Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

Кафедра физики

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ, ОПТИКА, КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Индивидуальные домашние задания
для обучающихся всех специальностей
дневной и заочной форм обучения

Составитель: А.П.Зубарев

Самара
2023

УДК 537
Физика. Электромагнетизм, оптика, квантовая физика: индивидуальные домашние задания для обучающихся по специальностям[Текст] / Составитель: Зубарев А.П., - Самара: Самарский университет, 2023. – 82 с.

Издание содержит индивидуальные домашние задания с примерами решения и оформления типовых задач.

Утвержден на заседании кафедры 2 сентября 2023 г., протокол № 1.
Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты:

Подписано в печать . Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 5,2. Тираж 100 экз. Заказ …

Правила выполнения индивидуальных домашних заданий

В качестве индивидуальных домашних заданий к практическим занятиям преподаватель представляет каждому обучающемуся определенное количество задач, которые ему необходимо решить и оформить в форме отчета.

Список задач определяется вариантом обучающегося. Обычно вариант совпадает с порядковым номером обучающегося в журнале. При этом список задач, которые должен решить и оформить обучающийся определяется по последней цифре порядкового номера обучающегося с помощью таблицы перед списком задач в данной методичке.

Отчет по решенным задачам оформляется в отдельной тетраде, либо в форме набора скрепленных между тетрадных двойных листов, либо в форме скрепленных между собой листов в формате А4. Первый лист является титульным. На нем располагается следующая информация:

ФГБОУ ВО
«Самарский университет»

Кафедра «Физики»

Отчет №1

по решению практических задач
по теме «Электростатика»

Вариант (порядковый номер) 23

Задачи № 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3

Выполнил: обучающийся Иванов Игорь Николаевич, группа 1146

Проверил: доцент Петров Иван Игоревич

Со второй страницы отчета оформляется решение задач. Решения оформляется в по следующим правилам:

1. Каждая задача переписывается.
2. Оформляются исходные данные в форме «Дано» «Найти».
3. Делается рисунок, если он необходим для решения задачи. На рисунке обязательно изображается система координат и наносятся величины, которые необходимы для понимания и решения задачи.
4. Каждая величина, не указанная в условии задачи, но необходимая для ее решения поясняется. В этом пояснении должно быть указано – что обозначает эта величина.
5. Каждая формула обосновывается. Т.е. указывается физический закон, на основании которого написана эта формула, либо другая формула, из которой первая формула выведена.

6. Решение задачи должно быть подробным. Недопустима запись ответа без его вывода.

7. Ответ должен быть представлен в общем виде, т.е. в виде формулы, в которую входят величины, представленные в условии задачи. Недопустима подстановка численных значений величин до того как получен ответ в виде окончательной формулы.

Сформированный отчет по решению задач в рамках практических занятий в обучения сканируется или фотографируется, переводится в файл формата doc, docx, rtf или pdf и загружается на страницу курса в системе ЭИОС в соответствующую папку. Один отчет должен содержаться только в одном файле. Размер файла не должен превышать 5 мегабайт. Название файла должно содержать фамилию, группу и номер задания, например:

Иванов__1123_практика_задание_1.pdf

или

Иванов_1123_практика_задание_1.docx

Работы, загруженные с нарушение требований, указанных выше не рассматриваются.

После получения отчета преподаватель производит его проверку и выставляет оценку по 5-бальной системе и выставляет ее в электронный журнал. При правильном решении задачи, но при наличие нарушений, указанных в пунктах 1. – 7. оценка может быть снижена на количество баллов от 1 до 3 в зависимости от вида и числа нарушений.

Отметим, что объяснение к задаче – неотъемлемое требование по ее оформлению. Обучающийся должен написать - какое физическое явление происходит в данной задаче, что означает каждая новая буква в формулах, на основании чего он записал данную формулу (физический закон), пояснить - что изображено на рисунке, привести подробные выкладки при получении ответа в общем виде. Объяснения по задаче свидетельствуют о том, как обучающийся освоил решение той или иной задачу. При правильных формулах, но при наличии задач без объяснений преподаватель при оценке решения задачи может снять от 1 до 2 баллов.

При решении не всех задач баллы снимаются пропорционально нерешенным задачам.

Задачи домашнего задания 1.
Электростатика

Задачи домашнего задания 1

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3

Задача 1

1.1. Два одинаковых шарика массой m имеют одинаковые заряды q и подвешены на одинаковых нитях, верхние концы которых соединены вместе, при этом угол между нитями составляет $\alpha = 60^\circ$. На сколько нужно увеличить длину каждой нити при неизменных зарядах шариков, чтобы угол между нитями составил $\beta = 30^\circ$?

1.2 Два одинаковых шарика массой каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити равна l. После того как шарикам сообщили одинаковые заряды q, нити разошлись на угол α $(0 < \alpha < 90^\circ)$. Найти массы шариков.

1.3 Два одинаковых шарика массой m каждый подвешены на нитях одинаковой длины, верхние концы которых соединены вместе. После того как шарикам сообщили одинаковые заряды q, нити разошлись на угол α $(0 < \alpha < 90^\circ)$. Найти длину нитей.

1.4 Два одинаковых шарика массой m имеют одинаковые заряды и подвешены на нитях одинаковой длины l, верхние концы которых соединены вместе, при этом угол между нитями составляет угол $\alpha = 60^\circ$. На сколько нужно уменьшить заряд каждого шарика, чтобы угол между нитями составил $\beta = 45^\circ$?

1.5 Два одинаковых шарика массой m имеют одинаковые заряды и подвешены на нитях одинаковой длины l, верхние концы которых соединены вместе, при этом угол между нитями составляет угол $\alpha = 30^\circ$. На сколько нужно увеличить заряд каждого шарика, чтобы угол между нитями увеличился в 2 раза?

Задача 2

2.1 Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 1\ м$ друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от 1-го и 2-го зарядов соответственно на расстояниях $r_1 = 30\,см$ и $r_2 = 70\,см$. Сделать рисунок.

2.2 Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = 2 \cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 1\ м$ друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от 1-го и 2-го зарядов соответственно на расстояниях $r_1 = 130\,см$ и $r_2 = 30\,см$. Сделать рисунок.

2.3 Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = -3 \cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 1\ м$ друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от 1-го и 2-го зарядов соответственно на расстояниях $r_1 = 90\,см$ и $r_2 = 10\,см$. Сделать рисунок.

2.4 Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = 4 \cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 10\ см$ друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от 1-го и 2-го зарядов соответственно на расстояниях $r_1 = 8\,см$ и $r_2 = 6\,см$. Сделать рисунок.

2.5 Два точечных электрических заряда $q_1 = -10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = 3 \cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 50\ см$ друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от 1-го и 2-го зарядов соответственно на расстояниях $r_1 = 30\,см$ и $r_2 = 40\,см$. Сделать рисунок.

Задача 3

3.1 Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через точку, отстоящую от одного из его концов на расстояние $\frac{l}{3}$, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

3.2 Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через точку, отстоящую от одного из его концов на расстояние $\frac{l}{4}$, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

3.3 Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через точку, отстоящую от одного из его концов на расстояние $\frac{l}{5}$, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

3.4 Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через точку, отстоящую от одного из его концов на расстояние $\frac{l}{6}$, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

3.5 Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через один из его концов, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

Задача 4

4.1 По металлической сфере радиусом R равномерно распределен заряд q. Чему равна напряженность электрического поля вне сферы? Во сколько раз модуль напряженности электрического поля, создаваемого сферой, в точке, находящейся на расстоянии $2R$ от центра сферы будет больше напряженности поля в точке находящейся на расстоянии $3R$ от центра сферы? Сделать рисунок, изобразить направление векторов напряженностей поля.

4.2 Найти напряженность электрического поля, создаваемого двумя бесконечно протяженными, разноименно заряженными параллельными плоскостями с поверхностной плотностью заряда σ_1 и $-\sigma_2$ (где $\sigma_1 > \sigma_2$) между плоскостями и вне плоскостей. Сделать рисунок, изобразить направление векторов напряженностей поля.

4.3 Чему равна напряженность электрического поля вне равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра, радиусом R, если заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра равен τ? Во сколько раз модуль напряженности электрического поля, создаваемого цилиндром, в точке, находящейся на расстоянии $2R$ от оси цилиндра будет больше напряженности поля в точке находящейся на расстоянии $3R$ от оси цилиндра? Сделать рисунок, изобразить направление векторов напряженностей поля.

4.4 Чему равна напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара радиуса R, если заряд шара равен q? Во сколько раз модуль напряженности электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра шара будет больше напряженности поля в точке находящейся на расстоянии $\frac{R}{4}$ от центра шара? Сделать рисунок, изобразить направление векторов напряженностей поля.

4.5 Чему равна напряженность электрического поля вне равномерно заряженного шара радиуса R, если заряд шара равен q? Во сколько раз модуль напряженности электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $2R$ от центра шара будет больше напряженности поля в точке находящейся на расстоянии $4R$ от центра шара? Сделать рисунок, изобразить направление векторов напряженностей поля.

Задача 5

5.1 Тонкий прямой проводник, длиной l, имеет заряд q. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное $\frac{l}{4}$.

5.2 Тонкий прямой проводник, длиной l, имеет заряд q. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное $\frac{l}{5}$.

5.3 Тонкий прямой проводник, длиной l, имеет заряд q. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное $\frac{l}{6}$.

5.4 Тонкий прямой проводник, длиной l, имеет заряд q. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное $\frac{l}{2}$.

5.5 Тонкий прямой проводник, длиной l, имеет заряд q. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное $\frac{l}{3}$.

Задача 6

6.1 Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ. Найти потенциал поля, создаваемого кольцом, на оси кольца на расстоянии $2R$ от его центра.

6.2 Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ. Найти потенциал поля, создаваемого кольцом, на оси кольца на расстоянии $3R$ от его центра.

6.3 Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ. Найти потенциал поля, создаваемого кольцом, на оси кольца на расстоянии $4R$ от его центра.

6.4 Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ. Какую работу A надо совершить, чтобы перенести заряд Q из точки, расположенной в центре кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии R от центра кольца?

6.5 Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ. Какую работу A надо совершить, чтобы перенести заряд Q из центра кольца в бесконечно удаленную точку?

Задача 7

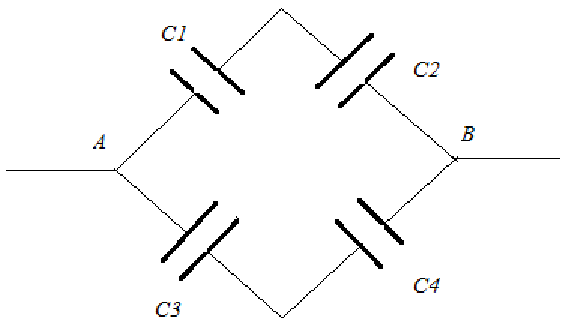
7.1 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$ и $C_4 = 4C$ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов на пластинах конденсатора C_1 равна U_1. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах других конденсаторов.

7.2 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C$, $C_2 = 3C$, $C_3 = 6C$ и $C_4 = 12C$ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов на пластинах конденсатора C_1 равна U_1. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах других конденсаторов.

7.3 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 2C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 4C$ и $C_4 = 8C$ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов на пластинах конденсатора C_2 равна U_2. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах других конденсаторов.

7.4 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C$, $C_2 = C$, $C_3 = 2C$ и $C_4 = 4C$ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов на пластинах конденсатора C_3 равна U_3. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах других конденсаторов.

7.5 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 2C$ и $C_4 = 4C$ соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов на пластинах конденсатора C_4 равна U_4. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах других конденсаторов.



Задача 8

8.1 Длинный металлический цилиндр радиусом R заряжен так, что на единицу длины цилиндра приходится заряд τ. Цилиндр окружен равномерно слоем парафина толщиной a. Определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.

8.2 Металлическая сфера радиусом R заряжена зарядом Q и окружена равномерно слоем полиэтилена толщиной a. Определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.

8.3 На большую металлическую пластину, заряженную с плотностью заряда σ, нанесен слой парафина толщиной a. Определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.

8.4 Металлический шар радиусом R окружен равномерно слоем полиэтилена толщиной a. Найти заряд шара, если известно, что на внешней поверхности диэлектрика поверхностную плотность связанных зарядов равна σ.

8.5 В центре парафинового шара радиусом R находится точечный заряд Q. Определить поверхностную плотность σ связанных зарядов на поверхности шара.

Задача 9

9.1 Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r. Расстояние между пластинами равно d. Конденсатор зарядили и отключили от источника тока. Затем, раздвигая пластины, увеличили расстояние между ними до $2d$, при этом была совершена работа A. До какой разности потенциалов был заряжен конденсатор до того как пластины раздвинули?

9.2 Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r. Расстояние между пластинами равно d. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до $2d$? Положительной или отрицательной будет эта работа?

9.3 Плоский воздушный конденсатор состоит из прямоугольных пластин со сторонами a и b. Расстояние между пластинами равно d. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до $3d$? Положительной или отрицательной будет эта работа?

9.4 Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r. Расстояние между пластинами равно d. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, приближая пластины друг к другу, уменьшить расстояние между ними до $\frac{d}{2}$? Положительной или отрицательной будет эта работа?

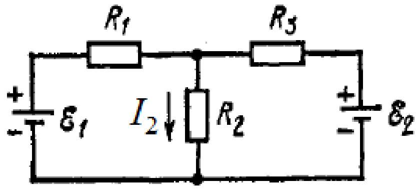
9.5 Плоский воздушный конденсатор состоит из прямоугольных пластин радиусом со сторонами a и b. Расстояние между пластинами равно d. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, приближая пластины друг к другу, уменьшить расстояние между ними до $\frac{d}{3}$? Положительной или отрицательной будет эта работа?

Домашнее задание 2.
Постоянный ток. Постоянное магнитное поле

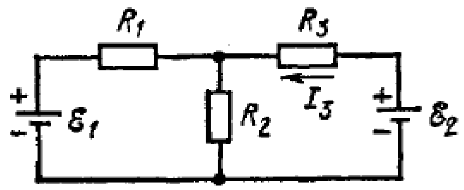
Задачи домашнего задания 2

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3

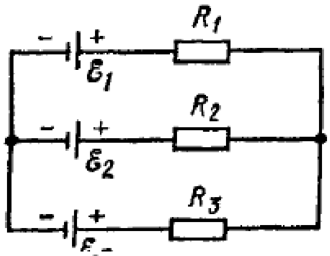
Задача 1



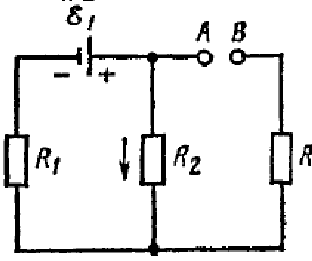
1.1 Дана электрическая цепь, изображенная на рисунке. Величины сопротивлений и ЭДС, обозначенные на рисунке считаются известными. Найти силу тока I_2, текущего через сопротивление R_2.



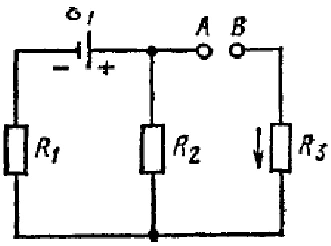
1.2 Дана электрическая цепь, изображенная на рисунке. Величины сопротивлений и ЭДС, обозначенные на рисунке считаются известными. Найти силу тока I_3, текущего через сопротивление R_3.



1.3 Дана электрическая цепь, изображенная на рисунке. Величины сопротивлений и ЭДС, обозначенные на рисунке считаются известными. Найти силу тока I_3, текущего через сопротивление R_3.



1.4 Дана электрическая цепь, изображенная на рисунке. Величины сопротивлений и ЭДС, обозначенные на рисунке считаются известными. Определить ЭДС источника тока, который надо включить в цепь между точками А и В, чтобы через сопротивление R_2 шел заданный ток I_2 в направлении, указанном стрелкой.



1.5 Дана электрическая цепь, изображенная на рисунке. Величины сопротивлений и ЭДС, обозначенные на рисунке считаются известными. Определить ЭДС источника тока, который надо включить в цепь между точками А и В, чтобы через сопротивление R_3 шел заданный ток I_3 в направлении, указанном стрелкой.

Задача 2

2.1 Лампочка и реостат, соединенные последовательно присоединены к источнику тока. Напряжение на зажимах лампочки равно U, сопротивление реостата равно R. Внешняя цепь потребляет мощность P. Найти силу тока I в цепи.

2.2 ЭДС батареи аккумуляторов равна ε, сила тока короткого замыкания равна $I_{кз}$. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

2.3 ЭДС батареи равна ε. Сопротивление внешней цепи равно R, сила тока I. Найти КПД батареи.

2.4 К батарее аккумуляторов, ЭДС которой равна ε и внутреннее сопротивление r, присоединен проводник. Определить сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна.

2.5 К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС батареи равна ε, внутреннее сопротивление равно r. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность P. Вычислить силу тока в цепи.

Задача 3

3.1 Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом равномерно убывает в течение времени Δt=20 с по линейному закону от I_0=5 А до I_1=0. Определить заряд, прошедший по проводнику за время $t_1 = 10$ с.

3.2 Разность потенциалов на концах проводника сопротивлением R=5 Ом возрастает равномерно от U_0=1 В до U =5 В в течение t=20с. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t_1 = 10$ с.

3.3 Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике с сопротивлением R=3 Ом при равномерном убывании напряжения на концах провода от U_0=5В до U =0 в течение t=10с.

3.4 Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом нарастает в течение времени Δt=2 с по линейному закону от I_0=0 до $I_{\max}$=6 А. Определить заряд, прошедший по проводу за время $t_1 = 1$ с.

3.5 Разность потенциалов на концах проводника сопротивлением R=10 Ом убывает равномерно от U_0=5 В до U =0 в течение t=10с. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t_1 = 5$ с.

Задача 4

4.1 По тонкому проводу, изогнутому в виде квадрата со строной a, течет ток I. Определить магнитную индукцию B в одной из вершин квадрата.

4.2 По тонкому проводу, изогнутому в виде квадрата со строной a, течет ток I. Определить магнитную индукцию B в середине одной из сторон квадрата.

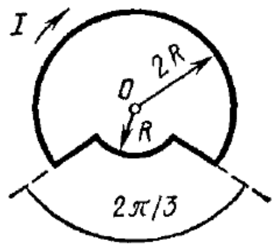
4.3 По тонкому проводу, изогнутому в виде квадрата со строной a, течет ток I. Определить магнитную индукцию B в центре пересечения диагоналей квадрата.

4.4 По тонкому проводу, изогнутому в виде равностороннего треугольника со стороной a течет ток I. Определить магнитную индукцию B в одной из вершин треугольника.

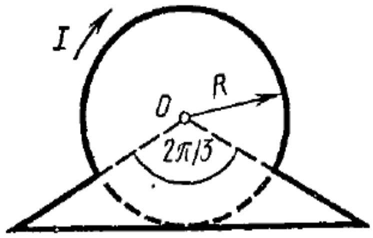
4.5 По тонкому проводу, изогнутому в виде равностороннего треугольника со стороной a течет ток I. Определить магнитную индукцию B в центре пересечения высот треугольника.

