepsilon t r$$

и

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\varepsilon^2 t^2 r^2}{r} = \varepsilon^2 t^2 r$$

Чтобы найти тангенциальное ускорение, возьмем зависимость модуля v скорости от времени t и воспользуемся формулой

$$a_\tau = \dot{v} ,$$

то есть

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d(\varepsilon t r)}{dt} = \varepsilon r .$$

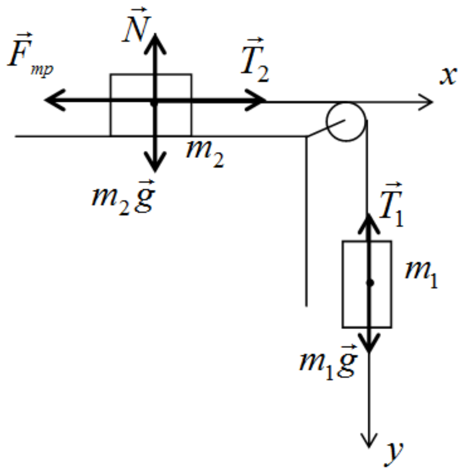
Полное ускорение определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\varepsilon^4 t^4 r^2 + \varepsilon^2 t^2}$$

Ответ: $a_n = \varepsilon^2 t^2 r$, $a_\tau = \varepsilon r$, $a = \sqrt{\varepsilon^4 t^4 r^2 + \varepsilon^2 t^2}$

Домашнее задание 2.
Динамика. Законы сохранения энергии и импульса

Задача 1. Невесомый блок укреплён на конце стола. Гири одинаковой массы $m_1 = m_2$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через невесомый блок. Коэффициент трения гири m_2 о стол равен k. Найти ускорение, с которым движутся гири и силу натяжения нити. Трением в блоке пренебречь.



Дано: $m_1 = m_2$, k, g

Найти: a, T

Решение. Делаем рисунок. Выбираем систему отсчета и систему координат (координатные оси *Ox* и *Oy*).

Расставляем приложенные к телам силы.

Рассматриваем движение каждого тела отдельно и записываем уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждого тела.

На тело m_2 действуют: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, реакция стола $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Уравнение для этого тела движения имеет вид:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{тр} + \vec{T}_2 + \vec{N} + m_2\vec{g}\,. \qquad (1)$$

К подвешенному грузу приложены силы $m_1\vec{g}$ и $\vec{T}_1$, уравнение движения в векторной форме для этого тела имеет вид

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1\,. \qquad (2)$$

Проектируем уравнения (1) и (2) на координатные оси. Обозначим через $a = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ модуль ускорения системы. Кроме того заметим, что модули сил натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны, т.е. $T_1 = T_2 \equiv T$ в силу невесомости и нерастяжимости нити и невесомости блока.

Для уравнения (1):

$$\text{На ось } Ox \quad m_2 a = T - F_{тр}, \qquad (3)$$

$$\text{На ось } Oy \quad 0 = m_2 g - N\,. \qquad (4)$$

Для уравнения (2):

$$\text{На ось } Ox \quad 0=0$$

$$\text{На ось } Oy \quad m_1 a = m_1 g - T\,. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) получаем

$$N = m_2 g\,. \qquad (6)$$

Согласно формуле для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N\,.$$

С учетом формулы (6) получаем

$$F_{тр} = \mu m_2 g \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (3) получаем

$$m_2 a = T - \mu m_2 g \qquad (8)$$

Из уравнения (5) выражаем T

$$T = m_1 g - m_1 a \qquad (9)$$

и подставляем в (8):

$$m_2 a = m_1 g - m_1 a - \mu m_2 g\,.$$

Из последнего уравнения выражаем модуль ускорения a:

$$m_2 a + m_1 a = m_1 g - \mu m_2 g$$

$$(m_2 + m_1)a = g(m_1 - \mu m_2)$$

$$a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2} \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим T:

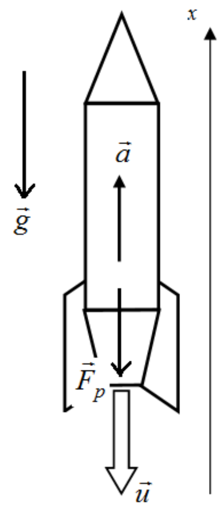
$$T = m_1 g - m_1 a = m_1 g - m_1\frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2} = g\frac{m_1 m_2(1+\mu)}{m_1 + m_2}$$

Ответ: $a = \dfrac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2}$, $T = g\dfrac{m_1 m_2(1+\mu)}{m_1 + m_2}$

Задача 2. Ракета, масса которой в начальный момент времени M, запущена вертикально вверх. Скорость выхода продуктов сгорания относительно ракеты u, расход горючего μ. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите ускорение a ракеты через время t после начала её движения. Поле силы тяжести считать однородным.

Дано: M, u, μ, g

Найти: a



Решение. Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета, связанную с Землей (на рисунке систему отсчета изображает ось *Ox*).

Запишем уравнение движения тела переменной массы

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{F}_p \qquad (1)$$

где $\vec{F}^{\text{внеш}} = m\vec{g}$ - внешняя сила (сила тяжести), $\vec{F}_p = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ - реактивная сила.

Из условия следует, что масса m ракеты изменяется с течением времени как

$$m = M - \mu t .$$

Поэтому

$$\vec{F}_p = \vec{u}\frac{dm}{dt} = -\mu\vec{u}$$

и уравнение (1) примет вид

$$(M - \mu t)\vec{a} = (M - \mu t)\vec{g} - \mu\vec{u} .$$

Возьмем проекцию этого уравнения на ось *Ox*:

$$(M - \mu t)a = -(M - \mu t)g + \mu u .$$

Выражая из последнего уравнения модуль ускорения ракеты, получим:

$$a = \frac{\mu u}{M - \mu t} - g .$$

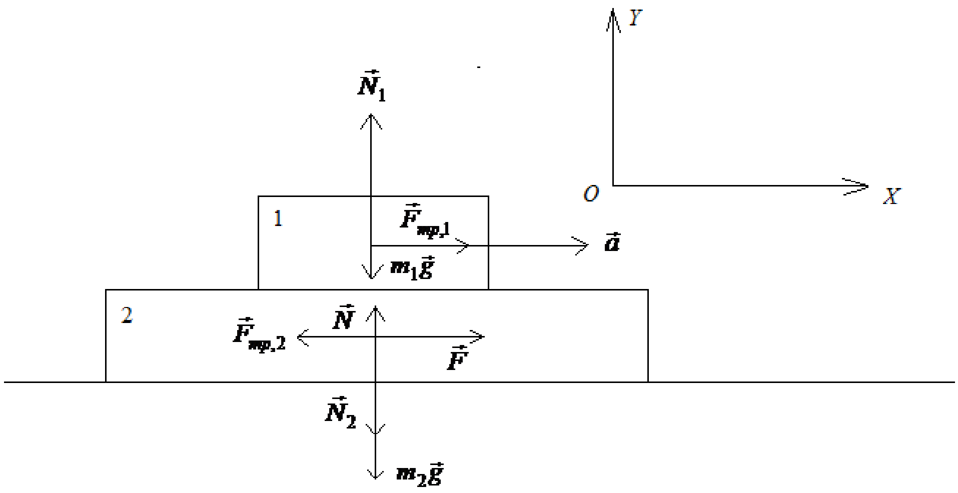
Ответ: $a = \dfrac{\mu u}{M - \mu t} - g$

Задача 3. Брусок массой m_2 может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нем находится другой брусок массой m_1. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков равен f. Определить максимальное значение силы $F_{\max}$, приложенной к нижнему бруску, при которой начнется соскальзывание верхнего бруска.

Дано: m_1, m_2, f, g

Найти: $F_{\max}$

Решение. Пусть скольжение верхнего тела по нижнему телу отсутствует. Сделаем рисунок. Выберем систему координат.



Здесь:

$\vec{N}_1$ - сила реакции, действующая на первый брусок со стороны второго бруска,

$\vec{N}_2$ - сила реакции, действующая на второй брусок со стороны первого бруска,

$\vec{N}$ - сила реакции, действующая на второй брусок со стороны горизонтальной поверхности,

$m_1\vec{g}$ - сила тяжести, действующая на первый брусок,

$m_2\vec{g}$ - сила тяжести, действующая на второй брусок,

$\vec{F}_{тр,1}$ - сила трения покоя, действующая на первый брусок со стороны второго бруска,

$\vec{F}_{тр,2}$ - сила трения покоя, действующая на второй брусок со стороны первого бруска,

$\vec{F}$ - внешняя сила, приложенная ко второму бруску.

