

Нелинейные системы автоматического управления

Определение и особенности нелинейных систем

Нелинейной называется такая САУ, у которой зависимость между входными и выходными переменными одного или нескольких элементов описывается нелинейными уравнениями.

Все реальные элементы и системы, строго говоря, нелинейные, и к понятию линейной системы приходят путём линеаризации. Но на практике встречаются такие нелинейные элементы, к которым операция линеаризации по малому отклонению не применима. Такие нелинейности называют существенными. На рис. 3.1 приведены примеры таких нелинейностей. На рис.3.1а показана характеристика идеального реле, на рис.3.1б – характеристика с зоной насыщения, на рис.3.1в – нелинейная характеристика типа “модуль”.

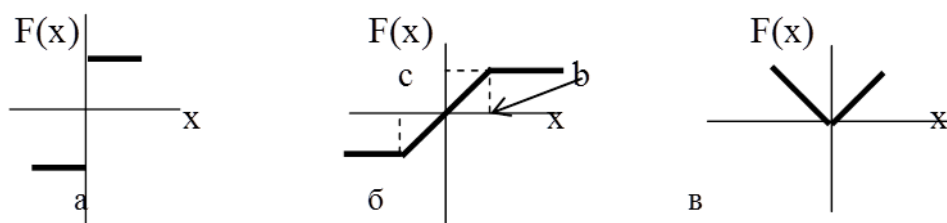


Рис. 3.1. Примеры существенных нелинейностей

Нелинейные системы, по сравнению, с линейными обладают целым рядом особенностей.

Прежде всего, к нелинейным дифференциальным уравнениям не применим принцип суперпозиции. Нелинейные дифференциальные уравнения не имеют каких – либо общих методик решения. Для исследования нелинейных дифференциальных уравнений нельзя использовать аппарат преобразований Лапласа и Фурье.

Судить об устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основании теорем Ляпунова, по дифференциальным уравнениям линеаризованных систем, можно только при малых отклонениях от установившегося движения, т е. можно

судить только об устойчивости в малом. Между тем, нелинейная система, устойчивая в малом, может быть неустойчивой при больших отклонениях. Различают, кроме устойчивости в малом, следующие виды устойчивости нелинейных систем. Система называется устойчивой в большом, если она устойчива при больших конечных по величине отклонениях. Система называется устойчивой в целом, если она устойчива при любых, не ограниченных по величине, начальных отклонениях. Если система асимптотически устойчива в целом, то её называют абсолютно устойчивой.

Особенностью нелинейных систем является возникновение в них, при некоторых начальных условиях, гармонических колебаний с определенной амплитудой и частотой, так называемых предельных циклов. Если предельный цикл устойчив, т.е. к нему сходятся все траектории сверху и снизу в определенном диапазоне начальных условий, то он называется автоколебаниями. Амплитуда и частота автоколебаний зависят только от параметров системы.

Рассмотрим некоторые методы исследования нелинейных САУ.

Метод фазовых портретов

Дифференциальное уравнение системы автоматического управления может быть преобразовано в систему n дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

с начальными условиями $x_i(0)$. Величины $x_i(t)$ можно рассматривать как координаты некоторой точки M , называемой изображающей точкой, в n -мерном пространстве. Изображающая точка при изменении координат описывает в этом пространстве некоторую кривую, которая называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, полученных при различных начальных условиях, называется фазовым портретом системы. Наглядное представление фазовых траекторий возможно только для систем, порядок которых не выше второго, или для систем, которые могут быть сведены к си-

стемам второго порядка. Исследование поведения нелинейных систем, ниже излагаемым методом, возможно только для автономных стационарных систем. Система является автономной, если ее правая часть явно не зависит от времени.

Уравнение автономной системы 2-го порядка можно записать в виде:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (3.2)$$

Полагая $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, получим:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = f(x_1, x_2) \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Фазовыми координатами являются выходная переменная системы x_1 и скорость её изменения x_2 . Разделим второе уравнение системы на первое и получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) однозначно определяет касательную к фазовой траектории во всех точках, кроме тех, в которых одновременно выполняются равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2) = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

В этих точках, которые называются особыми точками, не существует определённого направления касательной к траектории. В особых точках фазовые координаты равны нулю, следовательно, в этих точках система находится в положении равновесия. Для определения особых точек необходимо решить систему (3.5).

Выясним характер особых точек и оценим устойчивость положения равновесия системы в окрестности этих точек. Пусть $x_1(0)$ и $x_2 = 0$ есть координаты особой точки. Линеаризуем систему (3.3) в окрестности особой точки, полагая:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(0) + \eta, \\ x_2 = \zeta. \end{array} \right.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(0), 0) + a\eta + b\zeta, \quad (3.6)$$

где $a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(0), 0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(0), 0)$, с точностью до малых не выше первого порядка

малости. Подставим выражение (3.6) в (3.3) и, принимая во внимание, что координаты особой точки удовлетворяют уравнениям (3.5), получим систему уравнений первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \zeta \\ \dot{\zeta} = a\eta + b\zeta \end{cases} \quad (3.7)$$

Решив эту систему уравнений, можно определить движение линеаризованной системы и её фазовые траектории вблизи особой точки и оценить устойчивость положения равновесия. Нужно сразу сказать, что особых точек может быть несколько и судить об устойчивости каждого такого положения равновесия по линеаризованным уравнениям можно только в малом, т.е. при малых отклонениях координат изображающей точки от него. Если при этих малых отклонениях фазовые координаты системы стремятся к особой точке или остаются в непосредственной близости от нее, то данное положение равновесия устойчиво и область отклонений, при которых это утверждение справедливо, называется областью притяжения рассматриваемой особой точки.