Задача 5

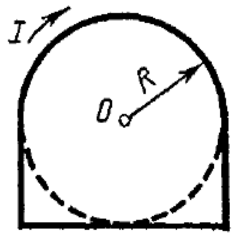
5.1 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура известен.



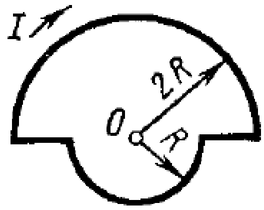
5.2 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура известен.



5.3 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура известен.



5.4 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура известен.

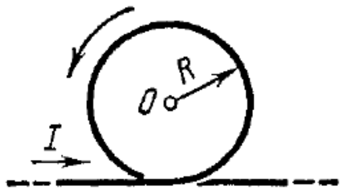


5.5 По плоскому контуру из тонкого провода течет ток I. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого

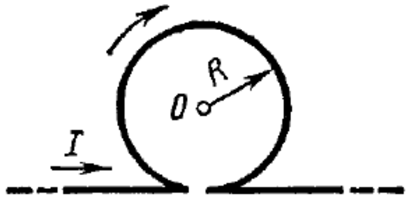
этим током в точке O, в случае, изображенном на рисунке. Радиус R изогнутой части контура известен.

Задача 6

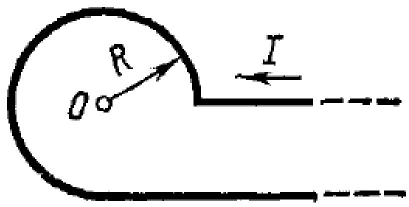
6.1 Бесконечно длинный тонкий проводник с током I имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.



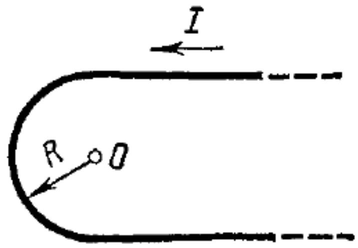
6.2 Бесконечно длинный тонкий проводник с током I имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.



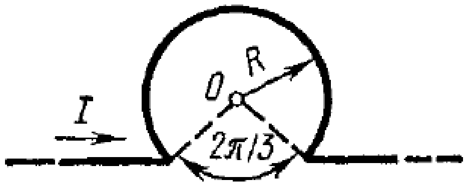
6.3 Бесконечно длинный тонкий проводник с током I имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.



6.4 Бесконечно длинный тонкий проводник с током I имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.

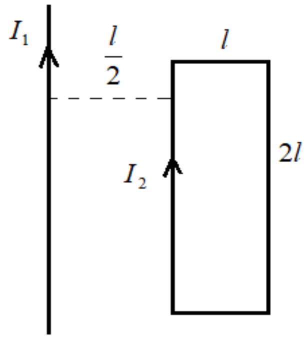


6.5 Бесконечно длинный тонкий проводник с током I имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током.

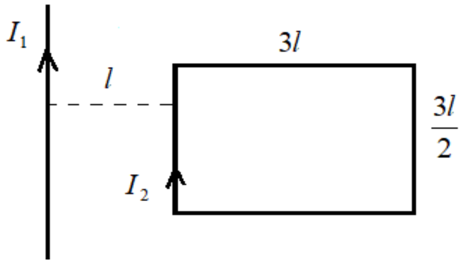


Задача 7

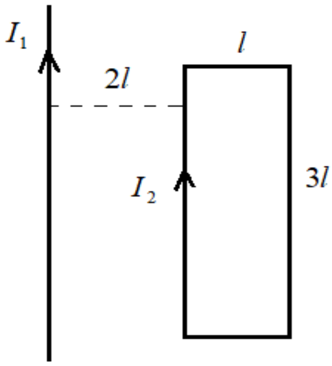
7.1 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток I_1, расположена квадратная рамка со сторонами l и $2l$, по которой течет ток I_2 (см. соответствующий рисунок). Расстояние между проводником и рамкой равно $\frac{l}{2}$. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Магнитная проницаемость среды равна μ .



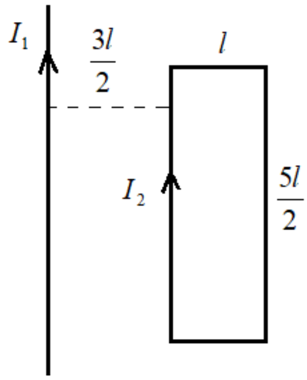
7.2 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток I_1, расположена квадратная рамка со сторонами $3l$ и $\frac{3l}{2}$, по которой течет ток I_2 (см. соответствующий рисунок). Расстояние между проводником и рамкой равно l. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Магнитная проницаемость среды равна μ.



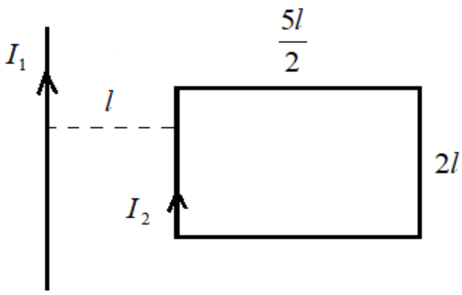
7.3 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток I_1, расположена квадратная рамка со сторонами l и $3l$, по которой течет ток I_2 (см. соответствующий рисунок). Расстояние между проводником и рамкой равно $2l$. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Магнитная проницаемость среды равна μ.



7.4 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток I_1, расположена квадратная рамка со сторонами l и $\frac{5l}{2}$, по которой течет ток I_2 (см. соответствующий рисунок). Расстояние между проводником и рамкой равно $\frac{3l}{2}$. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Магнитная проницаемость среды равна μ.

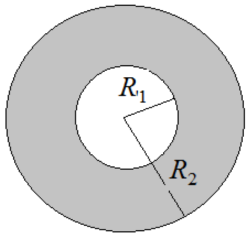


7.5 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток I_1, расположена квадратная рамка со сторонами $\frac{5l}{2}$ и $2l$, по которой течет ток I_2 (см. соответствующий рисунок). Расстояние между проводником и рамкой равно l. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Магнитная проницаемость среды равна μ.



Задача 8

8.1 Плоское кольцо с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Кольцо равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Найти магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого диском.



8.2 Тонкий стержень длиной l несет равномерно распределенный по его длине заряд Q. Стержень равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого стержнем.

8.3 Тонкий стержень длиной l несет равномерно распределенный по его длине заряд Q. Стержень равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Найти магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого стержнем.

8.4 Плоский диск радиусом R несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Диск равномерно вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Магнитный момент кругового тока, создаваемого диском, равен p_m. Найти угловую скорость вращения диска.

8.5 Тонкий стержень длиной l несет равномерно распределенный по его длине заряд Q. Стержень равномерно вращается относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, при этом магнитный момент кругового тока, создаваемого вращающимся стержнем, равен p_m. Найти угловую скорость вращения стержня.

Задача 9

9.1 Два иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса которого равна m_1, описал дугу окружности радиусом R_1. Найти радиус окружности R_2, которую описал второй ион, масса которого известна и равна m_2.

9.2 Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом R_1, второй ион начал двигться по окружности радиусом R_2. Найти отношение масс ионов, если они имели одинаковую скорость до того как влетели в магнитное поле.

9.3 Электрон и протон, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Электрон описал дугу окружности радиусом $R_{эл}$. Найти радиус окружности $R_{пр}$, которую описал протон.

9.4 Протон, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов U_1, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу окружности радиусом R_1. Найти радиус окружности R_2, дуги которую опишет другой протон, если он влетит в это же магнитном поле перпендикулярно линиям индукции и если он перед этим пройдет другую ускоряющую разность потенциалов, равную U_2.

9.5 Протон , пройдя ускоряющую разность потенциалов U_1, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу окружности радиусом R_1. В это же магнитное поле перпендикулярно линиям индукции влетел другой протон и описал дугу окружности радиуса R_2. Найти ускоряющую разность потенциалов U_2, которую прошел второй протон перед тем как влететь в магнитное поле.

Домашнее задание 3.
Электродинамика. Электрические колебания

Задачи домашнего задания 3

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5

Задача 1

1.1 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно с угловой скоростью ω вращается прямоугольная рамка со сторонами a и b относительно оси, проходящей через сторону длиной a. Рамка содержит N витков тонкого провода. Направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно оси вращения рамки. Найти значение ЭДС в рамке в момент времени, в который угол ее поворота (угол между вектором магнитной индукции и вектором нормали к плоскости рамки) равен α.

1.2 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно с угловой скоростью ω вращается рамка в форме кольца радиуса R, изготовленного из одного витка тонкого провода, относительно оси, проходящей через центр кольца и лежащей в плоскости рамки. Направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно оси вращения рамки. Найти значение ЭДС в рамке в момент времени, в который угол ее поворота (угол между вектором магнитной индукции и вектором нормали к плоскости рамки) равен α.

1.3 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно вращается прямоугольная рамка со сторонами a и b относительно оси, проходящей через сторону длиной b. Рамка содержит N витков тонкого провода. Направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно оси вращения рамки. Найти угловую скорость ω вращения рамки, если известно, что максимальное значение ЭДС в рамке в процессе ее вращения равно $\varepsilon_{\max}$.

1.4 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно с угловой скоростью ω вращается рамка в форме квадрата со стороной a, изготовленного из одного витка тонкого провода, относительно оси, проходящей через одну из сторон рамки. Направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно оси вращения рамки. Найти значение ЭДС в рамке в момент времени, в который угол ее поворота (угол между вектором магнитной индукции и вектором нормали к плоскости рамки) равен α.

1.5 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно вращается рамка в форме кольца радиуса R, изготовленного из одного витка тонкого провода, относительно оси, проходящей через центр кольца и лежащей в плоскости рамки. Направление вектора $\vec{B}$ перпендикулярно оси вращения рамки. Найти угловую скорость ω вращения рамки, если известно, что максимальное значение ЭДС в рамке в процессе ее вращения равно $\varepsilon_{\max}$.

Задача 2

2.1 Длинный соленоид диаметра D и длины l состоит из N витков тонкого провода. Сопротивление обмотки соленоида равно R. По соленоиду течет ток. При замыкании концов обмотки накоротко по ней прошел заряд, равный Q. Найти силу тока, текущего через соленоид до замыкания его обмотки.

2.2 Длинный соленоид диаметра D и длины l состоит из N витков тонкого провода. Сопротивление обмотки соленоида равно R. По соленоиду течет ток I. Определить количество электричества Q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко.

2.3 Длинный соленоид диаметра D и длины l состоит из N витков тонкого медного провода. По соленоиду течет ток. При замыкании концов обмотки накоротко по ней прошел заряд, равный Q. Найти силу тока, текущего через соленоид до замыкания его обмотки.

2.4 Длинный соленоид имеет диаметр D и длину l. Сопротивление обмотки соленоида равно R. По соленоиду течет ток I При замыкании концов обмотки накоротко по ней прошел заряд, равный Q. Найти число витков N обмотки соленоида.

2.5 Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d. Диаметр соленоида равен $D>>d$. По соленоиду течет ток. При замыкании концов обмотки накоротко по ней прошел заряд, равный Q. Найти силу тока, текущего через соленоид до замыкания его обмотки.

Задача 3

3.1 Электрическая цепь содержит катушку индуктивности L с сопротивлением R, замкнутую на источник ЭДС ε и внутренним сопротивлением r. Источник ЭДС можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через какое время после отключения источника ЭДС сила тока в катушке станет равным половине его значения до отключения источника ЭДС?

3.2 Электрическая цепь содержит катушку индуктивности L с сопротивлением R, замкнутую на источник ЭДС. В цепи идет ток I_0. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока I в этой цепи через время t после отключения ее от источника тока.

3.3 Электрическая цепь содержит катушку индуктивности L с сопротивлением R, замкнутую на источник ЭДС. В цепи идет ток I_0. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через какое время после отключения источника ЭДС сила тока в катушке станет равным $\frac{1}{3}I_0$?

3.4 Электрическая цепь содержит катушку индуктивности L с сопротивлением R, замкнутую на источник ЭДС ε и внутренним сопротивлением r. Источник ЭДС можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через какое время после отключения источника ЭДС сила тока в катушке уменьшится в 5 раз по сравнению с его значением до отключения источника ЭДС?

3.5 Электрическая цепь содержит катушку индуктивности L с сопротивлением R, замкнутую на источник ЭДС ε и внутренним сопротивлением r. Источник ЭДС можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через какое время после отключения источника ЭДС сила тока в катушке уменьшится в 10 раз по сравнению с его значением до отключения источника ЭДС?

Задача 4

4.1 К источнику тока с внутренним сопротивлением r подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время через которое ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 2 раза меньшего максимального значения тока.

4.2 К источнику тока с внутренним сопротивлением r подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время через которое ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 3 раза меньшего максимального значения тока.

4.3 К источнику тока с внутренним сопротивлением r подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время через которое ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 4 раза меньшего максимального значения тока.

4.4 К источнику тока с внутренним сопротивлением r подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время через которое ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 5 раз меньшего максимального значения тока.

4.5 К источнику тока с внутренним сопротивлением r подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время через которое ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 6 раз меньшего максимального значения тока.

Задача 5

5.1 Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

5.2 Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

5.3 Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

5.4 Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

5.5 Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \pi$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

Задача 6

6.1 Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Сопротивление контура ничтожно мало. Катушка имеет индуктивность L. Найти электроемкость конденсатора, если известны максимальная сила тока в катушке $I_{\max}$ и максимальное напряжение на обкладках конденсатора $U_{\max}$.

6.2 Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Сопротивление контура ничтожно мало. Конденсатор имеет электроемкость C. Найти индуктивность катушки, если известны максимальная сила тока в катушке $I_{\max}$ и максимальное напряжение на обкладках конденсатора $U_{\max}$.

6.3 Колебательный контур имеет индуктивность L и электроемкость C. Сопротивление контура ничтожно мало. В начальный момент напряжение на обкладках конденсатора было максимальным и равным равно $U_{\max}$. Через какое время напряжение на обкладках конденсатора станет равным $\frac{U_{\max}}{2}$? Чему в этот момент времени будет равна сила тока в катушке?

6.4 Колебательный контур имеет индуктивность L и электроемкость C. Сопротивление контура ничтожно мало. В начальный момент сила тока в катушке была максимальной и равной $I_{\max}$. Через какое время сила тока в катушке станет равным $\frac{I_{\max}}{2}$? Чему в этот момент времени будет равно напряжение на конденсаторе?

6.5 Колебательный контур имеет индуктивность L и электроемкость C. Максимальная сила тока напряжение в катушке равна $I_{\max}$. Определить максимальное напряжение на обкладках конденсатора. Сопротивление контура ничтожно мало.

Задача 7

7.1 Колебательный контур имеет катушку индуктивности L и сопротивлением R и конденсатор некоторой емкости. Во сколько раз спустя время Δt после начала колебаний уменьшится энергия колебательного контура? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

7.2 Колебательный контур имеет катушку индуктивности L и конденсатор некоторой емкости. Найти чему равно сопротивление катушки, если известно время Δt, за которое после начала колебаний энергия колебательного контура уменьшилась в 2 раза? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

7.3 Колебательный контур имеет катушку индуктивности, сопротивление обмотки которой равно R и конденсатор некоторой емкости. Найти чему равна индуктивность катушки, если известно время Δt, за которое после начала колебаний энергия колебательного контура уменьшилась в 4 раза? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

7.4 Колебательный контур имеет катушку индуктивности L и конденсатор некоторой емкости. Найти чему равно сопротивление катушки, если известно время Δt, за которое после начала колебаний энергия колебательного контура уменьшилась в 4 раза? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

7.5 Колебательный контур имеет катушку индуктивности, сопротивление обмотки которой равно R и конденсатор некоторой емкости. Найти чему равна индуктивность катушки, если известно время Δt, за которое после начала колебаний энергия колебательного контура уменьшилась в 2 раза? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

Домашнее задание 4.
Оптика. Квантовая физика

Задачи домашнего задания 4.

Последняя цифра порядкового номера обучающегося	Задача										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1	10.1	11.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2	10.2	11.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3	9.3	10.3	11.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4	7.4	8.4	9.4	10.4	11.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
6	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.3	9.2	10.5	11.4
7	1.2	2.3	3.4	4.5	5.1	6.4	7.3	8.2	9.1	10.4	11.5
8	1.3	2.4	3.5	4.1	5.2	6.3	7.2	8.1	9.5	10.3	11.2
9	1.4	2.5	3.1	4.2	5.3	6.2	7.1	8.5	9.4	10.2	11.1
0	1.5	2.1	3.2	4.3	5.4	6.1	7.5	8.4	9.3	10.1	11.3

Задача 1

1.1 На грань стеклянной призмы с преломляющим углом θ падает луч света под углом ε. Найти угол преломления ε_1' луча при выходе из призмы.

1.2 Преломляющий угол стеклянной призмы равен θ. Луч света падает на грань призмы перпендикулярно ее поверхности и выходит в воздух из другой грани, отклоняясь на угол σ от первоначального направления. Определить показатель преломления n стекла.

1.3 Луч света падает на грань стеклянной призмы перпендикулярно ее поверхности и выходит из противоположной грани, отклонившись на угол σ от первоначального направления. Определить преломляющий угол θ призмы.

1.4 На грань стеклянной призмы падает луч света под углом ε. Найти преломляющий угол призмы θ, если угол преломления луча при выходе из призмы равен ε_1'.

1.5 Под каким углом ε луч света падает на грань стеклянной призмы, если преломляющий угол призмы равен θ, а угол преломления луча при выходе из призмы равен ε_1'?

Задача 2

2.1 Фокусное расстояние собирающей линзы равно f. Линза расположена между фиксированными точечным источником света и экраном и дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми равно l. Найти расстояние L между источником и экраном.

2.2 Расстояние между точечным источником света и экраном равно L. Собирающая линза с фокусным расстоянием f, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях. Найти расстояние между положениями линзы, в которых она дает четкое изображение источника на экране.

2.3 Оптическая система состоит из двух линз: рассеивающей собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 30\,\text{см}$ и собирающей с фокусным расстоянием $F_2 = 20\,\text{см}$. Линзы расположены на расстоянии $d = 10\,\text{см}$ друг от друга. Точечный источник находится на расстоянии $a = 40\,\text{см}$ от рассеивающей линзы. На каком расстоянии от собирающей линзы находится изображение, даваемое системой двух линз?

2.4 Оптическая система состоит из двух собирающих линз: первая с фокусным расстоянием $F_1 = 20\,\text{см}$ и вторая с фокусным расстоянием $F_2 = 15\,\text{см}$. Линзы расположены на расстоянии $d = 5\,\text{см}$ друг от друга. Точечный источник находится на расстоянии $a = 30\,\text{см}$ от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы находится изображение, даваемое системой двух линз?

2.5 Точечный источник света находится на главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F =15 см на расстоянии L =30 см от нее. Диаметр линзы d=5 см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен экран, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром D = 20 см?

Задача 3

3.1 На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны λ. В возникшей при этом интерференционной картине на отрезке длиной l наблюдается k полос. Определить преломляющий угол θ клина.