Запишем второй закон Ньютона для системы брусков для случая, когда бруски движутся вправо и между брусками отсутствует проскальзывание. Поскольку в этом случае ускорение обоих брусков равно $\vec{a}$ то мы имеем.

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{тр,1} + \vec{F}_{тр,2} + \vec{F}$$

Поскольку в силу третьего закона Ньютона

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0,$$

$$\vec{F}_{тр,1} + \vec{F}_{тр,2} = 0,$$

то

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

В проекции на ось OX это уравнение примет вид

$$(m_1 + m_2)a = F,$$

откуда

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для верхнего бруска

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр,1}.$$

В проекции на ось OX уравнение $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр,1}$ примет вид

$$m_1 a = F_{тр,1}$$

$$m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} = F_{тр,1}$$

$$F_{тр,1} = F\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Мы видим из последнего уравнения, что при отсутствие проскальзывания сила трения (покоя), действующая на первый брусок со стороны второго, определяется силой F, действующей на второй брусок. С увеличением силы F от нуля до некоторого значения $F_{\max}$ сила трения покоя $F_{тр,1}$ будет нарастать от нуля до значения

$$F_{тр,1,\max} = F_{\max}\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

В момент времени, когда сила $F_{тр,1}$ достигнет значения $F_{тр,1,\max}$, она станет равной силе трения скольжения, поскольку в этот момент начнется скольжение верхнего тела по нижнему телу.

Значение силы трения скольжения определяется стандартной формулой

$$F_{тр,1,скольж} = fN_1$$

В проекции на ось OY второй закон Ньютона как в отсутствие, так и при наличии скольжения имеет вид:

$$0 = N_1 - m_1 g.$$

Отсюда

$$F_{тр,1,скольж} = fN_1 = fm_1 g.$$

Поэтому заменяя $F_{тр,1,\max}$ на $F_{тр,1,скольж}$, получаем

$$fm_1 g = F_{\max}\frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$F_{\max} = (m_1 + m)fg.$$

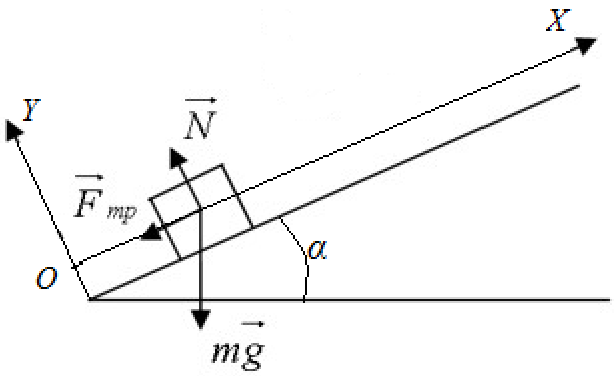
Ответ: $F_{\max} = (m_1 + m)fg$

Задача 4. Тело находится у основания наклонной плоскости с углом при основании α. Коэффициент трения тела о поверхность равен μ и масса тела равна m. Сколько времени тело будет подниматься вверх по наклонной плоскости, если его толкнуть вверх вдоль плоскости с начальной скоростью v_0. Какое расстояние S тело при этом пройдет?

Дано: α, μ, m, v_0, g

Найти: $t_{под}$, S

Решение. Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (система координат изображена на рисунке)



Запишем второй закон Ньютона для тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp},$$

где $m\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}$ - сила реакции опоры, $\vec{F}_{mp}$ - сила трения.

Проекции второго закона Ньютона на координатные оси OX и OY есть:

$$OX: \quad ma_x = -mg\sin\alpha - F_{mp}$$

$$OY: \quad 0 = -mg\cos\alpha + N$$

Из второго уравнения находим N:

$$N = mg\cos\alpha$$

Зная N можно найти величину силы трения:

$$F_{mp} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Данное выражение подставляем в уравнение $ma_x = -mg\sin\alpha - F_{mp}$ и из него находим проекцию ускорения на ось OX:

$$ma_x = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Из последней формулы видно, что $a_x < 0$, т.е. движение тела вдоль оси OX является равнозамедленным.

Мы нашли ускорение движения тела по наклонной плоскости.

Теперь воспользуемся уравнениями кинематики поступательного равноускоренного движения тела:

$$r = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор тела (материальной точки) в момент времени t, $\vec{r}_0$ - радиус вектор тела (материальной точки) в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{v}$ - скорость тела (материальной точки) в момент времени t, $\vec{v}_0$ - скорость тела (материальной точки) в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{a}$ - ускорение тела.

Спроектируем данные уравнения на ось движения тела – ось OX:

$$x = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x = v_0 + a_x t.$$

В момент времени $t = t_{под}$ тело остановилось, поэтому в этот момент времени $v_x = 0 \Rightarrow v_0 + a_x t_{под} = 0$.

Отсюда

$$t_{под} = -\frac{v_0}{a_x}.$$

Подставляя сюда $a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ получаем:

$$t_{под} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

В этот момент времени $x = S$, или

$$S = v_0 t_{под} + \frac{a_x t_{под}{}^2}{2}$$

Подставляя сюда $t_{под} = -\frac{v_0}{a_x}$ находим

$$S = -v_0\frac{v_0}{a_x} + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_0}{a_x}\right)^2 = -\frac{v_0{}^2}{2a_x}$$

Подставляя сюда $a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ находим

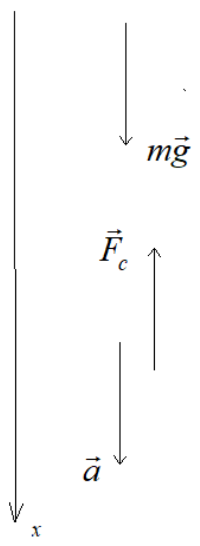
$$S = \frac{v_0{}^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

Ответ: $t_{под} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$, $S = \frac{v_0{}^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

Задача 5. При падении тела с большой высоты его скорость при установившемся движении достигает значения $v_{уст}$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найти зависимость скорости тела от времени и время τ, в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной половине установившейся скорости.

Дано: $v_{уст}$, $v(\tau) = \frac{1}{2}v_{уст}$, $F_c = kv$, g

Найти: τ, $v(t)$



Решение. Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (ось Ox) как показано на рисунке. На тело действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления среды $\vec{F}_c$.

Пусть m есть масса тела, $\vec{a}$ - его ускорение. Запишем 2 закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c$$

Спроектируем данное уравнение на ось Ox:

$$ma_x = mg + F_{c\,x},$$

где a_x - проекция ускорения на ось Ox, $F_{c\,x}$- проекция силы сопротивления на ось Ox. Поскольку по условию задачи $F_c = kv$,

$F_{c\,x} = -F_c = -kv_x$ то

$$ma_x = mg - kv_x. \qquad (1)$$

Запишем

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Тогда

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $v_x(t)$. Решим его. Пусть t текущее время и $v_x(t)$ есть скорость тела в момент времени t. Тогда в начальный момент времени $t = 0$ по условию задачи $v_x(0) = 0$. Далее запишем:

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x$$

$$\frac{dv_x}{mg - kv_x} = \frac{1}{m}dt$$

$$\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{mg - kv_x} = \int_0^t \frac{1}{m}dt$$

$$\frac{1}{-k}\ln(mg - kv_x)\Big|_{v_x(0)}^{v_x(t)} = \frac{1}{m}t\Big|_0^t$$

Поскольку $v_x(0) = 0$, то

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv_x(t)) + \frac{1}{k}\ln(mg) = \frac{1}{m}t\Big|$$

$$\ln\left(1 - \frac{kv_x(t)}{mg}\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$1 - \frac{kv_x(t)}{mg} = \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

$$v_x(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right).$$

В данной формуле нам неизвестен коэффициент сопротивления k. Найдем его из условия, что когда скорость установилась и стала равна $v_{\text{уст}}$, ускорение и тела равно нулю. Тогда из 2 закона Ньютона (1)

$$ma_x = mg - kv_x$$

$$0 = mg - kv_{\text{уст}}$$

$$k = \frac{mg}{v_{\text{уст}}}$$

И мы получаем

$$v_x(t) = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}t\right)\right).$$

Найдем τ из условия

$$v_x(\tau) = \frac{1}{2}v_{\text{уст}}$$

Или

$$\frac{1}{2}v_{\text{уст}} = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau\right)\right)$$

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau\right)$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{g}{v_{\text{уст}}}\tau$$

$$\tau = \frac{v_{\text{уст}}\ln 2}{g}$$

Ответ: $v_x(t) = v_{\text{уст}}\left(1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\text{уст}}}t\right)\right)$, $\tau = \frac{v_{\text{уст}}\ln 2}{g}$

Задача 6. Молот массой m_1 ударяет кусок железа, масса которого вместе с наковальней равна m_2. Скорость молота в момент удара равна v_1. Найти:

1) кинетическую энергию T_1 молота в момент удара;
2) энергию T_2, переданную куску железа с наковальней;
3) энергию T, затраченную на деформацию куска железа;
4) коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о кусок железа.

Удар молота о железо рассматривать как абсолютно неупругий.

Дано: m_1, m_2, v_1

Найти: T_1, T_2, T, η

Решение. Кинетическую энергию молота в момент удара найдем по формуле

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Чтобы определить энергию, переданную куску железа с наковальней, предварительно найдем скорость системы «молот+железо с наковальней» непосредственно после удара. Удар абсолютно неупругий, поэтому после удара система «молот+железо с наковальней» будет двигаться как единое целое со скоростью, которую мы обозначим через u. Тогда применим закон сохранения импульса, который состоит в том, что импульс системы до удара и после удара совпадают:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

Учтем, что скорость железа с наковальней до удара $\vec{v}_2$ равна 0 и спроектируем данное уравнение на ось системы координат, направление которой совпадает с направлением движения молота:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

Отсюда

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

При этом энергия T_2, переданная куску железа с наковальней есть

$$T_2 = \frac{m_2 u^2}{2} = \frac{m_2 \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2}{2} = \frac{m_2 m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$$

Молот до удара обладал энергией T_1. После удара вся система «молот+железо с наковальней» получила энергию

$$T' = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Следовательно, на деформацию куска железа использовалась энергия

$$T = T_1 - T'.$$

Или

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Назначение молота - путем ударов о кусок железа, находящийся на наковальне, вызвать его деформацию. Следовательно, энергию T следует считать полезной. КПД удара молота о поковку равен отношению энергии T, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta = \frac{T}{T_1}$$

Или

$$\eta = \frac{\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

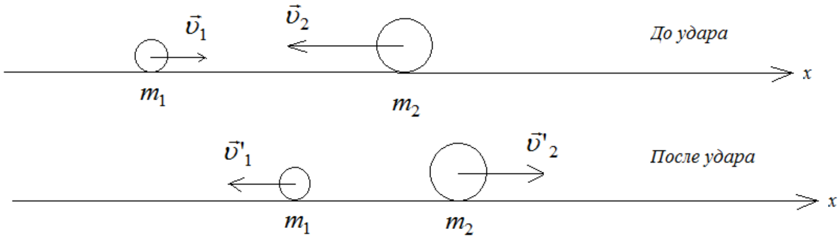
Ответ: $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, $T_2 = \frac{m_2 m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$, $T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$, $\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

Задача 7. Происходит абсолютно упругий центральный удар двух шаров, массы которых m_1 и m_2, а скорости υ_1 и υ_2. Найти скорости шаров после удара.

Дано: m_1, m_2, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$

Найти: $\vec{\upsilon}'_1$, $\vec{\upsilon}'_2$

Решение. Сделаем рисунок. Выберем систему отсчета (координатная ось Ox):



Т.к. удар абсолютно упругий, то кроме закона сохранения импульса тел сохраняется и полная механическая энергия соударяющихся тел. Пусть до удара скорости шаров есть $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, а после удара $\vec{\upsilon}'_1$, $\vec{\upsilon}'_2$.

Запишем закон сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon'^2_1}{2} + \frac{m_2\upsilon'^2_2}{2}.$$

Обозначим через υ_{1x}, υ_{2x} проекции скоростей шаров до удара, и через υ'_{1x}, υ'_{2x} проекции скоростей шаров после удара. Если υ_1 и υ_2 есть модули скоростей шаров до удара, то как видно из рисунка

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1,\ \upsilon_{2x} = -\upsilon_2.$$

При этом проекции υ'_{1x}, υ'_{2x} могут иметь любой знак в зависимости от того в какую сторону будут двигаться шары после удара.

Уравнение для проекций импульсов на ось x

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_{1x} + m_2\upsilon'_{2x}.$$

Закон сохранения энергии перепишем в виде

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon'^2_{1x}}{2} + \frac{m_2\upsilon'^2_{2x}}{2}$$

Итак, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными: υ'_{1x} и υ'_{2x}.

Перепишем систему в таком виде:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}) = m_2(\upsilon'_{2x} + \upsilon_2) \quad (1)$$

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2_{1x}) = m_2(\upsilon'^2_{2x} - \upsilon_2^2). \quad (2)$$

Разделив почленно, второе уравнение на первое, получим

$$\frac{(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2_{1x})}{\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}} = \frac{(\upsilon'^2_{2x} - \upsilon_2^2)}{\upsilon'_{2x} + \upsilon_2},$$

откуда

$$\upsilon_1 + \upsilon'_{1x} = \upsilon'_{2x} - \upsilon_2.$$

Выразим из этого уравнения υ'_{2x}

$$\upsilon'_{2x} = \upsilon_1 + \upsilon'_{1x} + \upsilon_2 \quad (3)$$

и подставим его в уравнение (1):

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}) = m_2(\upsilon_2 + \upsilon_1 + \upsilon'_{1x} + \upsilon_2)$$

Отсюда найдем υ'_{1x}:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_{1x}) = m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1 + \upsilon'_{1x})$$
$$\upsilon'_{1x}(m_1 + m_2) = m_1\upsilon_1 - m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)$$
$$\upsilon'_{1x} = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Отметим, что υ'_{1x} может иметь различный знак. Если $\upsilon'_{1x} > 0$ (или если $m_1\upsilon_1 > m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)$), то после удара шар 1 движется по оси *Ox*, а если $\upsilon'_{1x} < 0$ (или если $m_1\upsilon_1 < m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)$), то против оси *Ox*.

Подставляя (4) в (3), найдем υ'_{2x}:

$$\upsilon'_{2x} = \upsilon_1 + \frac{m_1\upsilon_1 - m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)}{m_1 + m_2} + \upsilon_2 =$$
$$= \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_1 + m_1\upsilon_1 - m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1) + m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{-m_2\upsilon_2 + m_1(2\upsilon_1 + \upsilon_2)}{m_1 + m_2}.$$

Также отметим, что υ'_{2x} может иметь различный знак. Если $\upsilon'_{2x} > 0$ (или если $m_1(2\upsilon_1 + \upsilon_2) > m_2\upsilon_2$), то после удара шар 2 движется по оси *Ox*, а если $\upsilon'_{2x} < 0$ (или если $m_1(2\upsilon_1 + \upsilon_2) < m_2\upsilon_2$), то против оси *Ox*.

Ответ: $\upsilon'_{1x} = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2(2\upsilon_2 + \upsilon_1)}{m_1 + m_2}$, $\upsilon'_{2x} = \dfrac{-m_2\upsilon_2 + m_1(2\upsilon_1 + \upsilon_2)}{m_1 + m_2}$

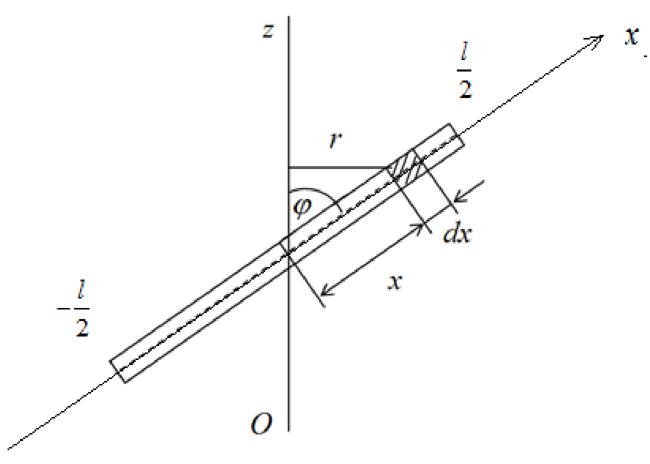
Домашнее задание 3.
Динамика твердого тела. Колебания

Задача 1. Однородный тонкий стержень длиной l и массой m может вращаться под углом φ относительно вертикальной оси Oz, проходящей через его центр (рисунок). Определить момент инерции стержня J относительно этой оси.