3.2 Поверхности стеклянного клина образуют между собой маленький угол θ. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны λ. Определить ширину b интерференционной полосы.

3.3 На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет с диной волны λ. Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние между соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно b.

3.4 Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками положили очень тонкую проволочку, расположенную параллельно линии соприкосновения пластинок и находящуюся на расстоянии l от нее. В отраженном свете с длиной волны λ на верхней пластинке видны интерференционные полосы. Определить диаметр d поперечного сечения проволочки, если на протяжении a насчитывается k светлых полос.

3.5 Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены одна к другой так, что между ними образовался воздушный клин с маленьким углом θ. На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет света с длиной волны λ. На каком расстоянии l от линии соприкосновения пластинок будет наблюдаться в отраженном свете первая светлая полоса (интерференционный максимум)?

Задача 4

4.1 Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом кривизны R, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус m-го светлого кольца, наблюдаемого в проходящем свете длиной волны λ при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

4.2 Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности R прижата к стеклянной пластинке. Вывести формулу для радиуса $m-$го светлого кольца Ньютона в отраженном свете при нормальном падении света с длиной волны λ.

4.3 Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности R прижата к стеклянной пластинке. Вывести формулу для радиуса $m-$го светлого кольца Ньютона в проходящем свете при нормальном падении света с длиной волны λ.

4.4 Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух плосковыпуклых линз радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус m-го светлого кольца, наблюдаемого в проходящем свете длиной волны λ при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

4.5 Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух плосковыпуклых линз радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус m-го светлого кольца, наблюдаемого в отраженном свете длиной волны λ при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

Задача 5

5.1 Плоская световая волна (λ=0,4 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром d=1 см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало 3 зоны Френеля?

5.2 Плоская световая волна (λ=0,5 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром d=3 см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало 4 зоны Френеля?

5.3 Плоская световая волна (λ=0,6 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром d=2 см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало 2 зоны Френеля?

5.4 Плоская световая волна (λ=0,4 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром d=2 см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало 4 зоны Френеля?

5.5 Плоская световая волна (λ=0,6 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром d=1 см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало 2 зоны Френеля?

Задача 6

6.1 На щель шириной b падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Вблизи щели находится собирающая линза. За линзой в фокальной плоскости линзы расположен экран. Расстояние между первыми дифракционными минимумами на экране, расположенными слева и справа от центрального максимума равно L. Найти расстояние между щелью и экраном.

6.2 На щель шириной b падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Вблизи щели находится собирающая линза. Экран, удалённый от щели на расстояние l находится в фокальной плоскости линзы. Найти расстояние между первыми дифракционными минимумами на экране, расположенными слева и справа от центрального максимума.

6.3 На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Вблизи щели находится собирающая линза. Экран, удалённый от щели на расстояние l находится в фокальной плоскости линзы. Расстояние между первыми дифракционными минимумами на экране, расположенными слева и справа от центрального максимума равно L. Найти ширину щели.

6.4 На узкую щель шириной a падает нормально монохроматический свет. Угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на вторую темную дифракционную полосу равен φ. Определить длину волны падающего света.

6.5 На узкую щель падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ. Угол отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен φ. Определить ширину щели.

Задача 7

7.1 На дифракционную решетку, содержащую n на единицу длины, падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ. Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка.

7.2 На дифракционную решетку, содержащую n на единицу длины, падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ. Найти угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

7.3 Сколько штрихов на единицу длины содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете с длиной волны λ максимум четвертого порядка отклонен на угол φ?

7.4 На дифракционную решетку, содержащую n штрихов на единицу длины падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум 2-го порядка. Чтобы навести трубу на соседний максимум 3-го порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi$. Определить длину волны света. При решении задачи считать, что $n\lambda \ll 1$.

7.5 Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум первого порядка отклонен на угол φ_1. На какой угол φ_2 отклонен максимум второго порядка?

Задача 8

8.1 На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого равна $P = 0.5$, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 60^\circ$?

8.2 На анализатор падает пучок частично-поляризованного света. При некотором положении анализатора интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол $\alpha = 60^\circ$, интенсивность света возросла в $k = 2$ раза. Определить степень поляризации P света.

8.3 На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого равна $P = 0.3$, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 45^\circ$?

8.4 На поляризатор падает пучок частично-поляризованного света. При некотором положении поляризатора интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания поляризатора повернули на угол $\alpha = 30^\circ$, интенсивность света возросла в $k = 1.5$ раза. Определить степень поляризации P света.

8.5 На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого равна $P = 0.8$, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 30^\circ$?

Задача 9

9.1 Максимум спектральной плотности энергетической светимости некоторой гипотетической звезды радиуса $R_{зв}$ соответствует длине волны λ. Принимая данную звезду за черное тело, определить поток энергии, излучаемый звездой.

9.2 Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров. Стенки полостей теплонепроницаемы. Отверстия расположены друг против друга, расстояние между ними $l = 10$ см. В первой полости поддерживается температура $T_1 = 2000K$, при этом установившаяся температура второй полости равна $T_2 = 1000K$. Найти диаметры полостей.

9.3 Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров, равных $d = 1\,\text{см}$. Стенки полостей теплонепроницаемы. Отверстия расположены друг против друга на некотором расстоянии. В первой полости поддерживается температура $T_1 = 2000K$, при этом установившаяся температура второй полости равна $T_2 = 1000K$. Найти расстояние между полостями.

9.4 При некоторой температуре максимум энергии излучения абсолютно черного тела приходился на длину волны λ_1. При повышении температуры этот максимум стал приходится на длину волны λ_2. Как и во сколько раз при этом изменилась мощность излучения чёрного тела?

9.5 При некоторой температуре максимум энергии излучения абсолютно черного тела приходился на длину волны λ_1. При понижении температуры этот максимум стал приходится на длину волны λ_2. Как и во сколько раз при этом изменилась мощность излучения чёрного тела?

Задача 10

10.1 Красной границе фотоэффекта для некоторого вещества соответствует длина волны $\lambda_к$. Найти задерживающий потенциал при длине световой волны λ ($\lambda < \lambda_з$).

10.2 Красной границе фотоэффекта для некоторого вещества соответствует длина волны $\lambda_к$. Найти длину световой волны λ, при которой задерживающий потенциал равен $U_з$.

10.3 Плоская световая волна падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения ρ под углом падения α, при этом давление, которое оказывает свет на эту поверхность равно p. Найти интенсивность падающей световой волны.

10.4 Плоская световая волна интенсивности I падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения ρ, при этом давление, которое оказывает свет на эту поверхность равно p. Чему равен угол падения света?

10.5 Плоская световая волна интенсивности I падает на плоскую зеркальную поверхность под углом падения α, при этом давление, которое оказывает свет на эту поверхность равно p. Найти коэффициент отражения света от данной поверхности.

Задача 11

11.1 Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin\left(\dfrac{6\pi}{l} x\right), 0 \le x \le l \\ 0,\ x < 0,\ x > l \end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в первой четверти ямы?

11.2 Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin\left(\dfrac{5\pi}{l} x\right), 0 \le x \le l \\ 0,\ x < 0,\ x > l \end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в средней четверти ямы?

11.3 Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{4\pi}{l}x\right), 0\le x\le l\\ 0,\ x<0,\ x>l\end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в последней трети ямы?

11.4 Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{3\pi}{l}x\right), 0\le x\le l\\ 0,\ x<0,\ x>l\end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в первой трети ямы?

11.5 Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{l}x\right), 0\le x\le l\\ 0,\ x<0,\ x>l\end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в средней трети ямы?

Примеры решения и оформления некоторых типовых задач

Задачи домашнего задания 1.
Электростатика

Задача 1. Два одинаковых шарика массой m каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити равна l. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол α ($0<\alpha<90^{\circ}$)?

Дано: $m_1=m_2=m;\ l;\ \alpha.$

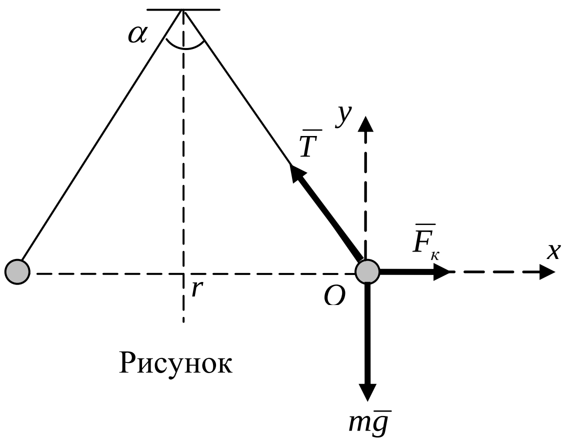
Найти: $q_1=q_2=q.$

Решение

Условие равновесия шариков означает, что сумма всех сил, действующих на шарик равна нулю. Это условие запишем в виде:

$$m\vec{g} + \vec{F}_к + \vec{T} = 0,$$

где $\vec{F}_к$ – кулоновская сила, $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $m\vec{g}$ - сила тяжести. В проекциях на оси Ox и Oy это условие примет вид:



Рисунок

$$OX:\ F_к - T\sin\frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$OY:\ -mg + T\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Выражаем из первого уравнения T

$$T = \frac{F_к}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и подставляем во второе уравнение:

$$-mg + \frac{F_к}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

или

$$-mg + F_к \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

Поскольку $F_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$, то подставляя в последнее уравнение, получаем

$$-mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

Находим из рисунка $r = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Подставляем

$$-mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

Отсюда находим искомый заряд

$$q^2 = 16\pi\varepsilon_0 l^2 mg\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$q = 4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $q = 4l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 2. Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}\,Кл$ и $q_2 = -2\cdot 10^{-9}\,Кл$ находятся в воздухе на расстоянии d=10 *см* друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке, находящейся от зарядов на расстояниях $r_1 = 9\,см$ и $r_2 = 7\,см$.

Дано: $q_1 = 10^{-9}\,Кл$; $q_2 = -2\cdot 10^{-9}\,Кл$; $d = 10\,см$; $r_1 = 9\,см$; $r_2 = 7\,см$.

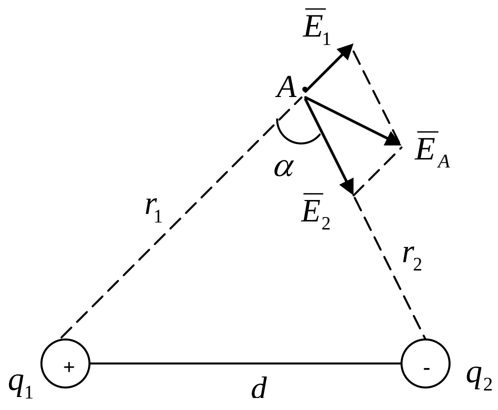
Найти: E_A, φ_A.

Решение

Напряженность результирующего поля в точке *A* равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2, т.е.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

На рисунке вектор $\vec{E}_1$ направлен от заряда q_1, так как этот заряд положительный, вектор $\vec{E}_2$ направлен в сторону заряда q_2, так как этот заряд отрицательный. Вектор $\vec{E}_A$ напряженности результирующего поля определяется как геометрическая сумма $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Модуль этого вектора найдем по теореме косинусов



Рисунок

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2},\; E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2},\; \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Или

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}}$$

Подставляя исходные числовые данные в указанные формулы, получим $E_A = 3{,}58\cdot 10^3\,В/м$.

Потенциал φ_A результирующего поля, созданного двумя зарядами q_1 и q_2, равен алгебраической сумме потенциалов:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1},\; \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}.$$

Подставляя, получаем:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right),$$

Потенциал φ_1 является положительным, так как поле создано положительным зарядом q_1; потенциал φ_2 является отрицательным, так как поле создано отрицательным зарядом q_2. Подставляя числовые данные, получим:

$$\varphi_A = 100 - 257 = -157\,B.$$

$$Ответ:\ E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2}\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}}$$

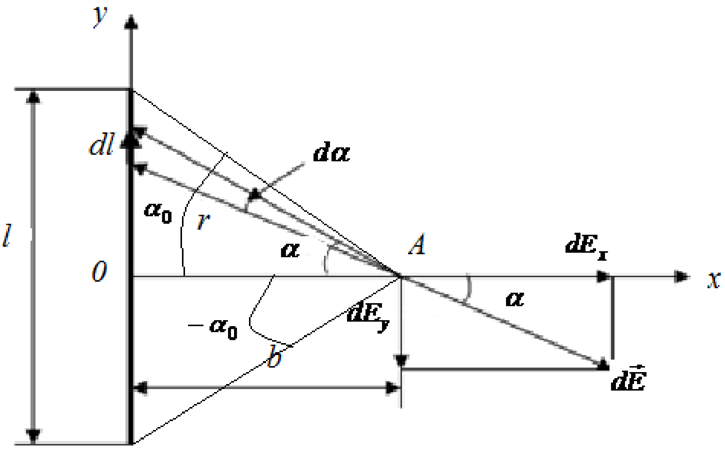
$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$E_A = 3{,}58\,кВ/м,\quad \varphi_A = -157\,B.$$

Задача 3. Определить модуль напряжённости поля, создаваемого тонким заряженным стержнем длиной l с линейной плотностью заряда τ, в точке A, лежащей на перпендикуляре, проведенном к стержню через его середину, так что расстояние между точкой A и стержнем равно b.

Решение

Разобьем стержень на бесконечно малые элементы $dl = dy$, y – координата данного элемента. Заряд элемента равен $dq = \tau dy$, элемент можно считать точечным зарядом. Напряженность поля, созданного зарядом dq в точке A на расстоянии r от заряда, равна:



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dy}{r^2}$$

$$r = \frac{b}{\cos\alpha}$$

α – угол между перпендикуляром к стержню и радиус-вектором r элемента стержня, проведенным из точки А. Направление вектора напряженности. Так как

$$y = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

то

$$\frac{dy}{d\alpha} = b\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Отсюда выразим dy

$$dy = \frac{b}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Теперь найдем dE

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}dy\frac{1}{b^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}b\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{b^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b} \qquad (1)$$

Найдем проекции вектора $d\vec{E}$ на координатные оси:

$$dE_x = dE\cos\alpha,\quad dE_y = dE\sin\alpha$$

Проекции полной напряженности на оси рассчитываются интегрированием:

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\alpha\,, \quad E_y = \int dE_y = \int dE\sin\alpha \qquad (2)$$

причем интегрирование производится по всей длине стержня. Здесь использован принцип суперпозиции в проекциях на оси. Полная напряженность вычисляется по теореме Пифагора:

$$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2} \qquad (3)$$

Чтобы подсчитать E_x и E_y надо взять интегралы:

$$E_x = \int dE\cos\alpha = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\cos\alpha$$

$$E_y = \int dE\sin\alpha = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\sin\alpha$$

Здесь угол α изменяется от $-\alpha_0$ до α_0, где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{l}{2b}$$

С учетом (1) и (2) получим:

$$E_x = \int dE\cos\alpha = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\cos\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\sin\alpha_0 - \left(-\sin\alpha_0\right)\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\sin\alpha_0$$

$$E_y = \int dE\sin\alpha = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\alpha}{b}\sin\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha\sin\alpha =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(-\cos\alpha_0 - \left(-\cos\alpha_0\right)\right) = 0$$

Окончательно получаем для напряженности:

$$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2} = \left|E_x\right| = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2b}\right)\right)$$

Воспользуемся формулой

$$\sin\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Тогда получаем

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b}\frac{\left(\frac{l}{2b}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2b}\right)^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{l}{\sqrt{b^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

Ответ: $E = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{l}{\sqrt{b^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2}}$

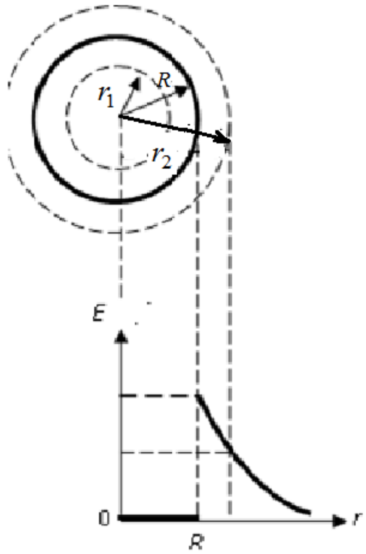
Задача 4. По металлической сфере радиусом R равномерно распределен заряд q. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r<R$ от центра сферы; 2) на расстоянии $r \geq R$ от центра сферы.

Дано: R, q, r.

Найти: $E(r)$

Решение

Согласно теореме Гаусса $\oint\limits_S E_n dS = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.



Найдем напряженность электрического поля внутри сферы. Построим концентрическую сферу радиусом $r = r_1 < R$. Заряд внутри этой сферы равен нулю. Тогда по теореме Гаусса поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен 0. С другой стороны этот поток равен $\oint\limits_S E_n dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r_1^2$. Приравнивая это выражение к нулю, получаем $\vec{E} = 0$.

Найдем напряженность электрического поля вне сферы. Построим концентрическую сферу радиусом $r = r_2 \geq R$. Заряд внутри этой сферы равен q. Гаусса поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$. С другой стороны этот поток равен $\oint\limits_S E_n dS = E \cdot 4\pi r_2^2$. Обозначим r_2 через r.

Приравнивая, получаем $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, откуда $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Ответ: $E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}$

Задача 5. Найти напряженность электрического поля между двумя бесконечно протяженными, разноименно заряженными параллельными плоскостями с поверхностной плотностью заряда σ и $-\sigma$.

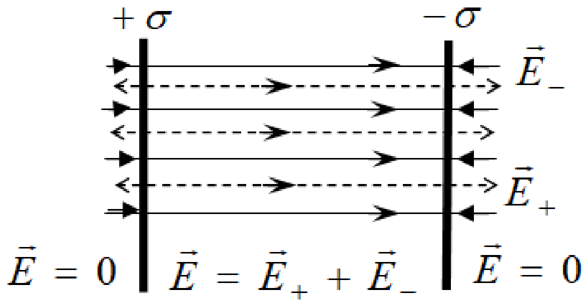
Дано: σ

Найти: E

Решение

Рассмотрим две параллельные заряженные плоскости (рисунок ниже). Пусть σ и $-\sigma$ - поверхностные плотности зарядов каждой из плоскостей (плоскости заряжены одинаковым по величине и противоположным по знаку зарядом). Каждая из плоскостей создает около себя электрическое поле, модуль напряженности которого равен

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Вне внутреннего промежутка, $\vec{E} = 0$ т. к. поля, созданные разноименно заряженными параллельными пластинами, направлены противоположно друг другу.