Дано: l, m, φ

Найти: J

Решение. Для определения момента инерции необходимо разбить весь стержень на бесконечно малые участки. Рассмотрим один из таких участков. Пусть его масса равна dm. Момент инерции этого участка относительно оси Oz равен



$$dJ = dm \cdot r^2,$$

где через r мы обозначили расстояние от оси вращения до выделенного участка (см. рисунок). Из рисунка видно, что

$$r = x \sin\varphi.$$

Т.к. стержень однородный и тонкий, то

$$dm = \rho_{\text{лин}} dx,$$

где $\rho_{\text{лин}} = \dfrac{m}{l}$ - линейная плотность распределения массы по стержню, т.е. масса, приходящаяся на единицу длины стержня. Тогда

$$dm = \frac{m}{l} dx.$$

Поэтому

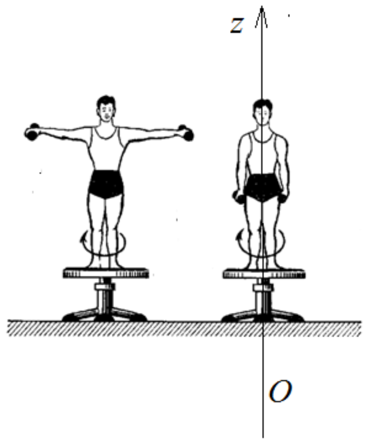
$$dJ = \frac{m}{l} \sin^2\varphi \cdot x^2 dx.$$

Учитывая, что момент инерции есть величина аддитивная, просуммируем dJ по всем бесконечно малым участкам, и, заменяя сумму интегралом, найдём момент инерции всего стержня:

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} \sin^2\varphi \cdot x^2 dx = \frac{m}{l} \sin^2\varphi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cdot x^2 dx =$$

$$= \frac{m}{l} \sin^2\varphi \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\varphi$$

Ответ: $J = \dfrac{1}{12} m l^2 \sin^2\varphi$



Задача 2. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n. В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой m каждая. Расстояние между гирями l_1. Определить частоту вращения n', скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гирями станет равным l_2. Моментом инерции скамьи пренебречь. Считать, что момент инерции человека относительно оси вращения скамьи с вытянутыми и опущенными руками без гирь равен соответственно J и J'.

Дано: n, J, J', l_1, l_2, m

Найти: n'

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из человека, держащего гири и скамью. Сумма моментов внешних сил, действующих на эту систему в проекции на ось вращения Oz равна нулю. Поэтому полный момент импульса этой системы в проекции на ось вращения должен сохраняться.

Обозначим:

J_{1z} - момент инерции человека с вытянутыми руками;

J_{2z} - момент инерции человека с опущенными руками;

J_{3z} - момент инерции гирь на вытянутых руках;

J_{4z} - момент инерции гирь на опущенных руках;

ω - угловая скорость системы при вытянутых руках человека;

ω' - угловая скорость системы при опущенных руках человека.

Тогда момент импульса системы в проекции на ось вращения при вытянутых руках человека равен

$$L_z = J_{1z}\omega + J_{3z}\omega$$

В то же время момент импульса системы в проекции на ось вращения при опущенных руках человека равен

$$L'_z = J_{2z}\omega' + J_{4z}\omega'$$

Закон сохранения момента импульса в проекции на ось вращения есть

$$L_z = L'_z$$

или

$$J_{1z}\omega + J_{3z}\omega = J_{2z}\omega' + J_{4z}\omega',$$

откуда

$$\omega' = \frac{J_{1z} + J_{3z}}{J_{2z} + J_{4z}}\omega .$$

Поскольку частоты n и n' связаны с угловыми скоростями как

$$\omega = 2\pi n, \ \omega' = 2\pi n',$$

то

$$n' = \frac{J_{1z} + J_{2z}}{J_{1z} + J_{3z}} n$$

Найдем моменты инерции. По условию задачи:

$$J_{1z} = J$$

$$J_{2z} = J'$$

Считая гири материальными точками, имеем

$$J_{2z} = 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml_1^2$$

$$J_{4z} = 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml_2^2$$

Тогда

$$n' = \frac{J + \frac{1}{2}ml_1^2}{J' + \frac{1}{2}ml_2^2} n = \frac{2J + ml_1^2}{2J' + ml_2^2} n$$

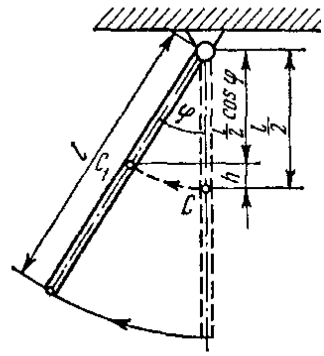
Ответ: $n' = \dfrac{2J + ml_1^2}{2J' + ml_2^2} n$.

Задача 3. Стержень длиной l и массой M может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рисунок). В середину стержня ударяет пуля массой m, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v_0, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Дано: l, M, m, v_0, g

Найти: φ

Решение. Удар пули следует рассматривать как абсолютно неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями как единое тело. Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию



$$E_к = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

где J момент инерции стержня с пулей относительно оси вращения стержня.

Обозначим r - расстояние от пули до оси вращения стержня. Тогда

$$J = \frac{1}{3} Ml^2 + mr^2.$$

Затем стержень с пулей поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс стержня поднимается на высоту

$$h_{ст} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

а пуля поднимается на высоту

$$h_{пул} = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi),$$

В отклоненном положении стержень с пулей будет обладать потенциальной энергией

$$U = Mgh_{ст} + mgh_{пул} = \left(M\frac{l}{2} + mr\right) g(1 - \cos\varphi)$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенств $E_к = \frac{1}{2} J\omega^2$ и $U = \left(M\frac{l}{2} + mr\right) g(1 - \cos\varphi)$ получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} Ml^2 + mr^2\right)\omega^2 = \left(M\frac{l}{2} + mr\right) g(1 - \cos\varphi),$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{g}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2\right)}{M\frac{l}{2} + mr} =$$

$$= 1 - \frac{\omega^2}{3g}\frac{\left(Ml^2 + 3mr^2\right)}{Ml + 2mr}$$

В этом выражении неизвестна величина ω. Найдем ее.

В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса. В начальный момент удара угловая скорость стержня равна $\omega_1 = 0$, поэтому его момент импульса в проекции на ось вращения (для простоты мы не пишем букву, обозначающую проекцию на ось) равен $L_1 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный момент импульса пули относительно оси вращения равен $L_2 = mv_0 r$, где r есть расстояние точки попадания от оси вращения. Тогда полный момент импульса системы «стержень+пуля» в начальный момент удара равен

$$L = L_1 + L_2 = mv_0 r$$

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля - линейную скорость v, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $v = \omega r$, то конечный момент импульса пули равен $L'_2 = mvr = m\omega r^2$. При этом конечный момент импульса стержня равен $L'_1 = \frac{1}{3}Ml^2\omega$. Полный конечный момент импульса системы относительно оси вращения равен

$$L' = L'_1 + L'_2 = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2\right)\omega$$

Применив закон сохранения импульса, можем написать

$$L = L'$$

или

$$mv_0 r = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2\right)\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{mv_0 r}{\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2}$$

Подставляем в формулу $\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{3g}\frac{\left(Ml^2 + 3mr^2\right)}{Ml + 2mr}$:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{3g}\frac{\left(Ml^2 + 3mr^2\right)}{Ml + 2mr} =$$

$$=1-\frac{1}{3g}\frac{\left(Ml^2+3mr^2\right)}{Ml+2mr}\left(\frac{mv_0r}{\frac{1}{3}Ml^2+mr^2}\right)^2=$$

$$=1-\frac{1}{g}\frac{3}{Ml+2mr}\frac{\left(mv_0r\right)^2}{Ml^2+3mr^2}$$

Учитывая, что в нашей задаче $r=\frac{l}{2}$ получаем

$$\varphi=\arccos\left(1-\frac{1}{4g}\frac{3}{Ml+ml}\frac{\left(mv_0l\right)^2}{Ml^2+\frac{3}{4}ml^2}\right)=$$

$$=\arccos\left(1-\frac{1}{gl}\frac{3m^2v_0^2}{\left(M+m\right)\left(4M+3m\right)}\right)$$

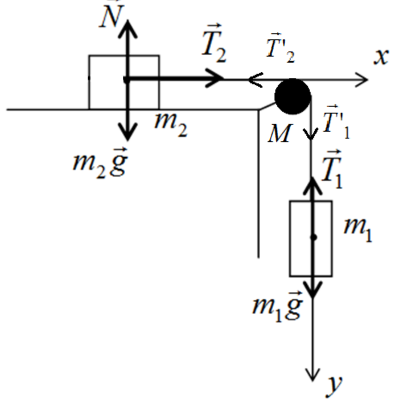
Ответ: $\varphi=\arccos\left(1-\frac{1}{gl}\frac{3m^2v_0^2}{\left(M+m\right)\left(4M+3m\right)}\right)$

Задача 4. Блок в форме сплошного цилиндра, массой $M=2$ кг укреплён на конце стола. Гири одинаковой массы $m_1=m_2=1кг$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение, с которым движутся гири и силу натяжения нити по разные стороны блока. Трением пренебречь.

Дано: $m_1=m_2=1\,\text{кг}$, $R=0{,}1\,\text{м}$, $M=2\,\text{кг}$, $g=10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Найти: a, T_1, T_2

Решение. Делаем рисунок. Выбираем систему отсчета и систему координат (координатные оси Ox и Oy). Расставляем приложенные к телам силы. Рассматриваем движение каждого тела отдельно и записываем уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждого тела.



На тело m_2 действуют: сила тяжести $m_2\vec{g}$, реакция стола $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Уравнение для этого тела движения имеет вид:

$$m_2\vec{a}_2=\vec{T}_2+\vec{N}+m_2\vec{g}\,. \qquad (1)$$

К подвешенному грузу приложены силы $m_1\vec{g}$ и $\vec{T}_1$, уравнение движения в векторной форме для этого тела имеет вид

$$m_1\vec{a}_1=m_1\vec{g}+\vec{T}_1. \qquad (2)$$

Проектируем уравнения (1) и (2) на координатные оси.

Обозначим через $a = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ модуль ускорения системы. Кроме того заметим, что модули сил натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ не равны, т.е. $T_1 \neq T_2$.
Для уравнения (1):

$$\text{На ось } Ox \quad m_2 a = T_2, \tag{3}$$

$$\text{На ось } Oy \quad 0 = m_2 g - N. \tag{4}$$

Для уравнения (2):

$$\text{На ось } Ox \quad 0=0$$

$$\text{На ось } Oy \quad m_1 a = m_1 g - T_1. \tag{5}$$

Уравнение (4) нами использовано не будет.

Далее рассмотрим блок и запишем для него уравнение динамики вращательного движения. Пусть ось *Oz* совпадает с осью вращения блока. Тогда в проекции на эту ось

$$J_z \varepsilon_z = RT'_1 - RT'_2,$$

где

$$J_z = \frac{1}{2} MR^2$$

(R - радиус блока) есть момент инерции блока относительно оси *Oz*, ε_z есть проекция углового ускорения блока на ось *Oz*, T'_1 и T'_2 есть модули сил, действующих со стороны нитей на блок, RT'_1 и RT'_2 есть проекции момента сил $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ на ось *Oz*.
Поскольку по 3 закону Ньютона

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1 \text{ и } \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2,$$

то $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ и мы имеем:

$$\frac{1}{2} MR^2 \varepsilon_z = RT_1 - RT_2 \tag{6}$$

Поскольку угловое ускорение относительно оси *Oz* ε_z связано модулем ускорения грузов как

$$\varepsilon_z = \frac{a}{R},$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{1}{2} MRa = RT_1 - RT_2 \tag{7}$$

Далее рассмотрим систему уравнений (3), (5), (7):

$$m_2 a = T_2$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$

$$\frac{1}{2} MRa = RT_1 - RT_2 .$$

Это есть система 3-х уравнений с 3-мя неизвестными a, T_1, T_2, которая может быть легко решена:
Выражаем из первого и второго уравнения соответственно T_2 и T_1

$$T_2 = m_2 a$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a$$

и подставляем в третье уравнение:

$$\frac{1}{2}MRa = Rm_1g - Rm_1a - Rm_2a$$

Отсюда находим a:

$$MRa = 2Rm_1g - 2Rm_1a - 2Rm_2a$$

$$a = \frac{2m_1g}{2m_1 + 2m_2 + M}.$$

Находим T_2 и T_1:

$$T_2 = m_2a = \frac{2m_1m_2g}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

$$T_1 = m_1g - m_1a = m_1g - \frac{2m_1^2g}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

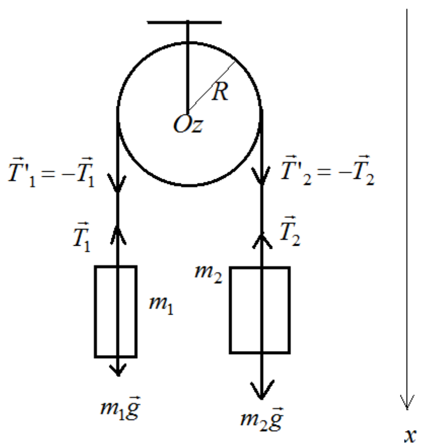
Ответ: $a = \dfrac{2m_1g}{2m_1 + 2m_2 + M}$, $T_2 = \dfrac{2m_1m_2g}{2m_1 + 2m_2 + M}$, $T_1 = m_1g - \dfrac{2m_1^2g}{2m_1 + 2m_2 + M}$

Задача 5. Через блок, укреплённый на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 и m_2. Масса блока m. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

Дано: m_1, m_2, m, g

Найти: a

Решение. Сделаем рисунок, выберем систему отсчета (систему координат). Ось Ox направим вниз, о ось Oz выберем совпадающей с осью вращения блока. Определим все силы. Пусть $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ есть соответственно силы, действующие на грузы со стороны нити. Тогда $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ есть соответственно силы, действующие на блок со стороны нити. Очевидно, что по третьему закону Ньютона



$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1,\quad \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2.$$

Запишем основной закон динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) для грузов массой m_1 и m_2

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1,$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2.$$

В проекции на ось Ox эти уравнения примут вид

$$m_1a_{1x} = m_1g - T_1,$$

$$m_2a_{2x} = m_2g - T_2.$$

Поскольку направления ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны, то $a_{2x} = -a_{1x}$ и мы имеем:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1, \qquad (1)$$

$$-m_2 a_{1x} = m_2 g - T_2. \qquad (2)$$

Заметим, что $|a_{1x}| = a_1 = a_2$, поскольку нить нерастяжима. При этом знак проекции a_{1x} указывает на направление движения грузов.

Далее рассмотрим блок и запишем для него уравнение динамики вращательного движения. Пусть ось Oz совпадает с осью вращения блока. В проекции на ось Oz

$$J_z \varepsilon_z = RT'_1 - RT'_2,$$

где

$$J_z = \frac{1}{2} MR^2$$

есть момент инерции блока относительно оси Oz, ε_z есть проекция углового ускорения блока на ось Oz, T'_1 и T'_2 есть модули сил, действующих со стороны нитей на блок, RT'_1 и RT'_2 есть проекции момента сил $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ на ось Oz.

Поскольку по 3 закону Ньютона

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1 \text{ и } \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2,$$

то $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ и мы имеем:

$$\frac{1}{2} mR^2 \varepsilon_z = RT_1 - RT_2$$

Поскольку угловое ускорение относительно оси Oz ε_z связано модулем ускорения грузов как

$$\varepsilon_z = \frac{a_{1x}}{R}.$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = RT_1 - RT_2. \qquad (3)$$

В данном уравнении все знаки выбраны правильно. Проверить это нетрудно. Рассуждаем так. Если $RT_1 > RT_2$, то блок будет раскручиваться с ускорением против часовой стрелки и $\vec{a}_1$ будет направлено по оси Ox, поэтому в этом случае $a_{1x} > 0$.