Между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Ответ: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

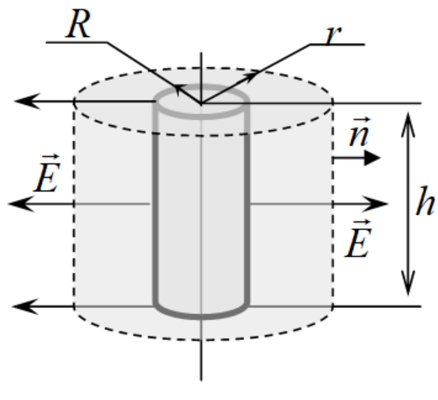
Задача 6. Найти напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра, радиусом R, если заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра равен τ

Дано: R, τ

Найти: E

Решение

Заряженный цилиндр радиуса R, (см. рисунок), окружим коаксиальной цилиндрической поверхностью радиуса r; поток $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ вектора $\vec{E}$ через основания равен нулю, т. к. $\vec{E} \perp \vec{n}_{осн}$, где $\vec{n}_{осн}$ – внешняя нормаль к основаниям цилиндра; поток через боковую поверхность $\Phi_E = E \cdot S_{БОК} = E2\pi rh$, здесь h – высота цилиндра. Согласно теореме Гаусса, при $r \geq R$ имеем $E2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$;



$$E = \frac{1}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{q}{h} = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0},$$

где $\tau = q/h$ — линейная (погонная) плотность заряда, которая измеряется в *Кл/м.*

Когда $r < R$, то $E = 0$.

Ответ: при $r \geq R$ $E = \frac{1}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{q}{h} = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0}$*, при* $r < R$ $E = 0$.

Задача 7. Найти напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного шара радиуса R, если заряд шара равен q.

Дано: R, q

Найти: E

Решение

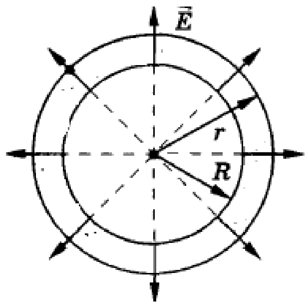
Сделаем рисунок.

Поскольку шар равномерно заряжен по объему, то на единицу его объема приходится заряд, равный

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Эта величина называется объемной плотностью заряда.

Сначала найдем напряженность электрического поля вне шара.

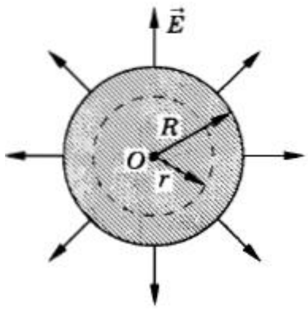


Построим концентрическую сферу радиусом $r \geq R$. Заряд внутри этой сферы равен заряду шара q. Поток вектора напряженности вектора $\vec{E}$ через эту сферу равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$ согласно теореме Гаусса. С другой стороны этот поток равен $\oint_S E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$.

Приравнивая, получаем $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Найдем напряженность электрического поля внутри шара.



Выберем внутри шара концентрическую сферу радиуса $r < R$ и подсчитаем заряд, содержащийся внутри этой сферы. Этот заряд будет равен

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$$

Тогда по теореме Гаусса поток через эту сферу равен

$$\Phi_E = q\frac{r^3}{R^3}$$

Величина Φ_E считается также как и для заряженной сферы

$$\Phi_E = E 4\pi r^2$$

Приравнивая правые части двух последних формул, получаем:

$$q\frac{r^3}{R^3} = E 4\pi r^2,$$

откуда

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Ответ: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, *если* $r \ge R$ *и* $E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, *если* $r \le R$.

Задача 8.

На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца проводника на расстояние, равное длине этого проводника.

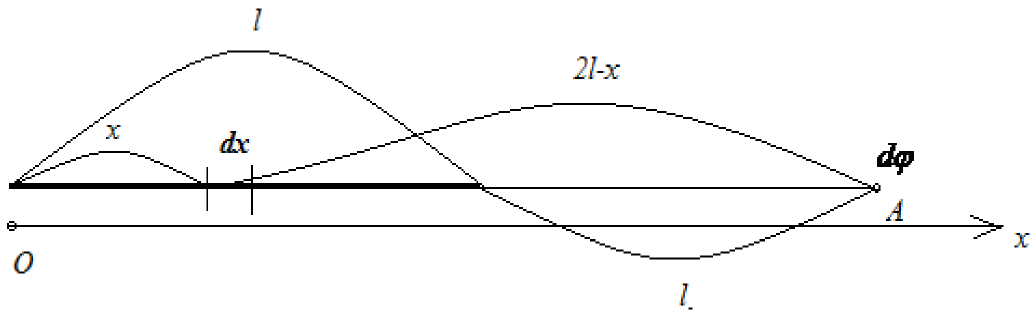
Дано: τ

Найти: φ

Решение

Сделаем рисунок. Пусть длина стержня равна l. Выберем координатную ось Ox, начало которой совпадает с началом стержня. Обозначим через А точку, в которой нам нужно найти потенциал. Выберем на стержне бесконечно малый участок длиной dx.

Пусть x - расстояние от начала координат до участка. Обозначим все расстояния на рисунке. Будем



считать участок длины dx точечным зарядом. Вычислим потенциал $d\varphi$, создаваемый эти участком в точке. Поскольку заряд этого участка есть $dq = \tau dx$, то согласно формуле для потенциала точечного заряда, потенциал поля в точке *A*, создаваемого этим участком, равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{2l-x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{2l-x}$$

Чтобы найти потенциал от всего стержня нужно просуммировать потенциалы, создаваемые всеми участками стержня, или, что то же самое, взять интеграл:

$$\varphi = \int\limits_{\text{по всем участкам}} d\varphi$$

Подставляя в интеграл формулу для $d\varphi$ и выбирая переменную интегрирования x, которая меняется от 0 до *l*, мы получаем

$$\varphi = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{2l-x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx}{2l-x}$$

Поскольку $\int_0^l \dfrac{dx}{2l-x} = -\ln(2l-x)\Big|_0^l = -\ln(l) + \ln(2l) = \ln 2|$, то получаем ответ:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

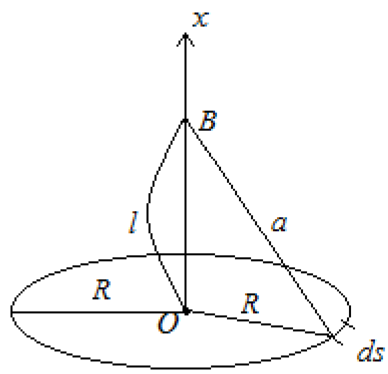
Задача 9.

Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом *R*. Он заряжен с линейной плотностью τ. Какую работу *A* надо совершить, чтобы перенести заряд *Q* из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии *l* от центра его?

Дано: R, τ, Q, l

Найти: A

Решение



Сделаем рисунок. Центр кольца обозначим через *O*, а точку, в которую переносят заряд – через *B*. Работа будет равна разности потенциалов в точках *B* и *O*, умноженной на заряд *Q*:

$$A = (\varphi_O - \varphi_B)Q.$$

Найдем φ_O и φ_B.

Разобьем кольцо на бесконечно малые участки, длиной ds и будем считать каждый участок точечным зарядом. Величина каждого такого заряда равна

$$dq = \tau ds.$$

По формуле потенциала поля точечного заряда, потенциал поля, создаваемого бесконечно малым участком в точке *O* равен

$$d\varphi_O = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{R}$$

По той же формуле потенциала поля точечного заряда, потенциал поля, создаваемого бесконечно малым участком в точке *B* равен

$$d\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dxs}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

Для того, вычислить потенциалы φ_O и φ_B. поля, создаваемого всеми участками кольца, нужно сложить потенциалы все участков, или взять интеграл:

$$\varphi_O = \int_0^{2\pi R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}2\pi R = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}$$

$$\varphi_B = \int_0^{2\pi R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau ds}{\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\sqrt{R^2+l^2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\sqrt{R^2+l^2}R}2\pi R = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

В итоге получаем ответ

$$A = (\varphi_O - \varphi_B)Q = \left(\frac{\tau}{2\varepsilon_0} - \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)Q = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)Q$$

Задача 10.

Две бесконечно длинные равномерно заряженные тонкие нити с линейной плотностью заряда τ скрещены под прямым углом друг к другу. Определить силу F их взаимодействия.

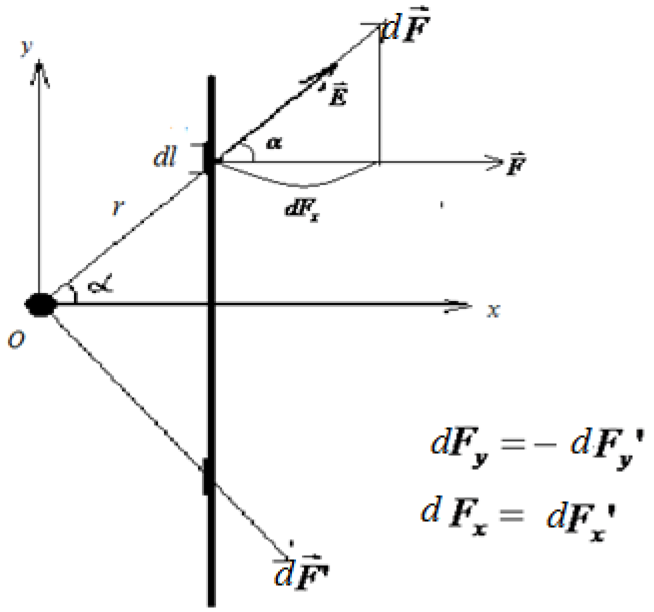
Дано: τ

Найти: F

Решение

Сделаем рисунок. Напряженность электрического поля, создаваемая бесконечно длинной заряженной нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



Рассмотрим бесконечно малый элемент dl на одной нити. Напряженность электрического поля, создаваемого другой нитью, в этом элементе равна

$E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, поэтому сила dF, действующая на него равна

$$dF = E\tau dl = \frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Поскольку нити бесконечные, то для любого такого участка найдется другой участок такой же длины, на который действует такая же по величине сила (см. рисунок). Когда мы будем считать силу, действующую на нить, мы будем суммировать векторы сил, действующие на каждый участок. Составляющие силы, параллельные оси Oy сократятся, и останутся только проекции сил на ось Ox. Поэтому нам достаточно рассмотреть только проекции сил на ось Ox.

Вычислим проекцию силы, действующей на элемент dl, на ось Ox:

$$dF_x = E\tau dl\cos\alpha = \frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\alpha$$

Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ dl = dy, \text{ то}$$

$$dF_x = \frac{\tau^2 x dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)}$$

Полная сила равна

$$F = \int\limits_{\text{по нити}} dF_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^2 x dy}{2\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} = \frac{\tau^2 x}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{x^2 + y^2}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{x}$$

то

$$F==\frac{\tau^2 x}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{x}=\frac{\tau^2}{2\varepsilon_0}.$$

Это – ответ.

Задача 11.

Электрическое поле создано бесконечной прямой равномерно заряженной линией с линейной плотностью заряда τ. Определить поток Ψ вектора электрического смещения через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной линии и одинаково удалены от нее на расстояние r. Стороны площадки имеют размеры a и b.

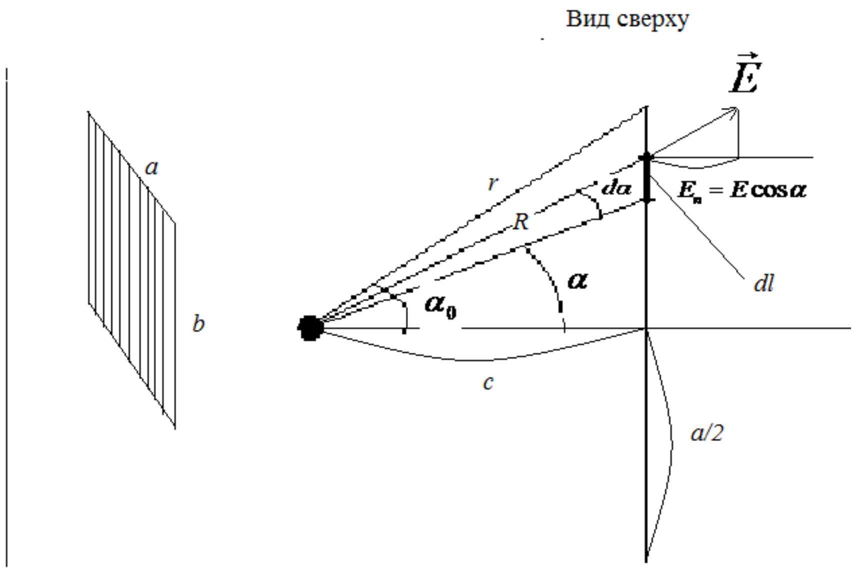
Дано: τ, a, b, r

Найти: Ψ

Решение

Сделаем рисунок. Также изобразим вид сверху.

Разобьем площадку на полоски бесконечной малой ширины dl. Будем считать, что полоски настолько тонкие, что в пределах полоски напряженность электрического поля, создаваемого линией, одинаковая. Рассмотрим одну из полосок, находящуюся на расстояние R от линии. В соответствие с известной из лекций формулой, напряженность электрического поля, создаваемого линией, на полоске будет равна



$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}$$

Направление вектора $\vec{E}$ показано на рисунке. Проекция этого вектора на нормаль к поверхности полоски будет равна

$$E_n=E\cos\alpha=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{R}\cos\alpha$$

Вектор электрического смещения в отсутствие среды ($\varepsilon = 1$) есть

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Поэтому поток вектора электрического смещения через полоску будет равен

$$d\Psi = D_n dS = \varepsilon_0 E_n dS = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot dS = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot dl$$

где dS - площадь полоски, которая равна $dS = bdl$.

Выразим dl и R через $d\alpha$ и α (см. рисунок):

$$dl = \frac{Rd\alpha}{\cos\alpha}, \quad R = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Тогда

$$d\Psi = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot dl = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{R}\cos\alpha \cdot b \cdot \frac{Rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\pi}\tau \cdot b \cdot d\alpha$$

Чтобы получить полный поток, нужно просуммировать по всем полоскам, или проинтегрировать по углу от $-\alpha_0 = -\arcsin\frac{a/2}{r}$ до $\alpha_0 = \arcsin\frac{a/2}{r}$

$$\Psi = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{1}{2\pi}\tau \cdot b \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi}\tau b\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \frac{1}{2\pi}\tau b 2\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\tau b \arcsin\frac{a}{2r}$$

Ответ: $\Psi = \frac{1}{\pi}\tau b \arcsin\frac{a}{2r}$

Задача 12.

Металлический шар радиусом R окружен равномерно слоем фарфора толщиной d. Определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара известен и равен Q.

Дано: R, d, Q, ε

Найти: σ_1, σ_2

Решение

Если бы не было диэлектрика, то напряженность электрического поля вне шара на расстоянии r от его центра была бы равна

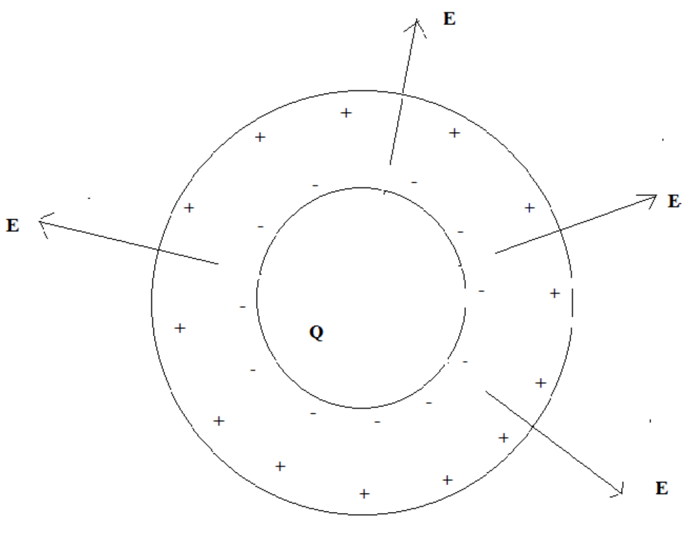
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

При наличии диэлектрика в нем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

У внутренней поверхности диэлектрика

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$



У внешней поверхности диэлектрика

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{(R+d)^2}$$

Найдем вектор поляризации по модулю на внутренней и внешней стороне диэлектрика

$$P_1 = \chi\varepsilon_0 E_1, \quad P_2 = \chi\varepsilon_0 E_2,$$

где $\chi = \varepsilon - 1$ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Подставляем:

$$P_1 = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}, \qquad P_2 = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_2 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(R+d)^2}$$

Из лекций известно, что на поверхности поляризованного диэлектрика

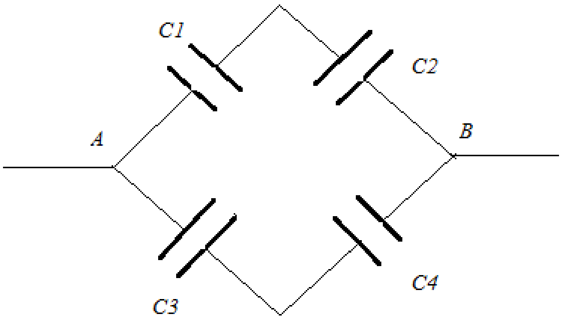
$$\sigma_1 = P_1, \ \sigma_2 = P_2,$$

Подставляя в данные формулы выражения для P_1 и P_2, получаем

$$\sigma_1 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(R+d)^2},$$

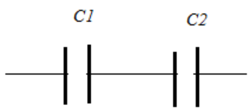
Задача 13

Конденсаторы электроемкостями C_1, C_2, C_3 и C_4 соединены так, как это указано на рисунке. Разность потенциалов между точками А и В равна U. Определить разность потенциалов и заряд на пластинах каждого конденсатора.

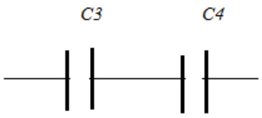


Решение

Обозначим последовательное соединение конденсаторов C_1 и C_2



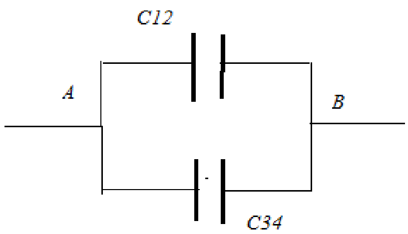
как конденсатор C_{12}, и обозначим последовательное соединение конденсаторов C_3 и C_4



как конденсатор C_{34}. Емкости C_{12} и C_{34} равны

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C4}$$

Тогда схема примет вид



Поскольку разность потенциалов на обкладках каждого из конденсаторов C_{12} и C_{34} равна U, то заряд на каждом из них равен

$$Q_{12} = C_{12}U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U\,, \quad Q_{34} = C_{34}U = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}U$$

При последовательном соединении заряды на обкладках конденсатором по модулю одинаковы. Поэтому на конденсаторах C_1 и C_2 заряды одинаковы и равны $Q_1 = Q_2 = Q_{12}$. Поэтому

$$Q_1 = Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U$$

Разности потенциалов на этих кондерсаторах равны

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}U$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U$$

Для конденсаторов C_3 и C_4 рассуждения аналогичные:

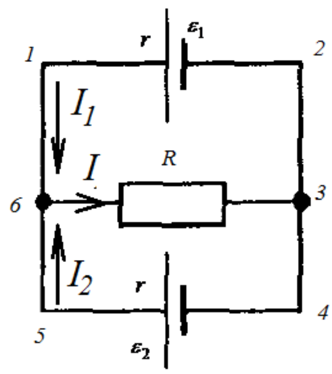
$$Q_3 = Q_4 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}U$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{C_4}{C_3 + C_4}U$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{C_3}{C_3 + C_4}U$$

Домашнее задание 2.
Постоянный ток. Постоянное магнитное поле

Задача 1. Два элемента с ЭДС ε_1 и ε_2 соединены по схеме, показанной на рисунке. Внутреннее сопротивление элементов одинаково и равно r. Определить силу тока, идущего через сопротивление R.