Далее рассмотрим систему уравнений (1), (2), (3):

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - T_1,$$

$$-m_2 a_{1x} = m_2 g - T_2,$$

$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = RT_1 - RT_2.$$

Это есть система 3-х уравнений с 3-мя неизвестными a, T_1, T_2, которая может быть легко решена. Выражаем из первого и второго уравнения соответственно T_2 и T_1

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_{1x},$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 a_{1x}$$

и подставляем в третье уравнение:

$$\frac{1}{2} mRa_{1x} = Rm_1 g - Rm_1 a_{1x} - Rm_2 g - Rm_2 a_{1x}$$

Отсюда находим a_{1x}:

$$mRa_{1x} = 2Rm_1g - 2Rm_1a_{1x} - 2Rm_2g - 2Rm_2a_{1x}$$

$$a_{1x} = \frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m}.$$

Видно, что $a_{1x} > 0$ если $m_1 > m_2$ и $a_{1x} < 0$ если $m_1 < m_2$. При этом

$$a = \left|\frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m}\right|$$

Ответ: $a = \left|\frac{2(m_1 - m_2)g}{2m_2 + 2m_1 + m}\right|$.

Домашнее задание 4.
Молекулярная физика и термодинамика

Задача 1. В баллоне объемом V находится гелий под давлением p_1 при температуре T_1. После того как из баллона был выпущен гелий массой m, температура в баллоне понизилась до T_2. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано: V, p_1, T_1, T_2, m, μ

Найти: p_2

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа. Для начального состояния уравнение имеет вид

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1$$

а для конечного состояния

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2$$

где m_1 и m_2 есть массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из этих двух уравнений:

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{\mu p_2 V}{RT_2}$$

Массы m_1 и m_2 по условию задачи должны удовлетворять соотношению

$$m_1 - m_2 = m$$

Подставляя в последнее выражение формулы для m_1 и m_2, получаем

$$\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - \frac{\mu p_2 V}{RT_2} = m$$

Отсюда выражаем p_2

$$\frac{\mu p_2 V}{RT_2}=\frac{\mu p_1 V}{RT_1}-m$$

$$p_2=\frac{RT_2}{\mu V}\left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1}-m\right)=\frac{T_2}{T_1}p_1-\frac{RmT_2}{\mu V}$$

Ответ: $p_2=\frac{T_2}{T_1}p_1-\frac{RmT_2}{\mu V}$

Задача 2. В сосуде содержится газ, количество вещества ν которого равно $\nu=1.2$ моль. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число ΔN молекул, скорости v которых меньше $\varepsilon v_в$, где $v_в$ - наиболее вероятная скорость, $\varepsilon=0.001$

Дано: $\nu=1.2$ моль, $\varepsilon=0.001$, $v<\varepsilon v_в$

Найти: ΔN

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по скоростям (формула из лекции):

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Смысл этой функции следующий. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv, то на каждый интервал скорости будет приходиться число молекул $dN(v)$, равное

$$dN(v)=f(v)Ndv,$$

где N - полное число молекул. Тогда число молекул, скорости которых лежат в пределах от 0 до $\varepsilon v_в$ будет равно

$$\Delta N=\int_0^{\varepsilon v_в}f(v)Ndv$$

или

$$\Delta N=\int_0^{\varepsilon v_в}4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)Ndv=$$

$$\Delta N=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon v_в}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

Поскольку газа ν молей, то $N=\nu N_A$, где N_A есть число Авогадро, поэтому

$$\Delta N=4\pi\nu N_A\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon v_в}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

Вычисление такого интеграла затруднительно. Тем не менее, как известно из теории $v_в=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Выражение под интегралом в экспоненте очень мало:

$$\frac{mv^2}{2kT} \le \frac{m(\varepsilon v_\text{в})^2}{2kT} = \frac{m\varepsilon^2}{2kT}\frac{2kT}{m} = \varepsilon^2 = 0.000001 << 1$$

Поэтому мы можем использовать приближенную формулу:

$$\exp(-x) \approx 1 - x \approx 1 \quad \text{при} \quad x << 1$$

Тогда $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \approx 1$ и мы получаем

$$\Delta N = 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \approx$$

$$\approx 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon v_\text{в}} v^2 dv =$$

$$= 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{(\varepsilon v_\text{в})^3}{3} =$$

$$= 4\pi \nu N_A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{\varepsilon^3}{3} =$$

$$= 4\nu N_A \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ \frac{\varepsilon^3}{3}$$

Ответ: $\Delta N = 4\nu N_A \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ \frac{\varepsilon^3}{3}$

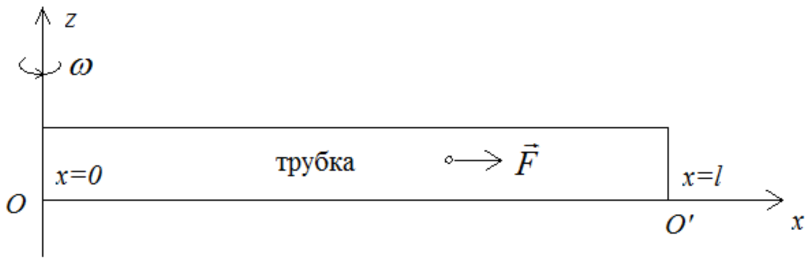
Задача 3. Горизонтально расположенную трубку длиной l с закрытыми торцами, внутри которой находится углекислый газ при температуре T, вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее торцов. Давление газа на торец трубки, через который проходит ось вращения, равно p_1. Определить давление p_2 газа на противоположный торец трубки.

Дано: l, T, p, ω, p_1., μ

Найти: p_2

Решение. Обозначим через μ молярную массу углекислого газа, которая считается известной.

Поскольку трубка вращается, то система отсчета, связанная с трубкой является неинерциальной. В этой системе отсчета на молекулу газа действует сила инерции – центробежная сила. Эта сила равна произведению массы молекулы газа m на ускорение a этой молекулы в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей.



Сделаем рисунок. Направим координатную ось Ox вдоль трубки и ее начало O совместим с осью вращения. Противоположный конец трубки обозначим через O'. Точка O имеет координату $x = 0$, а точка O' имеет координату $x = l$.

Пусть молекула газа имеет координату x (т.е. находится в трубке на расстоянии x от оси вращения). Если трубка вращается с угловой скоростью ω, то вместе с ней вращается и молекула газа и ее ускорение в системе отсчета, связанной с Землей равно

$$a = \omega^2 x$$

Тогда центробежная сила инерции $\vec{F}$, действующая на молекулу, по модулю равна

$$F = ma = m\omega^2 x$$

и направлена вдоль оси Ox. Поскольку данная сила зависит только от координаты x молекулы, то она является потенциальной, и мы можем найти потенциальную энергию молекулы в поле действия этой силы.

Примем начало отсчета потенциальной энергии в точке O', т.е. будем считать, что в точке с координатой $x = l$ потенциальная энергия молекулы равна нулю. Такой выбор удобен, потому что потенциальная энергия возрастает в направлении, противоположном направлению действия силы.

По определению потенциальной энергии, она в конкретной точке равна работе силы по перемещению молекулы из данной точки в точку с нулевой потенциальной энергией. Согласно этому, если потенциальная энергия в некоторой точке 1 принимается равной нулю, то потенциальная энергия в точке 2 равна

$$U_1 = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

В нашем случае потенциальная энергия молекулы в точке с координатой x будет равна

$$U(x) = -\int_l^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_l^x F dx = \int_x^l F dx = \int_x^l m\omega^2 x dx =$$

$$= m\omega^2 \int_x^l x dx = m\omega^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_x^l = \frac{m\omega^2}{2}\left(l^2 - x^2\right)$$

Согласно формуле распределения Больцмана давление газа, находящегося в потенциальном поле есть

$$p = p_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

где U потенциальная энергия молекулы газа в данной точке, p - давление газа в данной точке, p_0 - давление газа в точке, где потенциальная энергия равна нулю. Применяя эту формулу к нашему случаю, мы получим:

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}}$$

где $U(x)$ потенциальная энергия молекулы газа в точке с координатой x, $p(x)$ - давление газа в точке с координатой x, p_0 - давление газа в точке в точке $x = l$.