Дано: ε_1, ε_2, R, r

Найти: I

Решение

Обозначим токи в ветвях I_1, I_2 и I и их направления выберем произвольно. По первому правилу Кирхгофа сумма токов, сходящихся в узле, равна 0:

$$I_1 + I_2 - I = 0$$

Будем обходить верхний контур (1236) по часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа сумма произведений токов на сопротивления в контуре равна сумме ЭДС:

$$-IR - I_1 r_1 = -\varepsilon_1$$

Будем обходить нижний контур (6345) по часовой стрелке:

$$IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2$$

Неизвестных токов – три, мы составили три уравнения. Этого достаточно, чтобы найти токи

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I = 0 \\ IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1 \\ IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Выразим I_1 из второго уравнения, а I_2 – из третьего (с учетом $r_1 = r_2 = r$):

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1}, \; I_2 = \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_1}$$

Подставим эти выражения в первое уравнение:

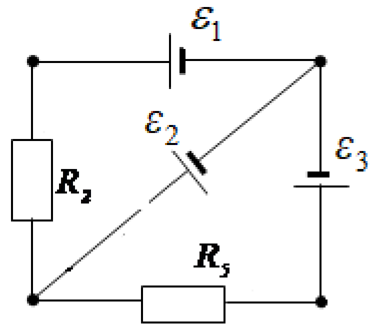
$$\frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1} + \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_1} = I$$

Выражаем I:

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{IR}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_1} - \frac{IR}{r_1} = I, \qquad \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_1} = I\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_1}\right)$$

$$I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_1}}{1 + \dfrac{R}{r_1} + \dfrac{R}{r_1}}$$

Задача 2. Определить силу тока, текущего через элементы цепи, если известны $\varepsilon_1 = 1B_1$, $\varepsilon_1 = 2B$, $\varepsilon_3 = 3B$, $r_1 = 1 Ом$, $r_2 = 1/2 Ом$, $r_3 = 1/3 Ом$, $R_2 = 1 Ом$, $R_5 = 1/3 Ом$.



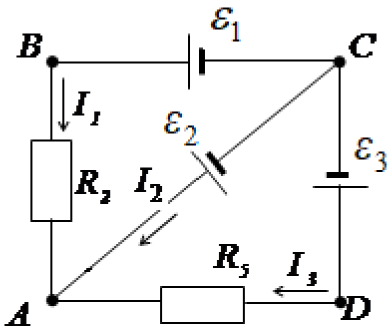
Решение

Электрическая цепь может быть рассчитана с помощью правил Кирхгофа. Сначала необходимо выбрать (произвольно) направления токов в ветвях.

Для узлов применим первое правило Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Применим второе правило Кирхгофа. Выберем условно-положительное направление обхода контура. Оно необходимо для определения знаков ЭДС и токов. Для контура АВСА – против часовой стрелки и получаем



$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1(r_1 + R_2) - I_2 r_2 .$$

Если бы мы выбрали направление обхода контура по часовой стрелке, то перед всеми слагаемыми уравнения знак поменялся бы на противоположный, а само уравнение бы не изменилось.

Рассмотрим контур ACDA. Выберем за положительное направление обхода этого контура направление также против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5) \ .$$

Система уравнений

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1(r_1 + R_2) - I_2 r_2$$
$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5)$$

является замкнутой. Задача физически решена. Остается найти токи.

Из первого уравнения выражаем I_1

$$I_1 = -I_2 - I_3$$

и подставляем во второе уравнение

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -I_2(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_4)$$

Из уравнения $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_5)$ выражаем I_2

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2}$$

и подставляем в уравнение $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -I_2(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_2)$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) - I_3(r_1 + R_2)$$

Выражаем отсюда I_3

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) - \left(\frac{(r_3 + R_5)}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) + (r_1 + R_2)\right)I_3$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{r_2}(r_1 + R_2 + r_2) = -\frac{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)}{r_2} I_3$$

$$\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_2}{r_2} = -\frac{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)}{r_2} I_3$$

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)r_2 = -((r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2))I_3$$

$$I_3 = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(r_1 + R_2 + r_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r_2}{(r_3 + R_5)(r_1 + R_2 + r_2) + r_2(r_1 + R_2)} = \frac{8}{9}\ \text{А}$$

Далее находим:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I_3(r_3 + R_5)}{r_2} = -\frac{1}{2}\text{ А}$$

$$I_1 = -I_2 - I_3 = -\frac{5}{8}\text{ А.}$$

Минус означает о другом направлении тока.

Задача 3 Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением R=3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_0=2 В до U =4 В в течение t=20с.

Дано: Q, U_0, U, R, t

Найти: Q

Решение

Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q=It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dQ=Idt$ и проинтегрируем:

$$Q = \int_0^t Idt.$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q = \int_0^t \frac{U}{R}dt.$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U(t) = U_0 + kt$$

где k - коэффициент пропорциональности. Подставив это выражение U в формулу (2), найдем

$$Q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{kt}{R}\right)dt = \frac{U_0}{R}\int_0^t dt + \frac{k}{R}\int_0^t tdt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}(2U_0 + kt)$$

Значение коэффициента пропорциональности k найдем из формулы $U(t) = U_0 + kt$ если заметим, что $U(t) = U$:

$$k = \frac{U - U_0}{t}$$

Подставив в формулу $Q = \frac{t}{2R}(2U_0 + kt)$ найдем

$$Q = \frac{t}{2R}\left(2U_0 + \frac{U - U_0}{t}t\right) = \frac{t(U + U_0)}{2R}$$

Ответ: $Q = \frac{t(U + U_0)}{2R}$

Задача 4. Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом нарастает в течение времени Δt=2 с по линейному закону от I_0=0 до I_{max}=6 А. Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за время $t_1 = 1$с

Дано: U_0, U, R, Δt, t_1

Найти: Q

Решение

Закон Джоуля - Ленца $Q= I^2Rt$ применим в случае постоянного тока (I =const). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R dt\ .$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I(t) = I_0 + kt\ ,$$

где k - коэффициент пропорциональности, равный отношению приращений силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение.

$$I_{\max} = I_0 + k\Delta t$$

Или:

$$k = \frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t}$$

и поэтому

$$I(t) = \frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t} t$$

С учетом этого равенства формула $dQ = I^2(t) R dt$ примет вид

$$dQ = \left(\frac{I_{\max} - I_0}{\Delta t} t\right)^2 R dt = \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2} t^2 dt$$

Для определения количества теплоты, выделившегося за конечный промежуток времени от 0 до t_1, это выражение следует проинтегрировать в пределах от 0 до t_1:

$$Q = \int_0^{t_1} \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2} t^2 dt = \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2} \int_0^{t_1} t^2 R dt =$$

$$= \frac{(I_{\max} - I_0)^2 R}{\Delta t^2} \frac{t_1^3}{3}$$

Ответ: $Q = \dfrac{(I_{\max} - I_0)^2 R t_1^3}{3\Delta t^2}$

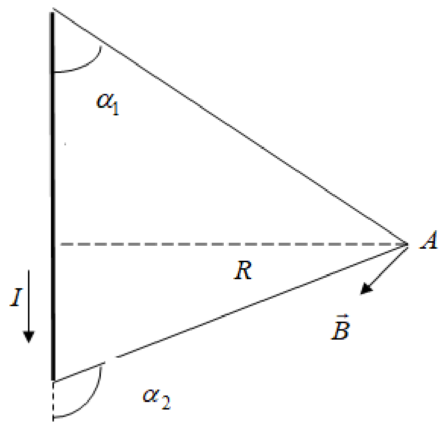
Задача 5. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток I. Длины сторон прямоугольника равны a и b. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

Дано: I, a, b

Найти: B

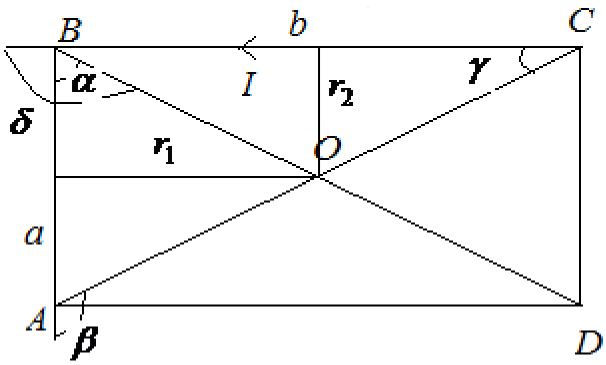
Решение

Воспользуемся формулой, полученной в лекциях, для магнитной индукции, создаваемой конечным прямолинейным проводником с током в точке A (см. рисунок):



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Сделаем рисунок для нашей задачи:



Для стороны AB

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

Для стороны BC

$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_2}(\cos\gamma - \cos\delta)$$

Кроме того

$$B_{AB} = B_{CD}$$
$$B_{BC} = B_{DA}$$

Поэтому

$$B = B_{AB} + B_{BC} + B_{CD} + B_{DA} = 2B_{AB} + 2B_{BC}$$

Найдем B_{AB} и B_{CB}

$$r_1 = \frac{b}{2}, \quad r_2 = \frac{a}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\delta = \cos(\pi-\gamma) = -\cos\lambda = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Поэтому

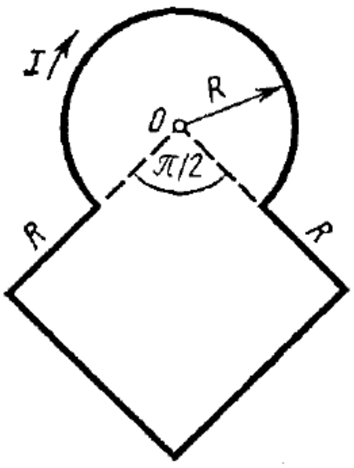
$$B = 2B_{AB} + 2B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(\cos\alpha - \cos\beta) - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(\cos\gamma - \cos\delta) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} 2\cos\alpha + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} 2\cos\gamma = \frac{2\mu_0 I}{\pi b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2\mu_0 I}{\pi a}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

Ответ: $B = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$

Задача 6. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток *I*. Определить магнитную индукцию *B* поля, создаваемого этим током в точке *O*, в случае, изображенном на рисунке. Радиус *R* изогнутой части контура известен.



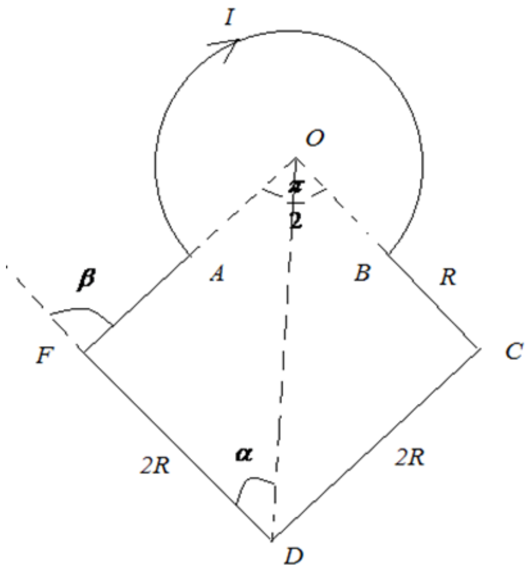
Дано: I, R

Найти: B

Решение

Сделаем рисунок.

Пусть *B* - магнитная индукция в точке *O*, создаваемая всем замкнутым контуром, а B_{AB}, B_{BC}, B_{CD}, B_{DF}, B_{FA} - магнитные индукции в точке *O*, создаваемые отдельными участками контура (см. рисунок). Направления вектора магнитной индукции от всех участков одинаковое, и мы можем складывать модули этих векторов. Тогда



$$B = B_{AB} + B_{BC} + B_{CD} + B_{DF} + B_{FA}$$

Вычислим отдельно B_{AB}, B_{BC}, B_{CD}, B_{DF}, B_{FA}

Поскольку в центре кругового тока радиуса R магнитная индукция равна

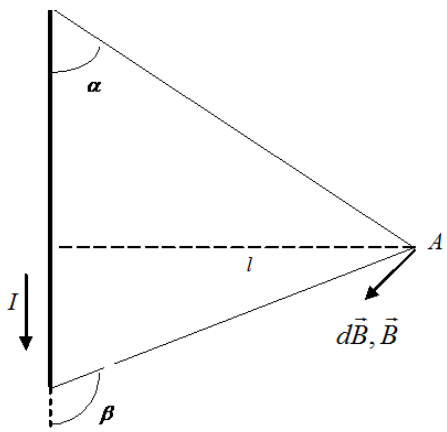
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

а участок *AB* представляет собой 3/4 окружности, то имеем

$$B_{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

Магнитные индукции B_{BC}, B_{FA} равна нулю, поскольку участки BC (FA) и точка *O* лежат на одной прямой и угол между участком и направлением на точку *O* равен нулю.

Далее, $B_{CD} = B_{DF}$. Вычислим B_{CD}. Воспользуемся формулой, полученной в лекциях, для магнитной индукции, создаваемой конечным прямолинейным проводником с током в точке *A* (см. рисунок):



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

У нас $l = 2R$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ и, таким образом,

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot 2R}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Тогда

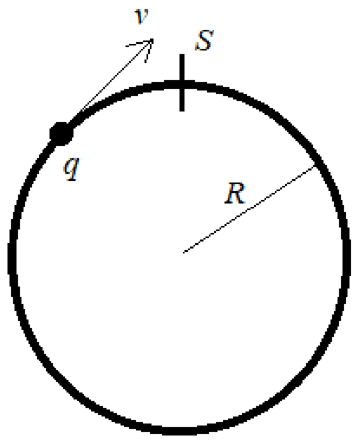
$$B = B_{AB} + B_{CD} + B_{DF}$$

$$B = \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left(3\pi + \sqrt{2}\right)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left(3\pi + \sqrt{2}\right)$

Задача 7. Точечный заряд q вращается с постоянной скоростью v по окружности радиуса R. Определить магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого зарядом.



Дано: q, R, v

Найти: p_m

Решение

Движущийся по замкнутой траектории (окружности) заряд создает электрический ток через любую поверхность, пересекающую тракторию заряда. Рассмотрим поверхность S, стоящую на пути движения заряда (см. рисунок).

Период вращения заряда равен $T = \frac{2\pi R}{v}$. За это время заряд перечечет поверхность S один раз. Значит за время T через поверхность S пройдет заряд q. При этом сила тока I через поверхность S равна заряду, который проходит через поверхность S в единицу времени, то есть

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi R}$$

Магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого зарядом равен произведению силы тока на площадь внутренности окружности, по которой движется заряд, т.е.

$$p_m = I\pi R^2 = \frac{qv}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{qvR}{2}$$

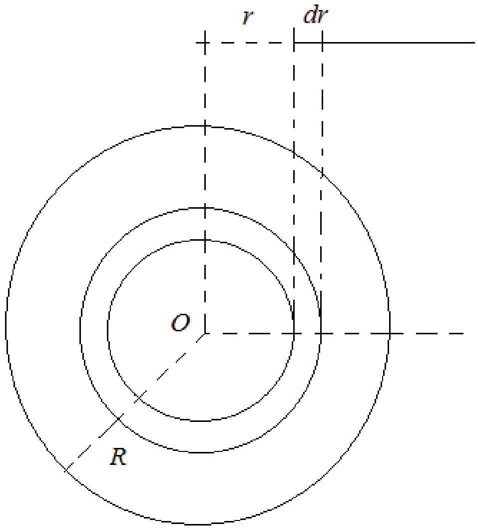
Ответ: $p_m = \frac{qvR}{2}$

Задача 8. Диск радиусом R несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Диск равномерно вращается с частотой n относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого диском.

Дано: Q, R, n

Найти: p_m

Решение



Диск имеет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Разобъем диск на концентрические кольца бесконечно малой толщины dr. Рассмотрим одно из таких колец. Радиус кольца обозначим через r.

Поверхностная плотность заряда диска равна

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Поэтому заряд выбранного нами кольца, площадь поверхности которого равна $dS = 2\pi r dr$ равен

$$dQ = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Поскольку диск вращается, то кольцо тоже вращается. При вращении кольца происходит перенос заряда. За время равное периоду $T = \dfrac{1}{n}$ (один оборот) происходит перенос всего заряда кольца $dQ = \sigma 2\pi r dr$. Это означает, что вращение кольца создает ток силой

$$dI = \frac{dQ}{T} = 2\pi n \sigma r dr$$

Площадь внутренности кольца равна

$$S = \pi r^2$$

Тогда при вращении кольца создается магнитный момент

$$dp_m = dI \cdot S = 2\pi n \sigma r dr \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 n \sigma r^3 dr$$

Полный магнитный момент, создаваемый всем диском есть сумма магнитных моментов, создаваемых всеми кольцами:

$$p_m = \int\limits_{\text{по кольцам}} dp_m = \int_0^R 2\pi^2 n \sigma r^3 dr = 2\pi^2 n \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi^2 n \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2 n \sigma R^4}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2 n Q R^4}{2\pi R^2} = \frac{\pi n Q R^2}{2}$$

Ответ: $p_m = \dfrac{\pi n Q R^2}{2}$

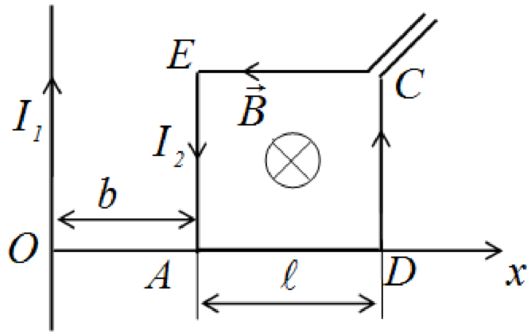
Задача 9. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводником, по которому протекает ток $I_1 = 5A$, расположена квадратная рамка, по которой течет ток $I_2 = 1A$. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны магнитного поля, создаваемого прямолинейным током, а также равнодействующую этих сил. Сторона рамки $\ell = 10см$, расстояние от стороны AE до прямого проводника $b = 5см$. Магнитная проницаемость среды $\mu = 2$.

Дано: $I_1 = 5A$, $I_2 = 1A$, $\ell = 10см$, $b = 5см$.

Найти: F

Решение

Рамка находится в магнитном поле, созданном прямолинейным проводником с током. Во всех частях рамки вектор магнитной индукции $\vec{B}$ этого поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка. Ось Ox направлена от проводника с током вправо. Модули сил, действующих на стороны рамки, обозначим соответственно F_{AE}, F_{EC}, F_{CD} и F_{DA}.