Поскольку

$$U(x) = \frac{m\omega^2}{2}\left(l^2 - x^2\right)$$

то

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{m\omega^2\left(l^2 - x^2\right)}{2kT}\right)$$

В соответствие с условием задачи $p_0 = p_2$ - давление, которое нам нужно найти. Из условия нам известно, что $p(0) = p_1$. Тогда

$$p_1 = p_2 \exp\left(-\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}\right),$$

откуда

$$p_2 = p_1 \exp\left(\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}\right).$$

Поскольку $m = \dfrac{\mu}{N_A}$, где N_A - число Авогадро, то

$$p_2 = p_1 \exp\left(\frac{\mu\omega^2 l^2}{2N_A kT}\right)$$

Ответ: $p_2 = p_1 \exp\left(\dfrac{m\omega^2 l^2}{2kT}\right)$

Задача 4. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление p=79 кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с t_1=5°C до t_2=1°C. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Дано: p, $T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$, p_0, μ

Найти: Δh

Решение. Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} h\right),$$

где p и p_0 – давления газа на высотах h и h = 0, μ - масса одного моля воздуха. Барометр может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h_1 (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев.

Первый случай – температура за бортом T_1, высота самолета h_1

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT_1} h_1 \right)$$

Второй случай – температура за бортом T_2, высота самолета h_2

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT_2} h_2 \right)$$

Выразим из последних двух формул h_1 и h_2

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu g}{RT_1} h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{RT_1}{\mu g} \ln\frac{p_0}{p},$$

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu g}{RT_2} h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{RT_2}{\mu g} \ln\frac{p_0}{p}$$

Получаем ответ

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{RT_2}{\mu g} \ln\frac{p_0}{p} - \frac{RT_1}{\mu g} \ln\frac{p_0}{p} = \frac{R}{\mu g}\left(\ln\frac{p_0}{p} \right)(T_2 - T_1)$$

Отметим, что $\Delta h < 0$, так как $T_2 < T_1$, т.е. самолет снизился.

Ответ: $\Delta h = \frac{R}{\mu g}\left(\ln\frac{p_0}{p} \right)(T_2 - T_1)$

Задача 5. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_v) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли газов соответственно равны $\omega_{\text{неон}}$ и $\omega_{\text{водор}}$.

Дано: $\mu_{\text{неон}}$, $\mu_{\text{водор}}$, $i_{\text{неон}} = 3$, $i_{\text{водор}} = 5$, $\omega_{\text{неон}}$, $\omega_{\text{водор}}$..

Найти: $c_{v,\text{неон}}$, $c_{v,\text{водор}}$, $c_{p,\text{неон}}$, $c_{p,\text{водор}}$

Решение. Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме есть (согласно лекциям):

$$C_v = \frac{i}{2} R$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении есть (согласно лекциям):

$$C_p = \frac{i+2}{2} R$$

Здесь i есть число степеней свободы у молекулы газа.

Удельная теплоемкость есть теплоемкость 1 килограмма газа. Молярная теплоемкость есть теплоемкость одного моля газа. В одном моле газа содержится μ килограмм газа. Поэтому молярные C и удельные c теплоемкости связаны как

$$c = \frac{C}{\mu}.$$

В итоге находим:

$$c_{v,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}}}{2\mu_{\text{неон}}} R,$$

$$c_{v,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}}}{2\mu_{\text{водор}}} R,$$

$$c_{p,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}} + 2}{2\mu_{\text{неон}}} R\ ,$$

$$c_{p,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}} + 2}{2\mu_{\text{водор}}} R$$

Рассмотрим смесь этих газов в соотношении

$$\frac{\omega_{\text{неон}}}{\omega_{\text{водор}}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}},\ \omega_{\text{неон}} + \omega_{\text{водор}} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{\omega_{\text{неон}}}{1-\omega_{\text{неон}}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}$$

$$\omega_{\text{неон}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}\left(1-\omega_{\text{неон}}\right)$$

$$\omega_{\text{неон}}\left(1+\frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}\right) = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{водор}}}$$

Тогда

$$\omega_{\text{неон}} = \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}},$$

Аналогично

$$\omega_{\text{водор}} = \frac{m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}}$$

Нагреем эту смесь при постоянном объеме так, чтобы ее температура изменилась на ΔT. Тогда теплота, необходимая для нагревания смеси на ΔT, есть:

$$Q = c_v\left(m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}\right)\Delta T$$

При этом

$$Q = Q_{\text{неон}} + Q_{\text{водор}}$$

где $Q_{\text{неон}}$ - та часть тепла, которая пошла на нагрев (увеличение внутренней энергии) неона, а $Q_{\text{водор}}$ - та часть тепла, которая пошла на нагрев (увеличение внутренней энергии) водорода. Поскольку

$$Q_{\text{неон}} = c_{v,\text{неон}} m_{\text{неон}} \Delta T$$
$$Q_{\text{водор}} = c_{v,\text{водор}} m_{\text{водор}} \Delta T$$

то получаем

$$c_v \left(m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}\right) \Delta T = c_{v,\text{неон}} m_{\text{неон}} \Delta T + c_{v,\text{водор}} m_{\text{водор}} \Delta T$$
$$c_v \left(m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}\right) = c_{v,\text{неон}} m_{\text{неон}} + c_{v,\text{водор}} m_{\text{водор}}$$
$$c_v = \frac{c_{v,\text{неон}} m_{\text{неон}} + c_{v,\text{водор}} m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}}$$
$$c_v = c_{v,\text{неон}} \frac{m_{\text{неон}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}} + c_{v,\text{водор}} \frac{m_{\text{водор}}}{m_{\text{неон}} + m_{\text{водор}}}$$
$$c_v = c_{v,\text{неон}} \omega_{\text{неон}} + c_{v,\text{водор}} \omega_{\text{водор}}$$
$$c_v = \frac{i_{\text{неон}} R}{2\mu_{\text{неон}}} \omega_{\text{неон}} + \frac{i_{\text{водор}} R}{2\mu_{\text{водор}}} \omega_{\text{водор}}.$$

Рассуждая точно также, но при нагревании газа при постоянном давлении, мы получаем вместо последних двух формул

$$c_p = c_{p,\text{неон}} \omega_{\text{неон}} + c_{p,\text{водор}} \omega_{\text{водор}}$$
$$c_p = \frac{\left(i_{\text{неон}} + 2\right) R}{2\mu_{\text{неон}}} \omega_{\text{неон}} + \frac{\left(i_{\text{водор}} + 2\right) R}{2\mu_{\text{водор}}} \omega_{\text{водор}}$$

Ответ:

$$c_{v,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}}}{2\mu_{\text{неон}}} R, \; c_{v,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}}}{2\mu_{\text{водор}}} R,$$
$$c_{p,\text{неон}} = \frac{i_{\text{неон}} + 2}{2\mu_{\text{неон}}} R, \; c_{p,\text{водор}} = \frac{i_{\text{водор}} + 2}{2\mu_{\text{водор}}} R,$$
$$c_v = \frac{i_{\text{неон}} R}{2\mu_{\text{неон}}} \omega_{\text{неон}} + \frac{i_{\text{водор}} R}{2\mu_{\text{водор}}} \omega_{\text{водор}},$$
$$c_p = \frac{\left(i_{\text{неон}} + 2\right) R}{2\mu_{\text{неон}}} \omega_{\text{неон}} + \frac{\left(i_{\text{водор}} + 2\right) R}{2\mu_{\text{водор}}} \omega_{\text{водор}}$$

Задача 6. Кислород занимает объем V_1=1 м^3 и находится под давлением p_1=200 кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема V_2=3 м^2, а затем при постоянном объеме до давления p_2=500 кПа. Найти:

1) изменение ΔU внутренней энергии газа;
2) совершенную им работу A;
3) количество теплоты Q, переданное газу.

Дано: V_1, V_2, p_1, p_2, $i = 5$, μ

Найти: Q, ΔU, A

Решение. Сначала идет процесс нагревания газа при постоянном давлении p_1. При этом процессе меняются температура и объем, т.е.:

$$(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$$

Затем происходит нагревание газа при постоянном объеме. При этом меняются температура и давление:

$$(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$$

Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния (p_1, V_1, T_1) в состояние (p_2, V_2, T_2) выражается формулой

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$$

Чтобы найти температуры напишем уравнение Менделеева-Клапейрона для состояний (p_1, V_1, T_1) и (p_2, V_2, T_2)

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$$

$$T_1 = \frac{\mu}{mR} p_1 V_1$$

$$T_2 = \frac{\mu}{mR} p_2 V_2$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(\frac{\mu}{mR}p_2V_2 - \frac{\mu}{mR}p_1V_1\right) = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

Полная работа, совершаемая газом, равна

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 - работа в процессе $(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$, A_2 - работа в процессе $(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$.