Поскольку проводник с током бесконечен, то магнитное поле на сторонах рамки AE и CD однородно. Поэтому для нахождения сил, действующих на стороны AE и CD рамки, воспользуемся законом Ампера для конечных проводников в однородном поле

$$F = IB\ell \sin\beta,$$

Магнитная индукция от бесконечного прямого проводника на расстоянии b от него определятся формулой (лекции) для напряжённости магнитного поля

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi b}.$$

Тогда для стороны AE

$$F_{AE} = I_2 B_{AE} \ell = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi b}.$$

Аналогично для стороны CD

$$F_{CD} = I_2 B_{CD} \ell = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi (b + \ell)}.$$

Для нахождения сил, действующих на стороны EC и DA рамки, следует учесть, что магнитная индукция различна в разных местах этих сторон рамки, поэтому необходимо выполнить интегрирование.

Пусть сила dF_{EC} действует на элементарный участок dx этого проводника, расположенный на расстоянии x от прямолинейного проводника. Тогда

$$dF_{BC} = I_2 B dx = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 dx}{2\pi x}.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$F_{EC} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \int\limits_b^{b+\ell} \frac{dx}{x} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$$

(сила направлена вниз).

Рассуждая аналогично для участка DA, получаем

$$F_{DA} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \int\limits_b^{b+\ell} \frac{dx}{x} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$$

(сила направлена вверх).

Т.к. силы F_{EC} и F_{DA} одинаковы и противоположно направлены, то их равнодействующая равна нулю. Поэтому общая равнодействующая равна

$$F = F_{AE} - F_{CD} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi b} - \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi(b+\ell)} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\ell}\right)$$

Вычисляя, находим $F = 1{,}33$ мкН.

Ответ: $F_{AE} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi b}$, $F_{CD} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi(b+\ell)}$, $F_{EC} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$, $F_{DA} = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b+\ell}{b}$, $F = \frac{I_2 I_1 \mu\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\ell}\right)$

Задача 10. Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса которого равна m_1, описал дугу окружности радиусом R_1. Определить массу m_2 другого иона, который описал дугу окружности радиусом R_2.

Решение

Пусть каждый ион имеет заряд q. Если ион с зарядом q прошел разность потенциалов U, то он приобрел кинетическую энергию, равную уменьшению его потенциальной энергии, т.е.

$$\frac{mv^2}{2} = qU$$

Отсюда скорость иона, после прохождения им разности потенциалов U равна

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Если после прохождения разности потенциалов ион влетает в однородное магнитное поле перпендикулярное скорости, то он начинает двигаться по окружности радиуса R под действием силы Лоренца $F = qvB$. Согласно 2 закону Ньютона

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

или

$$m\frac{v}{R} = qB$$

Подставляя v получаем

$$\frac{m}{R}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = qB$$

или

$$\sqrt{2qUm} = qBR$$

Запишем данное уравнение для каждого иона

$$\sqrt{2qUm_1} = qBR_1$$

$$\sqrt{2qUm_2} = qBR_2$$

Разделим одно уравнение на другое

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

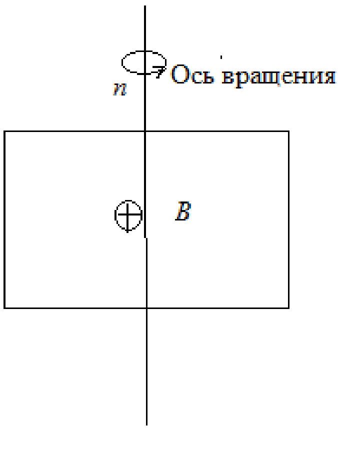
Отсюда

$$m_2 = m_1\frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Домашнее задание 3.
Электродинамика. Электрические колебания

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией *B* равномерно с частотой *n* вращается рамка, площадью *S*, содержащая *N* витков. Определить значение ЭДС ε, соответствующее углу поворота рамки α (углу между вектором магнитной индукции и вектором нормали к плоскости рамки).

Решение



Мгновенное значение ЭДС индукции ε определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

где Ф поток вектора магнитной индукции, пронизывающий все витки рамки.

По определению потока

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Поскольку рамка равномерно вращается, то угол α линейно зависит от времени $\alpha = \omega t = 2\pi nt$

Тогда

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \cdot \cos(2\pi nt)$$

И

$$\varepsilon = -\frac{dNBS\cos(2\pi nt)}{dt} = -NBS\,\frac{d\cos(2\pi nt)}{dt} = 2\pi nNBS\sin(2\pi nt) = 2\pi nNBS\sin\alpha$$

Ответ: $\varepsilon = 2\pi nNBS\sin\alpha$

Задача 2. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d. Диаметр соленоида равен $D>>d$. По соленоиду течет ток I. Определить количество электричества Q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение

Количество электричества dQ, которое протекает по проводнику за время dt при силе тока I, определяется равенством

$$dQ = Idt\,.$$

За время t , когда ток прекратится, эта величина будет равна будет

$$Q = \int_0^t Idt.$$

При коротком замыкании катушки источником тока будет служить ЭДС самоиндукции ε. Сила тока в данном случае определится по закону Ома

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

где $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$, ρ - удельное сопротивление меди, l – длина провода в катушке.

Согласно закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Поэтому

$$Q = \int_0^t Idt = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R}dt = -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{d\Phi}{dt}dt = -\frac{1}{R}(\Phi(t) - \Phi(0)) = \frac{1}{R}\Phi(0)$$

Но

$$\Phi(0) = LI$$

где L - индуктивность катушки.

$$Q = \frac{LI}{R}$$

По формуле индуктивности соленоида

$$L = \mu_0\frac{N^2}{l_c}S_c$$

где l_c и S_c - длина и площадь соленоида.

$$l_c = dN$$

$$S_c = \pi \frac{D^2}{4}$$

Поэтому

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{dN} \pi \frac{D^2}{4} = \mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}$$

Подставляя это выражение и $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$ в формулу для Q получаем

$$Q = \mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d} I \frac{\pi d^2}{4 l \rho} = \mu_0 \frac{\pi N D^2 \pi d}{16 l \rho} I$$

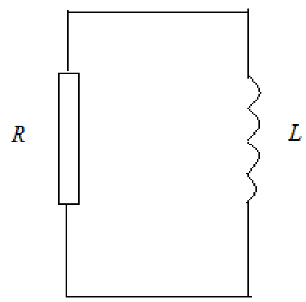
Учитывая что $\frac{l}{\pi D} = N$ получаем

$$Q = \mu_0 \frac{\pi N D^2 \pi d}{16 l \rho} I = \mu_0 \frac{\pi D^2 \pi d}{16 l \rho} I \frac{l}{\pi D} = \mu_0 \frac{\pi D d}{16 \rho} I$$

Ответ: $Q = \mu_0 \frac{\pi D d}{16 \rho} I$

Задача 3. В цепи шел ток *I*. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока *I* в этой цепи через время *t* после отключения ее от источника тока. Сопротивление цепи равно *R*, ее индуктивность равна L.

Решение



В момент времени $t = 0$, когда отключили источник тока, сила тока в цепи была равна $I(0) = I$. После этого сила тока стала убывать по закону $I(t)$, но убывать не сразу, поскольку возникла ЭДС самоиндукции. Величина ЭДС самоиндукции равна $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$.

Поэтому во время убывания тока мы можем записать закон Ома для замкнутой цепи

$$IR = \varepsilon$$

или

$$IR = -L\frac{dI}{dt}$$

Данное уравнение можно решить. Перепишем его в виде

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I}$$

Возьмем интеграл от левой и правой частей. От левой по dt в пределах от 0 до *t*, а от правой по *dI* в пределах от до I до $I(t)$:

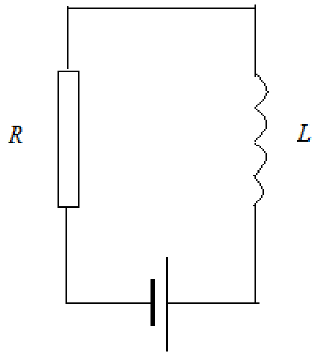
$$-\frac{R}{L}\int_0^t dt = \int_I^{I(t)} \frac{dI}{I}$$

или, интегрируя

$$-\frac{R}{L}t = \ln I(t) - \ln I$$

Отсюда $I(t) = I\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$

Ответ: $I(t) = I\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$



Задача 4. К источнику тока с внутренним сопротивлением R_i подключают катушку индуктивностью L и сопротивлением R. Найти время $t_{1/2}$, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, в 2 раза меньшего максимального значения тока.

Решение

При включении цепи ток будет постепенно нарастать, пока не достигнет максимального значения $I_{\max}$. Значение $I_{\max}$ определится из закона Ома для замкнутой цепи

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R + R_i},$$

где ε - ЭДС источника. С момента включения цепи ток будет нарастать по закону $I(t)$.

Запишем закон Ома для замкнутой цепи в некоторый момент времени t когда ток нарастает, при этом учтем ЭДС самоиндукции ε_c:

$$I(t) = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R + R_i}$$

Учитывая что

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$$

запишем

$$I(t) = \frac{\varepsilon - L\frac{dI}{dt}}{R + R_i}$$

или

$$(R + R_i)I - \varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

или

$$\frac{R+R_i}{L}dt = \frac{dI}{\dfrac{\varepsilon}{R+R_i} - I}$$

Возьмем интеграл от левой и правой частей. От левой по dt в пределах от 0 до $t_{1/2}$, а от правой по dI в пределах от до 0 до $\frac{I_{\max}}{2} = \frac{\varepsilon}{2(R+R_i)}$:

$$\frac{R+R_i}{L}\int_0^{t_{1/2}} dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2(R+R_i)}} \frac{dI}{\dfrac{\varepsilon}{R+R_i} - I}$$

Получаем

$$\frac{R+R_i}{L}t_{1/2} = -\ln\frac{\varepsilon}{2(R+R_i)} + \ln\frac{\varepsilon}{R+R_i}$$

$$\frac{R+R_i}{L}t_{1/2} = \ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{L}{R+R_i}\ln 2$$

Ответ:

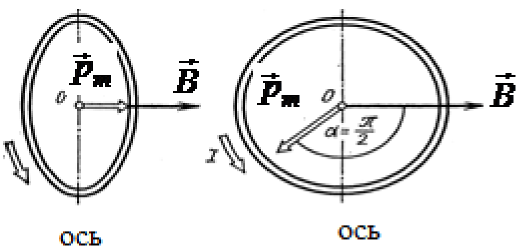
$$t_{1/2} = \frac{L}{R+R_i}\ln 2$$

Задача 5. Виток, диаметром d, по которому течет ток I, свободно установился в однородном магнитном поле B. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

Решение

При медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь и считать ток в контуре неизменным. Работа сил поля в этом случае определяется выражением

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$



где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положениях.

Работа внешних сил будет равна модулю работе сил поля и противоположна ей по знаку, т. е.

$$A_{вн} = -A = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

Так как в начальном положении контур установился свободно (положение устойчивого равновесия), то момент внешних сил, действующий на контур, равен нулю. В этом положении вектор магнитного момента $\vec{p}_m$ контура сонаправлен с вектором B (рисунок слева) и магнитный поток Φ_1 максимален (α=0, cos α=1), т. е. Φ_1=BS (где S есть площадь контура). В конечном положении (рисунок справа) вектор $\vec{p}_m$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$ (α=π/2, cos α=0) и магнитный поток Φ_2=0. Перепишем выражение $A_{вн} = I(\Phi_1 - \Phi_2)$ с учетом сделанных замечаний:

$$A_{вн} = I\Phi_1 = IBS$$

Так как площадь контура S=πd^2/4 то работа равна

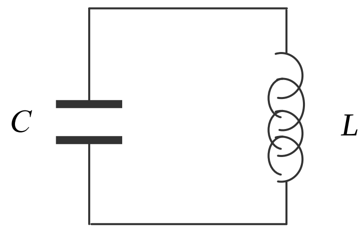
$$A_{вн} = \frac{\pi IBd^2}{4}$$

Ответ: $A_{вн} = \dfrac{\pi IBd^2}{4}$.

Задача 6. Колебательный контур имеет индуктивность L, электроемкость C, максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно $U_{\max}$. Определить максимальную силу тока $I_{\max}$. Сопротивление контура ничтожно мало.

Решение

Заряд на конденсаторе зависит от времени по закону (из лекции):



$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Разность потенциалов на конденсаторе равна

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \text{где}$$

$$U_{\max} = \frac{q_m}{C}$$

а сила тока

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}), \text{ где} \qquad I_{\max} = \omega_0 q_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_m$$

Поделим два уравнения

$$U_{\max} = \frac{q_m}{C}$$

$$I_{\max} = \omega_0 q_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_m$$

одно на другое:

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Отсюда

$$I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Ответ:

$$I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Задача 7. Колебательный контур имеет катушку индуктивности L и сопротивлением R и конденсатор некоторой емкости. Через какое время Δt после начала колебаний энергия колебательного контура уменьшится в 3 раза? Задачу решить в приближении, что коэффициент затухания намного меньше частоты затухающих колебаний.

Дано: L, C, R, $\frac{W(0)}{W(\Delta t)} = 3$

Найти: Δt, λ

Решение

В колебательном контуре происходят затухающие колебания. Согласно лекциям, при затухающих колебаниях зависимость заряда конденсатора от времени имеет вид

$$q(t) = q_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha)$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ - циклическая частота затухающих колебаний, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - циклическая частота незатухающих колебаний. При этом разность потенциалов на обкладках конденсатора есть

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C}\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha)$$

Сила тока в контуре есть производная заряда по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} q_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha) = q_0 \exp(-\beta t)(-\beta\cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha))$$

Если коэффициент затухания β намного меньше частоты затухающих колебаний ω, то мы можем пренебречь первым слагаемым и приближенно записать:

$$I \approx -q_0\omega\exp(-\beta t)\sin(\omega t + \alpha)$$

В этом случае мы можем также считать, что

$$\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Энергия колебательного контура есть сумма энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2},$$

или

$$W(t)\approx\frac{\left(q_0\exp(-\beta t)\cos(\omega t+\alpha)\right)^2}{2C}+\frac{L\left(q_0\exp(-\beta t)(-\omega\sin(\omega t+\alpha))\right)^2}{2}\approx$$

$$\approx\exp(-2\beta t)\left[\frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t+\alpha)+\frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\alpha)\right]$$

Поскольку $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ то

$$W(t)\approx\exp(-2\beta t)\left[\frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t+\alpha)+\frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t+\alpha)\right]=\exp(-2\beta t)\frac{q_0^2}{2C}$$

По условию задачи

$$\frac{W(0)}{W(\Delta t)}=3\text{, откуда получаем }\frac{\dfrac{q_0^2}{2C}}{\exp(-2\beta\Delta t)\dfrac{q_0^2}{2C}}=3\ \Rightarrow\ \exp(2\beta\Delta t)=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{\ln 3}{2\beta}=\frac{L\ln 3}{R}$$

Ответ: $\Delta t=\dfrac{L\ln 3}{R}$

Домашнее задание 4.
Оптика. Квантовая физика

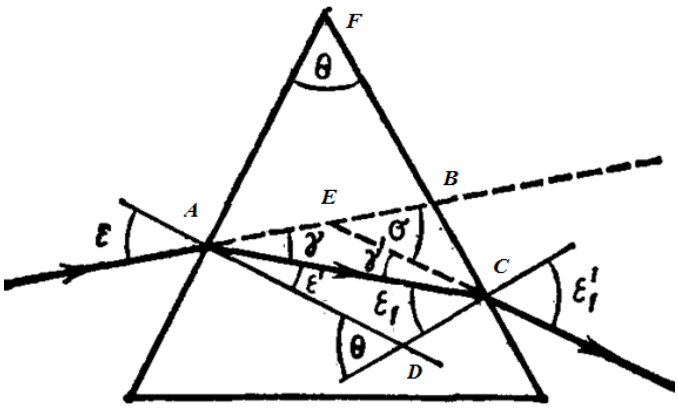
Задача 1. На стеклянную призму с преломляющим углом θ=50° падает под углом ε=30° луч света. Определить угол отклонения σ луча призмой, если показатель преломления стекла равен n=1.56.

Дано: θ, ε, n

Найти: σ-?

Решение

Сделаем рисунок:



Из треугольника *AEC* определяем из условия, что сумма углов треугольника равна π:

$$\pi-\sigma+\gamma+\gamma'=\pi,$$

откуда

$$\sigma=\gamma+\gamma'.$$

Далее выразим углы γ и γ' через углы ε, ε', ε_1, ε_1':

$$\gamma = \varepsilon - \varepsilon'$$
$$\gamma' = \varepsilon_1' - \varepsilon_1$$

Подставляем в формулу $\sigma = \gamma + \gamma'$:

$$\sigma = \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon_1' - \varepsilon_1$$

Вычисляем последовательно углы ε, ε', ε_1, ε_1'. Угол ε известен из условия. Угол ε' находится из закона преломления на левой грани призмы:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = n,$$

откуда

$$\sin\varepsilon' = \frac{\sin\varepsilon}{n}, \quad \varepsilon' = \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}.$$

Угол ε_1 находим из треугольника ADC:

$$\pi - \theta + \varepsilon' + \varepsilon_1 = \pi,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \theta - \varepsilon' = \theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}$$

Углы ε_1 и ε_1' связаны законом преломления на правой грани призмы:

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_1'} = \frac{1}{n},$$

отсюда находим ε_1':

$$\varepsilon_1' = \arcsin(n\sin\varepsilon_1)$$

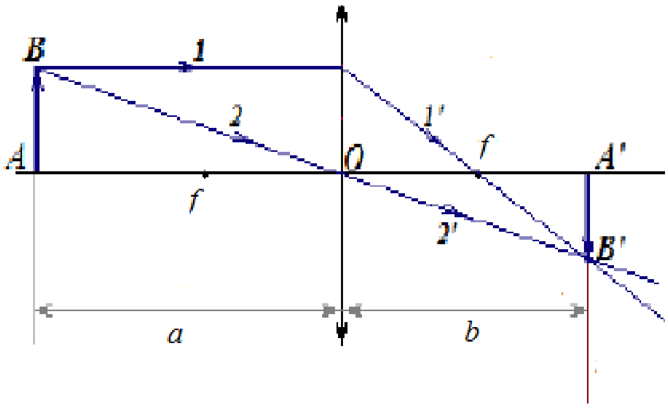
Подставляем найденные значения ε, ε', ε_1, ε_1' в формулу $\sigma = \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon_1' - \varepsilon_1$:

$$\sigma = \varepsilon - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n} + \arcsin(n\sin\varepsilon_1) - \theta + \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n} =$$
$$= \varepsilon + \arcsin\left(n\sin\theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}\right) - \theta.$$

Ответ: $\sigma = \varepsilon + \arcsin\left(n\sin\left(\theta - \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{n}\right)\right) - \theta$

Задача 2. Расстояние между точечным источником света и экраном равно L. Собирающая линза, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми равно l . Определите фокусное расстояние линзы.

Дано: L, l
Найти: f
Решение



Запишем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

По условию задачи

$$a+b=L,$$

Отсюда

$$b=L-a.$$

Подставим в формулу линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}=\frac{1}{f}.$$

Будем рассматривать это уравнение как уравнение с неизвестной величиной a при заданных и известных величинах L и f. Решим его относительно a:

$$\frac{L}{a(L-a)}=\frac{1}{f},$$

$$a(L-a)=Lf,$$

$$a^2-La+Lf=0.$$

Решая квадратное уравнение находим два корня:

$$D=L^2-4Lf$$

$$a_1=\frac{L+\sqrt{L^2-4Lf}}{2},\quad a_2=\frac{L-\sqrt{L^2-4Lf}}{2}.$$

Эти решения соответствуют двум положениям линзы, дающим изображения предмета при заданных величинах L и f.

Заметим, что $a_1>a_2$. По условию задачи

$$a_1-a_2=l.$$

Или

$$\frac{L+\sqrt{L^2-4Lf}}{2}-\frac{L-\sqrt{L^2-4Lf}}{2}=l.$$

Или

$$\sqrt{L^2-4Lf}=l.$$

Отсюда выражаем f:

$$L^2 - 4Lf = l^2,$$

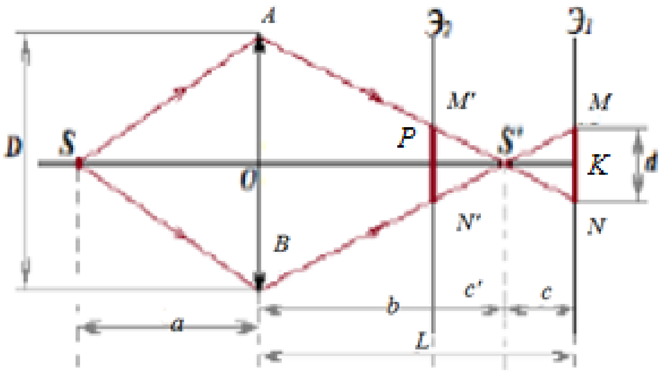
$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L}.$$

Ответ: $f = \dfrac{L^2 - l^2}{4L}$.

Задача 3. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F =15 см. Диаметр линзы D=6 см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник света, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром d = 4 см? Расстояние от линзы до экрана равно L =100 см.

Дано: F =15 см, D = 6 см, d = 4 см, L =100 см.
Найти: a-?

Решение. Сделаем рисунок.



Светлое пятно на экране может получиться при двух различных положениях экрана – когда изображение источника расположено за экраном и перед экраном (см. рисунок).

Рассмотрим сначала случай, когда экран расположен в положении Э$_1$. Треугольники $S'AB$ и $S'MN$ подобны. Следовательно, отношение длин сторон OS' и $S'K$ равно отношению длин сторон AB и MN:

$$\frac{|OS'|}{|S'K|} = \frac{|AB|}{|MN|}$$

или

$$\frac{b}{c} = \frac{D}{d}.$$

По условию $b + c = L$. Подставляем найденное значение $c = L - b$ находим расстояние от изображения до линзы b:

$$\frac{b}{L - b} = \frac{D}{d},$$

$$bd = D(L-b),$$
$$bd + Db = DL,$$
$$b(d+D) = DL,$$
$$b = \frac{DL}{d+D}.$$
Теперь запишем формулу тонкой линзы:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$
Из этой формулы находим a:
$$a=\frac{Fb}{b-F}.$$
Подставляем в данную формулу найденное ранее значение b:

$$a=\frac{F\dfrac{DL}{d+D}}{\dfrac{DL}{d+D}-F}=F\frac{DL}{d+D}\frac{d+D}{DL-dF-DF}=\frac{FDL}{DL-dF-DF}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда экран расположен в положении Э$_2$. Треугольники $S'AB$ и $S'M'N'$ подобны. Следовательно, отношение длин сторон BS' и $S'N$ равно отношению длин сторон AB и MN:
$$\frac{|OS'|}{|S'P|}=\frac{|AB|}{|M'N'|}$$
или
$$\frac{b}{c'}=\frac{D}{d}.$$
По условию $b-c'=L$. Подставляем найденное значение $c'=b-L$ находим расстояние от изображения до линзы b:
$$\frac{b}{b-L}=\frac{D}{d},\ \ bd=D(b-L),\ \ b(D-d)=DL,$$
$$b=\frac{DL}{D-d}.$$
Теперь запишем формулу тонкой линзы:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$
Из этой формулы находим a:
$$a=\frac{Fb}{b-F}.$$
Подставляем в данную формулу найденное ранее значение b:

$$a = \frac{F\frac{DL}{D-d}}{\frac{DL}{D-d} - F} = F\frac{DL}{D-d}\frac{D-d}{DL-DF+dF} = \frac{FDL}{DL-DF+dF}.$$

Ответ: $a_1 = \frac{FDL}{DL-dF-DF}, a_2 = \frac{FDL}{DL-DF+dF}$.

Задача 4. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = 15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Точечный источник находится на расстоянии $a = 30$ см от первой линзы (см. рисунок). На каком расстоянии от второй линзы находится изображение, даваемое системой двух линз?

Дано: $F_1 = 15$ см, $F_2 = 15$ см, $d = 10$ см, $a = 30$ см

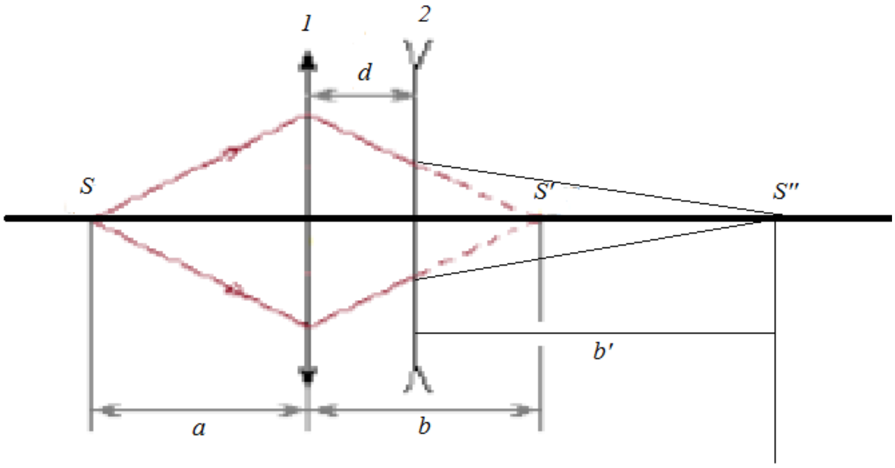
Найти: $b' - ?$

Решение.

Найдем изображение S', даваемое первой линзой. Пусть b - расстояние от линзы до изображения. Тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1},$$

$$b = \frac{aF_1}{a - F_1}.$$



В данной задаче из условия следует $b > d$, значит на вторую линзу падают сходящиеся лучи. Это означает, что S' является мнимым предметом для второй линзы.

Расстояние от S' до второй линзы равно

$$a' = b - d.$$

Записываем формулу тонкой линзы для второй линзы:

$$-\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = -\frac{1}{F_2},$$

откуда

$$b'=\frac{a'F_2}{a'+F_2}.$$

Подставляем $a'=b-d$:

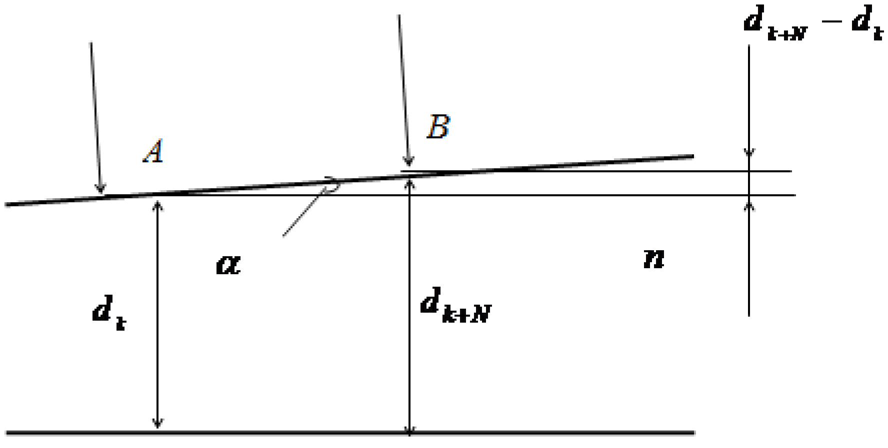
$$b'=\frac{(b-d)F_2}{b-d+F_2}.$$

Подставляем $b=\dfrac{aF_1}{a-F_1}$:

$$b'=\frac{\dfrac{aF_1}{a-F_1}F_2-dF_2}{\dfrac{aF_1}{a-F_1}-d+F_2}=\frac{aF_1F_2-daF_2+dF_1F_2}{aF_1+(a-F_1)(F_2-d)}$$

Ответ: $b'=\dfrac{aF_1F_2-daF_2+dF_1F_2}{aF_1+(a-F_1)(F_2-d)}$.

Задача 5. Свет с длиной волны $\lambda=0.55$ *мкм* от удалённого точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина $\Delta x=0.21$*мм.* Найти угол между гранями клина.



Решение: Интерференционная картина представляет собой чередующиеся тёмные и светлые полосы. Пусть в т. A наблюдается максимум k- го порядка (толщина клина d_k) и в т. B (с толщиной клина d_{k+N}) имеется максимум $k+N$-го порядка. Тогда $d_{k+N}-d_k$ - разность толщин клина в этих точках.

Учитывая, что угол α мал, запишем

$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{d_{k+N} - d_k}{AB}.$$

Далее, для расчёта расстояния между соседними максимумами используем условие максимумов для k-го и $k+1$-го порядков для интерференции для пластинки (выведено в лекциях) :

$$2d_k\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} + \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2}$$

$$2d_{k+1}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} + \frac{\lambda}{2} = 2(k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Угол падения $\theta = 0$, тогда

$$2d_k n + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad \text{и} \qquad 2d_{k+1}n + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$$

Из последних уравнений получим

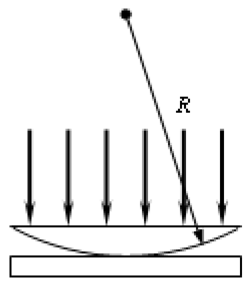
$$d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n}.$$

Итак, $$\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x}.$$

Подставив числа, получим: $\alpha \approx 3^\circ$.

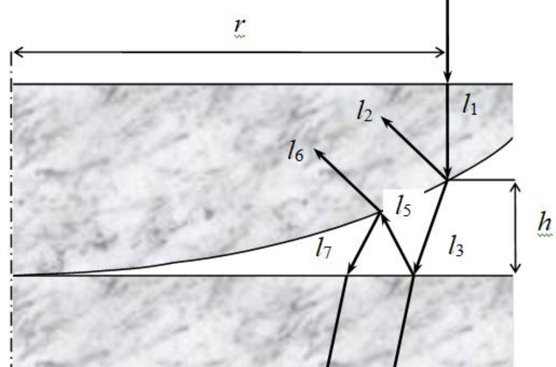
Ответ: $\alpha = \dfrac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 3^\circ$

Задача 6. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности R прижата к стеклянной пластинке. Найти радиус m–го темного кольца Ньютона в отраженном и проходящем свете при нормальном падении света с длиной волны λ.



Решение

Для получения колец Ньютона на стеклянную пластинку кладут плосковыпуклую линзу большого радиуса. Предположим, что свет падает на линзу по нормали к плоской поверхности. Тогда лучи пройдут через границу воздух-стекло без преломления (луч l_1). (На выпуклой поверхности линзы луч l_1 частично отразится (луч l_2) и частично преломится (луч l_3). Дойдя до верхней поверхности плоскопараллельной пластинки, луч l_3 опять частично преломляется (луч l_4) и частично отражается (луч l_5). То же происходит и с лучом l_5 (лучи l_6 и l_7), с лучом l_7 и так далее.) Однако, когда луч разделяется на границе раздела двух сред, интенсивность каждого из полученных лучей становится значительно меньше, чем у исходного.



Лучи l_2 и l_6, а также l_4 и l_8 могут интерферировать между собой. Интерференция лучей l_2 и l_6 называется интерференцией *в отраженном свете*, а лучей l_4 и l_8 – интерференцией *в проходящем свете*.

Найдем разность хода лучей в *отраженном свете*. Предположим, что радиус линзы достаточно велик, то есть длины лучей l_3 и l_5 приблизительно одинаковы и равны h. Тогда разность хода лучей будет равна

$$\Delta = 2hn \pm \lambda/2 .$$

Выразим толщину зазора через радиус линзы R и расстояние r от центра линзы до луча l_1.

$$r^2 + (R-h)^2 = R^2 \quad \text{или} \quad r^2 = 2Rh - h^2 .$$

$h << R$, слагаемым h^2 можно пренебречь, т.е.

$$r^2 \approx 2Rh \quad \text{или} \quad h = r^2/2R .$$

$$\Delta = \frac{r^2}{R} \cdot n + \frac{\lambda}{2} ,$$

где слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ соответствует изменению фазы волны на $\frac{\pi}{2}$ при отражении от оптически более плотной среды. Интерференционная картина будет иметь вид концентрических колец с центром в точке касания линзы и пластинки. Зная разность хода, легко найти радиусы темных колец

$$nr_m^2/R + \lambda/2 = (2m+1) \cdot \lambda/2$$

Отсюда

$$r_m^2 = \frac{m\lambda}{n} R$$

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{n} R}$$

В проходящем свете мы имеем

$$\Delta = \frac{r^2}{R} \cdot n$$

$$nr_m^2/R = (2m+1) \cdot \lambda/2$$

Отсюда

$$r_m^2 = \frac{(2m+1)\lambda}{2n} R$$

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m+1)\lambda}{2n} R}$$

Задача 7. Диаметры темных колец Ньютона с номерами m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) в отражённом свете соответственно равны d_1 и d_2. Определить длину волны света.

Решение

Радиус m-го кольца Ньютона в отраженном свете имеет вид (формула, выведенная в лекциях):

$$r_k = \sqrt{mR\lambda}\ .$$

Запишем,
$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{m_1 R\lambda}$$

и
$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{m_2 R\lambda}\ .$$

Или, возводя в квадрат

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = m_2 R\lambda\ ,$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = m_1 R\lambda\ .$$

Вычтем из первого уравнения второе:.

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = R(m_2 - m_1)\lambda\ .$$

Отсюда
$$\lambda = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4(m_2 - m_1)R}$$

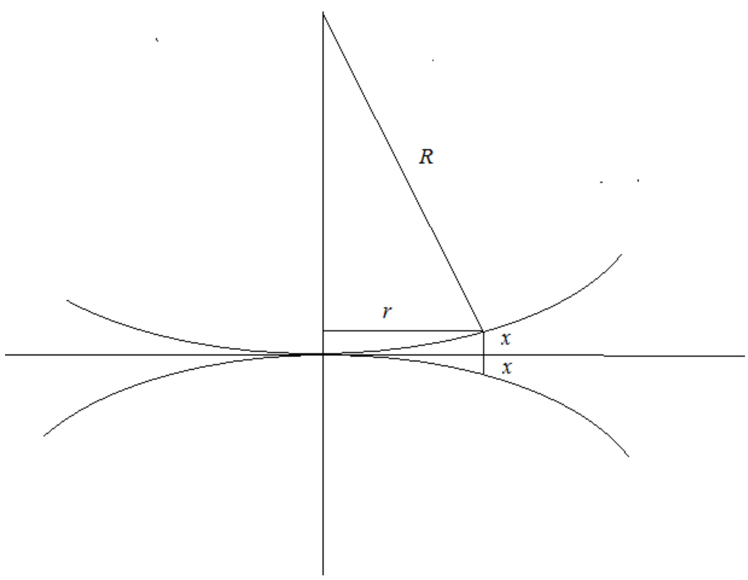
Ответ: $\lambda = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{4(m_2 - m_1)R}$

Задача 8. Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом кривизны R, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус m-го светлого кольца, наблюдаемого в отраженном свете длиной волны λ при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

Решение

Сделаем рисунок. Если бы вместо нижней линзы стояла бы плоская пластинка, то согласно выводу в лекциях разность хода интерферирующих лучей (на рисунке они не изображены) была бы равна

$$\Delta = 2xn \pm \lambda/2\ .$$



Поскольку у нас стоит вместо плоской пластинки линза, то из рисунка видно, что расстояние x *нужно увеличить вдвое* и мы заменяем $x \to 2x$:

$$\Delta = 4xn \pm \lambda/2$$

Далее выводим формулу для радиусов колец Ньютона так же как в лекциях:

$$r^2 + (R-x)^2 = R^2 \quad \text{или} \quad r^2 = 2Rx - x^2.$$

Поскольку $x << R$, слагаемым x^2 можно пренебречь, т.е.

$$r^2 \approx 2Rx \quad \text{или} \quad x = r^2/2R.$$

Тогда

$$\Delta = \frac{2r^2}{R} \cdot n \pm \frac{\lambda}{2}.$$

Для светлых колец

$$\Delta = m\lambda,$$

или

$$\frac{2r^2}{R} \cdot n \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

откуда получаем ответ

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m+1)\lambda}{4n} R}.$$

Задача 9. Плоская монохроматическая световая волна ($\lambda = 0{,}6$мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. Диаметр отверстия 6 мм. За диафрагмой на расстоянии 3 м от неё находится экран (рисунок). Определить: 1) сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? 2) каким будет центр дифракционной картины на экране?

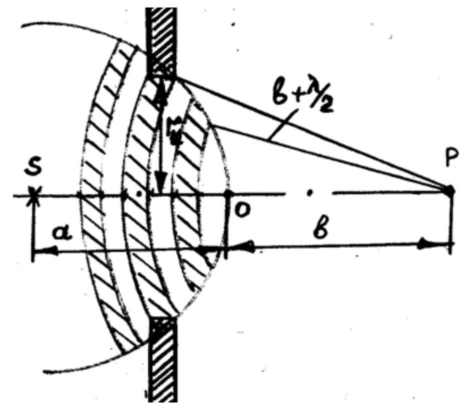
Дано: $\lambda = 0{,}6$мкм, $d = 6$ мм $b = 3$ м

Найти: $k-?$

Решение

В лекции была получена формула для радиуса k-й зоны Френеля для сферической

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}},$$



где a и b - соответственно расстояние от источника до рассматриваемой волновой поверхности волны и расстояния от волновой поверхности до точки наблюдения.

В нашем случае волна плоская, а не сферическая. Плоская волна может рассматриваться как сферическая у которой источник удален в бесконечность (в этом случае волновая поверхность переходит в плоскость). Это означает, что в формуле $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}}$, мы должны взять предел $a \to \infty$:

$$r_k = \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}} = \sqrt{k\lambda b}.$$

Выразим из этой формулы k:

$$k = \frac{r^2}{\lambda b} = \frac{d^2}{4\lambda b}$$

Подставив числа, получим, что число зон Френеля, укладывающихся в заданном отверстии

$$k = 20.$$

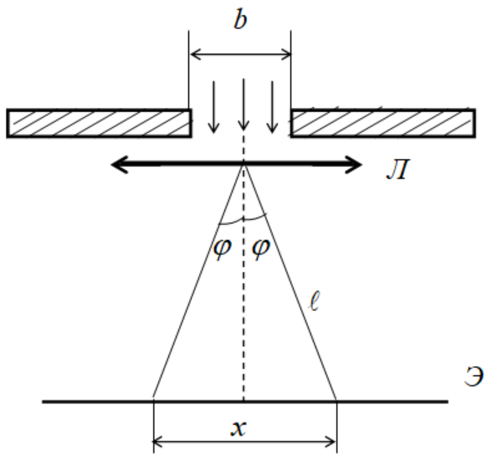
Т.к. из точки наблюдения видно чётное число зон, то центр дифракционной картины – тёмное пятно.