В процессе $(p_1, V_1, T_1) \to (p_1, V_2, T')$ давление постоянно (p=const). Работа в этом случае выражается формулой

$$A_1 = p_1(V_2 - V_1)$$

В процессе $(p_1, V_2, T') \to (p_2, V_2, T_2)$ объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю, т.е. $A_2 = 0$. Таким образом,

$$A = A_1 = p_1(V_2 - V_1)$$

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_1(V_2 - V_1)$$

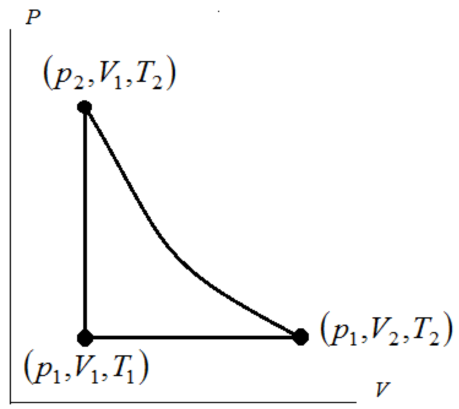
Ответ: $\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$, $A = p_1(V_2 - V_1)$, $Q = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_1(V_2 - V_1)$

Задача 7. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν=1 моль, находится под давлением p_1=250кПа и занимает объем V_1==10 л. Сначала газ изохорически нагревают до температуры T_2=400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарического сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический КПД η цикла.

Дано: ν, V_1, T_2, p_1, $i=5$

Найти: η

Решение. Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах *p, V* этот цикл имеет вид, показанный на рисунке. Характерные точки цикла обозначим состояниями (p_1,V_1,T_1),(p_2,V_1,T_2), (p_1,V_2,T_2).



Термический КПД любого цикла определяется выражением

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, отданное газом за цикл охладителю. Заметим, что разность количеств теплоты Q_1-Q_2 равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах p, V изображается площадью цикла (площадь внутренности изображенной фигуры).

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_1'на участке (p_1,V_1,T_1)-(p_2,V_1,T_2), (изохорический процесс) и Q_1''на участке (p_2,V_1,T_2)-(p_1,V_2,T_2) (изотермический процесс). Таким образом:

$$Q_1=Q_1'+Q_1''$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорическом процессе (p_1,V_1,T_1)-(p_2,V_1,T_2), равно

$$Q_1'=C_v\nu(T_2-T_1)$$

где C_v - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; ν — количество вещества. Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделева для состояния (p_1,V_1,T_1):

$$T_1=\frac{p_1V_1}{\nu R}$$

Тогда

$$Q_1'=C_v\nu\left(T_2-\frac{p_1V_1}{\nu R}\right)$$

Поскольку $C_v=\frac{i}{2}R$, то

$$Q_1'=\frac{i}{2}R\nu\left(T_2-\frac{p_1V_1}{\nu R}\right)$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе (p_2, V_1, T_2)-(p_1, V_2, T_2), равно (лекции)

$$Q_1'' = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Объем V_2 найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделева для состояния (p_1, V_2, T_2):

$$V_2 = \frac{\nu R T_2}{p_1}$$

Тогда

$$Q_1'' = \nu R T_2 \ln\left(\frac{\frac{\nu R T_2}{p_1}}{V_1}\right) = \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)$$

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = \frac{i}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)$$

На участке (p_1, V_2, T_2)-(p_1, V_1, T_1)газ отдает количество теплоты Q_2, равное

$$Q_2 = C_p \nu (T_2 - T_1) = C_p \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)$$

где C_p - молярная теплоемкость газа при изобарном процессе, равная

Поскольку $C_p = \frac{i+2}{2} R$, то

$$Q_2 = \frac{i+2}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)$$

Подставим найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу для η:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{i+2}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{\frac{i}{2} R \nu \left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + \nu R T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$$

$$= 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{i\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + 2T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(i+2)\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right)}{i\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right) + 2T_2 \ln\left(\frac{\nu R T_2}{V_1 p_1}\right)}$

Задача 8. В цилиндре под поршнем находится водород массой m при температуре T_1. Водород начал расширяться адиабатически, увеличив свой объем в n_1 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в n_2 раз. Найти температуру T_2, в конце адиабатического расширения и работу A, совершенную газом.

Дано: m, μ, γ, $\frac{V_2}{V_1} = n_1$, $\frac{V_2}{V_3} = n_2$ T_1, $i = 5$

Найти: T_2, A

Решение. Над газом совершается два процесса:

(p_1, V_1, T_1)-(p_2, V_2, T_2) - адиабатический процесс

(p_2, V_2, T_2)-(p_3, V_3, T_2) - изотермический процесс

Запишем уравнения для адиабатического процесса $TV^{\gamma-1} = const$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Отсюда

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\gamma-1} = T_1 n_1^{1-\gamma}$$

Работа A равна работе газа $A_1 > 0$ при адиабатическом расширении плюс работа газа $A_2 < 0$ при изотермическом сжатии, то есть

$$A = A_1 + A_2$$

Работа A_1 газа при адиабатическом расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2)$$

Поскольку $C_v = \frac{i}{2} R$, то

$$A_1 = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R(T_1 - T_2)$$

Поскольку $T_2 = T_1 n_1^{1-\gamma}$, то

$$A_1 = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R\left(T_1 - T_1 n_1^{1-\gamma}\right)$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2 = RT_2 \frac{m}{\mu} \ln\frac{V_3}{V_2} = -RT_2 \frac{m}{\mu} \ln n_2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R\left(T_1 - T_1 n_1^{1-\gamma}\right) - RT_2 \frac{m}{\mu} \ln n_2$$

Ответ: $A=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(T_1-T_1n_1^{1-\gamma}\right)-RT_2\frac{m}{\mu}\ln n_2$

Задача 9. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой $m=1$ кг от температуры $T_1=273$ К до температуры $T_2=373$ К и последующем превращении воды в пар той же температуры.

Дано: $m=1$ кг, $T_1=273$ К , $T_1=373$ К, λ, c

Найти: ΔS

Решение. Найдем отдельно изменение энтропии $\Delta S'$ при нагревании воды и изменение энтропии $\Delta S''$ при превращении ее в пар. Полное изменение энтропии выразится суммой

$$\Delta S=\Delta S'+\Delta S''$$

Как известно, изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S=S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\delta Q=mcdT$, где m - масса тела; c - его удельная теплоемкость. Подставив выражение δQ в равенство $\Delta S=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}$, найдем формулу для вычисления изменения энтропии при нагревании воды:

$$\Delta S'=mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=mc\ln T\Big|_{T_1}^{T_2}=mc\ln\frac{T_2}{T_1}$$

При вычислении по формуле $\Delta S=S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}$ изменения энтропии во время превращения воды в пар той же температуры постоянная температура T выносится за знак интеграла. Вычислив интеграл, найдем

$$\Delta S=S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T_2}=\frac{1}{T_2}\int_1^2\delta Q=\frac{Q}{T_2},$$

где Q - количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры T_2. Подставив в равенство $\Delta S''=\frac{Q}{T_2}$ выражение количества теплоты $Q=\lambda m$, где λ - удельная теплота парообразования, получим

$$\Delta S''=\frac{\lambda m}{T_2}$$

Окончательно получаем:

$$\Delta S=\Delta S'+\Delta S''=mc\ln\frac{T_2}{T_1}+\frac{\lambda m}{T_2}$$

Ответ: $\Delta S = mc\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_2}$

Задача 10. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой m от объема V_1 до объема V_2.

Дано: m, V_1, V_2, μ

Найти: ΔS

Решение. Так как процесс изотермический, то в общем выражении энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

температуру выносят за знак интеграла. Выполнив это, получим

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T}$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$ Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$Q = A$$

Работа A для этого (изотермического) процесса определяется по формуле (из лекций):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Тогда

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{A}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Ответ: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$