Задача 10. На щель шириной $b = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Вблизи щели находится собирающая линза. Экран, удалённый от щели на расстояние $\ell = 1$м, находится в фокальной плоскости линзы. Найти ширину изображения щели на экране. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными слева и справа от центрального максимума.

Дано: $b = 20$мкм, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см., $\ell = 1$м,

Найти: $x - ?$

Решение



Каждая точка щели является источником вторичных сферических волн. Линза, поставленная непосредственно за щелью собирает в фокальной плоскости лучи, идущие параллельно друг другу от разных точек щели. На экране наблюдается широкая размытая центральная полоса, слева и справа от которого располагаются тёмные и светлые полосы. Положение минимумов порядка k освещённости определяется условием

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda,$$

где φ - угол, под которым виден k-й минимум. А ширина изображения щели на экране

$$x = 2\ell tg\varphi.$$

В нашей задаче $k = 1$, следовательно,

$$b \sin\varphi = \lambda$$

и

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}.$$

Поэтому

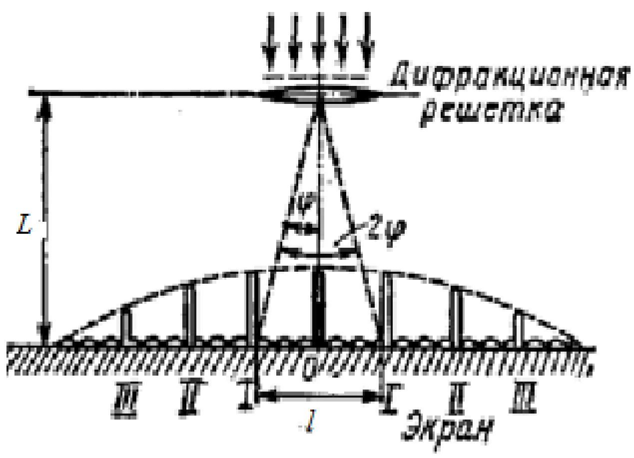
$$x = 2\ell tg\varphi = 2\ell\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 2\ell\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = 2\ell\frac{\frac{\lambda}{b}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2}},$$

$$x = \frac{2\ell\lambda}{\sqrt{b^2-\lambda^2}}.$$

Подставив числа, получим: $x = 5 \cdot 10^{-2}\,м$.

Задача 11. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны λ=0,5мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на L=l м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно l=20,2 см (рисунок). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на единицу длины; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение



1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d\sin\varphi = k\lambda,$$

где k - порядок порядок максимума. Отсюда

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi}$$

Из рисунка видно, что

$$2L\,\mathrm{tg}\,\varphi = l$$

Поэтому $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}$ и

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}}$$

Если $\dfrac{l}{2} << L$, то $\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L} \approx \sin\dfrac{l}{2L} \approx \dfrac{l}{2L}$ и

$$d \approx \frac{2Lk\lambda}{l}$$

В данном случае k=1. Поэтому

$$d = \frac{\lambda}{\sin \mathrm{arctg}\dfrac{l}{2L}}$$

или

$$d \approx \frac{2L\lambda}{l}$$

Подставляя данные, получим

d=4,95 мкм.

2. Число штрихов на 1 м найдем из формулы

$$n = \frac{1}{d} = \frac{l}{2L\lambda}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$n=2{,}02\text{-}10^5\ \text{м}^{-1}.$$

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала предельное значение $k_{пред}$ исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать $\frac{\pi}{2}$. Из формулы

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

запишем

$$k_{пред} = \frac{d}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{d}{\lambda}.$$

Подставляя сюда значения величин, получим

$$k_{пред} = \frac{d}{\lambda} = 9{,}9.$$

Число $\frac{d}{\lambda}$ обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении sin φ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,

$$k_{max}=9.$$

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{max}, т. е. всего $2k_{max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N = 2k_{\max} + 1$$

Подставляя значение k_{max} найдем

$$N=19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

синус этого угла:

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{k_{\max}\lambda}{d}$$

Отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin\frac{k_{\max}\lambda}{d}$$

Подставив сюда значения величин λ, d, k_{max} и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{max}=65{,}4°.$$

Задача 12. На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого равна $P = 0.6$, поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол $\alpha = 30^\circ$?

Решение

Частично поляризованная световая волна есть суперпозиция линейно поляризованной волны и неполяризованной волны.

После установки анализатора, интенсивность световой волны, прошедшей через него максимальна. Следовательно, в этом положении анализатор пропускает линейно поляризованную составляющую волны, таким образом интенсивность ее не изменится. Интенсивность неполяризованной составляющей уменьшится в 2 раза.

Обозначим интенсивность неполяризованной составляющей волны, падающей на анализатор через $I_{нп}$, интенсивность линейно поляризованной составляющей через $I_{лп}$, а интенсивность волны, прошедшей через анализатор через I_1. Тогда

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}.$$

Когда анализатор повернули на угол $\alpha = 30^\circ$, то в этом случае интенсивность неполяризованной составляющей по-прежнему уменьшится в 2 раза. Но при этом интенсивность линейно поляризованной составляющей будет равна по закону Малюса $I_{лп} \cos^2 \varphi$. Обозначая полную интенсивность волны, прошедшей через анализатор через I_2, запишем

$$I_2 = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$$

Нам известна степень поляризации волны, падающей на анализатор. С другой стороны эта величина равна

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ - максимальная интенсивность волны, прошедшей через анализатор при некотором его положении, $I_{\min}$ - минимальная интенсивность волны, прошедшей через анализатор при некотором его положении.

Очевидно, что

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{нп}$$

Подставляя эти уравнения в уравнение $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, найдем

$$P = \frac{I_{лп}}{I_{нп} + I_{лп}},$$

откуда $(I_{нп} + I_{лп})P = I_{лп}$ или $I_{нп}P = I_{лп}(1 - P)$

$$I_{нп} = I_{лп} \frac{1 - P}{P}$$

Подставляя в уравнение $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{нп} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$

найдем после преобразований

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} I_{лп} \frac{1 - P}{P} + I_{лп}}{\frac{1}{2} I_{лп} \frac{1 - P}{P} + I_{лп} \cos^2 \varphi}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1 - P}{P} + 2}{\frac{1 - P}{P} + 2\cos^2 \varphi}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 + P}{1 - P + 2P\cos^2 \varphi}$$

Ответ: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 + P}{1 - P + 2P\cos^2 \varphi}$

Задача 13. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны λ=500 нм Принимая Солнце за черное тело, определить. 1) энергетическую светимость *R* Солнца; 2) поток энергии ***Ф,*** излучаемый Солнцем.

Решение

1) Энергетическая светимость *R* черного тела выражается формулой Стефана — Больцмана

$$R = \sigma T^4$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

Выразив отсюда температуру Т и подставив ее в формулу $R = \sigma T^4$ получим

$$R = \sigma (b\lambda_{\max})^4.$$

Это ответ пункта 1. Произведя вычисления, найдем

$$R = 64 \text{ МВт/м}^2.$$

2) Поток энергии Ф, излучаемый Солнцем, есть энергия, излучаемая его поверхностью за единицу времени. Поскольку энергетическая светимость тела есть энергия, излучаемая единицей его поверхности за единицу времени, то поток энергии равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности.

$$\Phi = 4\pi r^2 R,$$

где r — радиус Солнца. Поскольку из пункта 1) задачи

$$R = \sigma (b\lambda_{\max})^4,$$

то

$$\Phi = 4\pi r^2 \sigma (b\lambda_{\max})^4.$$

Радиус Солнца считается известным и равен $r = 6.96 \cdot 10^8$ м, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$.

Подставив в формулу (3) значения π, r и M_e и произведя вычисления, получим

$$\Phi = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

Задача 14. Имеются две полости с малыми отверстиями одинаковых диаметров, равных $d = 1$ см. Стенки полостей теплонепроницаемы. Отверстия расположены друг против друга, расстояние между ними $\ell = 10$ см. В первой полости поддерживается температура $T_1 = 1700K$. Вычислить установившуюся температуру во второй полости.

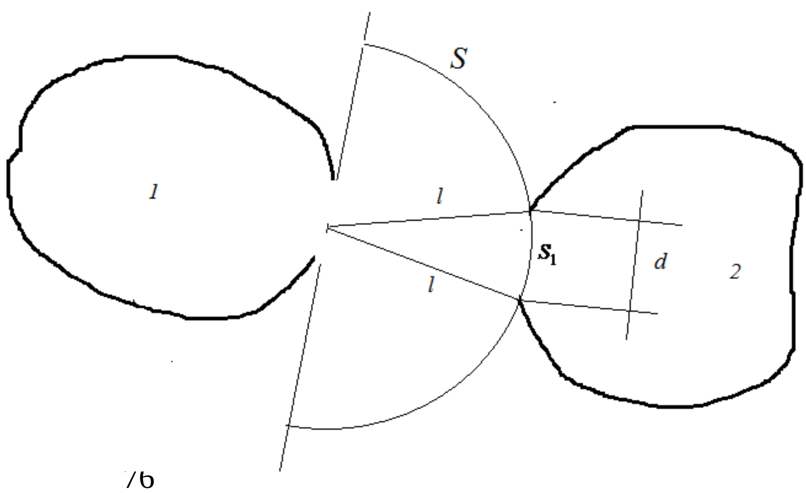
Решение

Так как отверстия малы, то можно рассматривать их как два чёрных тела. В таком случае первая полость излучает мощность

$$P_1 = SR_1,$$

где S - площадь отверстия полости, R_1 - ее энергетическая светимость. Поскольку $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, а по закону Стефана-Больцмана $R_1 = \sigma T_1^4$, то мы имеем

$$P_1 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_1^4$$



При установившейся температуре T_2 вторая полость будет излучать такую же мощность, которая согласно закону Стефана-Больцмана равна

$$P_2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma T_2^4.$$

Заметим, что поскольку полости находятся в равновесии, то излучаемая полостью 2 мощность P_2 равна той части мощности P_1, излучаемой полостью 1, которую поглощает полость 2. Мощность P_1излучается по всем направлениям в одну сторону, т.е., излучение попадает на полусферу S радиуса ℓ. Доля мощности n, попадающей во второе отверстие, будет соответствовать доле площади S_1 отверстия в общей площади указанной полусферы S:

$$n = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{2\pi\ell^2} = \frac{d^2}{8\ell^2},$$

т.е.
$$P_2 = nP_1 = P_1\frac{d^2}{8\ell^2}.$$

Подставляя в $P_1 = \frac{1}{4}\pi d^2\sigma T_1^4$ и $P_2 = \frac{1}{4}\pi d^2\sigma T_2^4$ в уравнение $P_2 = P_1\frac{d^2}{8\ell^2}$, находим

$$T_2^4 = T_1^4\frac{d^2}{8\ell^2},$$

откуда получаем ответ:

$$T_2 = T_1\left(\frac{d^2}{8\ell^2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 180\,K.$$

Задача 15. Во сколько раз увеличится мощность излучения чёрного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано: $\lambda_к = 760$ нм , $\lambda_ф = 380$ нм

Найти: $\frac{P_ф}{P_к}$

Решение

Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии излучения чёрного тела, согласно закону смещения Вина равна

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 2{,}90\cdot10^{-3}$ м$\cdot$К. Из этой формулы определяем температуру, при которой максимум энергии излучения приходится на красную $\lambda_к$ и фиолетовую $\lambda_ф$ границы видимого спектра

$$T_к = \frac{b}{\lambda_к},\quad T_ф = \frac{b}{\lambda_ф}.$$

Мощность излучения равна

$$P = RS,$$

где R- энергетическая светимость черного тела, S- пложадб поверхности излучения. В соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4,$$

для температур $T_к$ и $T_ф$ имеем $P_к = \sigma T_к^4 S$ и $P_ф = \sigma T_ф^4 S$.

Далее определяем $$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{T_ф}{T_к}\right)^{4.} = \left(\frac{\frac{b}{\lambda_ф}}{\frac{b}{\lambda_к}}\right)^{4.} = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right)^4.$$

Таким образом, ответ есть

$$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right)^4.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{0{,}76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$$

Ответ: $\frac{P_ф}{P_к} = \left(\frac{0{,}76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$

Задача 16. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны $\lambda_к = 332 нм$. Найти: а) работу выхода электрона для этого металла; б) длину световой волны λ, при которой задерживающий потенциал $U_з = 1B$.

Решение

а) Согласно уравнению Эйнштейна

$$\hbar\omega = h\nu = \frac{mv^2}{2} + A$$

для внешнего фотоэффекта красная граница определяется из условия равенства энергии фотона работе выхода электрона, т.е.

$$\hbar\omega_к = A$$

или, так как

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \omega_к = \frac{2\pi c}{\lambda_к},$$

то

$$A = \frac{hc}{\lambda_к},$$

где $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

б) Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} + A$$

или, поскольку $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, то

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A$$

Поскольку мы уже нашли, что $\frac{hc}{\lambda_к} = A$, то

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + \frac{hc}{\lambda_к}$$

Наличие задерживающей разности потенциалов $U_з$ при длине волны фотона λ означает, что, кинетическая энергия выбитого этим фотоном электрона $\frac{mv^2}{2}$ тратится на преодоление потенциальной энергии $eU_З$, то есть

$$\frac{mv^2}{2} = eU_з.$$

Из двух последних уравнений

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU_з.$$

Откуда $$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU_з}{hc}\right)^{-1}.$$

Вычисляя, получим $A_{вых} = 3{,}7 Эв$, $\lambda = 196 нм$.

Ответ: $A = \frac{hc}{\lambda_к}$, $\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU_з}{hc}\right)^{-1}$.

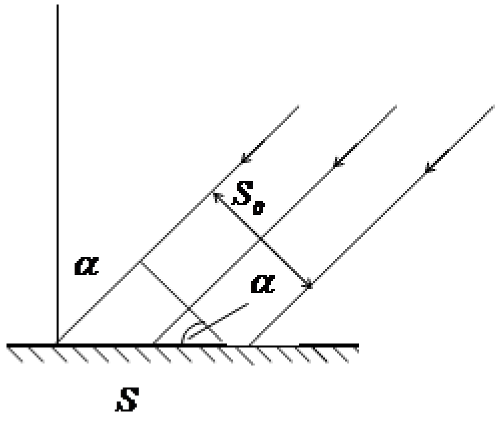
Задача 18. Плоская световая волна интенсивности $I = 0{,}20\, Вт/см^2$ падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}8$. Угол падения $\alpha = 45^\circ$ (рисунок). Определить с помощью корпускулярных представлений значение нормального давления, которое оказывает свет на эту поверхность.

Решение

Исходя из определения давления и применив к зеркальной поверхности второй закон Ньютона, запишем для давления

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n \Delta t}{S \Delta t} = \frac{(\Delta p)_n}{S \Delta t},$$

где F_n - проекция силы, с которой световая волна действует на поверхность, на направление нормали



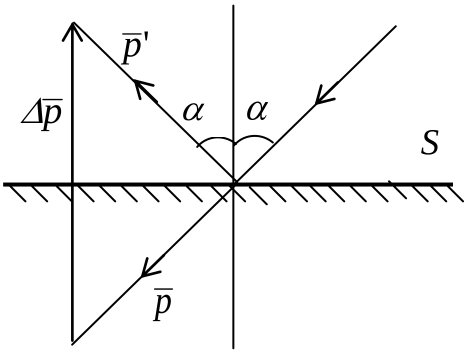
к поверхности, $(\Delta p)_n$ - проекция импульса Δp, сообщённого фотонами за время Δt зеркальной поверхности, на направление нормали к поверхности, S – площадь освещённой поверхности.

Величины S и $(\Delta p)_n$ зависят от угла падения α. Из рисунка видно, что

$$S = \frac{S_0}{\cos\alpha},$$

где S_0 - площадь поперечного сечения светового пучка.

Сделаем еще один рисунок, на котором изобразим импульс фотона, падающего на зеркальную поверхность и импульс фотона, отражённого от неё за время Δt: p и p', так что



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$$

есть импульс, переданный поверхности. Переходя к проекциям на направление нормали к поверхности, получаем

$$(\Delta p)_n = p'_n - p_n = p'\cos\alpha + p\cos\alpha = (p' + p)\cos\alpha,$$

тогда

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha \,.$$

Это есть импульс, переданный поверхности фотоном, который отражается.

При $\alpha = 0$ $P = P_0$, из формулы $P = \dfrac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha$ вытекает

$$P_0 = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}$$

С другой стороны из лекции нам известна формула

$$P_0 = \frac{I}{c}(1 + \rho)$$

Сравнивая эти две формулы, находим

$$\frac{(p' + p)}{S_0\Delta t} = \frac{I}{c}(1 + \rho)$$

Следовательно,

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0\Delta t}\cos^2\alpha = \frac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2\alpha$$

Ответ: $P = \dfrac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2\alpha$

Задача 19. Квантовая микрочастица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. При этом состояние микрочастицы описывается волновой функцией

$$\Psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{\pi}{l}x\right), 0\le x\le l\\ 0,\ x<0,\ x>l\end{cases}$$

1. Показать, что в данное состояние является стационарным состоянием и найти энергию микрочастицы в данном состоянии.
2. Какова вероятность нахождения микрочастицы в средней трети ямы?

Решение

1. Состояние, описываемое волновой функцией $\Psi(x)$ является стационарным, если функция $\Psi(x)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера. Из лекций мы знаем, что стационарное уравнение Шредингера внутри ямы имеет вид:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\Psi=0.$$

Где E – энергия частицы в данном стационарном состоянии. Проверим – выполняется ли это уравнение или нет для функции $\Psi(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)E=0$$

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{d^2}{dx^2}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)E=0$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)E=0$$

$$-\frac{\pi^2}{l^2}\frac{\hbar^2}{2m}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)E=0$$

Данное уравнение превращается в тождество, если положить

$$E=\frac{\pi^2}{l^2}\frac{\hbar^2}{2m}$$

Таким образом, мы показали, что данная волновая функция соответствует стационарному состоянию микрочастицы с энергией $E=\dfrac{\pi^2}{l^2}\dfrac{\hbar^2}{2m}$.

2. Согласно вероятностной интерпретации волновой функции, вероятность нахождения частицы в средней трети ямы, т.е. на участке $x\in\left[\dfrac{l}{3},\dfrac{2l}{3}\right]$ равна:

$$P=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\left|\Psi(x)\right|^2dx.$$

Подставляем в это выражение волновую функцию:

$$P=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\left|\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right|^2 dx=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}dx\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{l}x\Bigg|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\Bigg|_{l/3}^{2l/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

Ответ: 1. $E=\frac{\pi^2}{l^2}\frac{\hbar^2}{2m}$, *2.* $P=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$