Системе (3.7) соответствует характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0. \quad (3.8)$$

Движение системы вблизи от особой точки определяется типом корней уравнения (3.8).

1. Корни комплексно-сопряжённые $\lambda = h \pm j\omega$. Решение системы имеет в этом случае вид:

$$\begin{aligned} \eta &= m e^{ht} \sin(\omega t + \varphi), \\ \zeta &= mh e^{ht} \sin(\omega t + \varphi) + m\omega e^{ht} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Здесь m и φ – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Изображающая точка стремится к началу координат (особой точке) при $t \rightarrow \infty$, ес-

ли $h < 0$, и удаляется от него, если $h > 0$. Фазовые траектории для таких случаев приведены на рис. 3.2а и 3.2б. Особая точка такого рода называется фокусом. При $h < 0$ имеет место устойчивый фокус, при $h > 0$ – неустойчивый фокус.

2. Корни вещественные одного знака. Решение системы (3.7) имеет вид:

$$\begin{cases} \eta = m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \zeta = m_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Движение является аperiodическим. Изображающая точка асимптотически приближается к особой точке, если λ_1 и λ_2 – отрицательны, и удаляется от неё, если λ_1 и λ_2 – положительны. В частных случаях, когда $m_2 = 0$ из (3.9) получим:

$$\zeta = \lambda_1 \eta, \quad (3.10)$$

а когда $m_1 = 0$, получим:

$$\zeta = \lambda_2 \eta. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) и (3.11) определяют прямые, по которым движется изображающая точка в указанных случаях. Чтобы получить уравнение фазовых траекторий в общем случае, исключим из уравнений (3.9) время t . Для этого умножим первое уравнение сначала на λ_1 и вычтем из второго, а затем умножим первое уравнение на λ_2 и снова вычтем его из второго. В результате получим:

$$\begin{aligned} \zeta - \lambda_1 \eta &= m_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda_2 - \lambda_1), \\ \zeta - \lambda_2 \eta &= m_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 - \lambda_2), \end{aligned}$$

откуда, исключая t путём логарифмирования, находим уравнение фазовых траекторий в виде:

$$\zeta - \lambda_1 \eta = c (\zeta - \lambda_2 \eta)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (3.12)$$

$$\text{где } \frac{1}{c} = \frac{m_1 (\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}{m_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (3.13)$$

Определив из уравнения производную $\frac{d\zeta}{d\eta}$ в особой точке, можно убедиться,

что все фазовые траектории касаются в особой точке той из прямых (3.10) и (3.11), которая соответствует меньшему по абсолютной величине из корней характеристического уравнения. Фазовые траектории, соответствующие этому случаю показаны на рис. 3.2 в и рис. 3.2 г. Особая точка такого типа называется узлом. Если корни характеристического уравнения отрицательны, то имеет место устойчивый узел, если корни положительны – неустойчивый узел.

3. Корни чисто мнимые: $\lambda = \pm j\omega$. Решение системы (3.7) имеет вид:

$$\begin{cases} \eta = m \sin(\omega t + \varphi), \\ \zeta = m\omega \cos(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (3.14)$$

Из (3.14) нетрудно получить уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{\eta^2}{m^2} + \frac{\zeta^2}{m^2\omega^2} = 1. \quad (3.15)$$

Это уравнение определяет семейство эллипсов с полуосями m и $m\omega$ (рис.3.2д).

Такая особая точка называется **центром**. Такие фазовые траектории определяют наличие в системе незатухающих гармонических колебаний, т.е. соответствуют предельному циклу. Дальнейшие исследования заключаются в оценке устойчивости каждого предельного цикла. Если предельный цикл устойчив, то в системе происходят автоколебания. Если система имеет несколько предельных циклов, соответствующих одной и той же особой точке, то неустойчивые и устойчивые предельные циклы всегда чередуются.

4. Корни вещественные, различных знаков ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$). Прямые (3.10) и (3.11) являются в данном случае асимптотами для фазовых траекторий. Т.к. $\lambda_2 > 0$, то где бы не находилась изображающая точка в начальный момент, в конечном итоге она всегда будет удаляться от положения равновесия. Исключение составляет случай дви-

жения точно по асимптоте, но при малейшем отклонении от неё изображающая точка начнёт удаляться от положения равновесия. Такая особая точка называется **седлом**, она всегда соответствует положению неустойчивого равновесия. Фазовые траектории такого типа приведены на рис. 3.2е. Таким образом, сутью данного метода является выделение особых точек, построение фазовых траекторий и исследование фазового портрета системы с целью определения областей устойчивости и областей притяжения устойчивых предельных циклов.

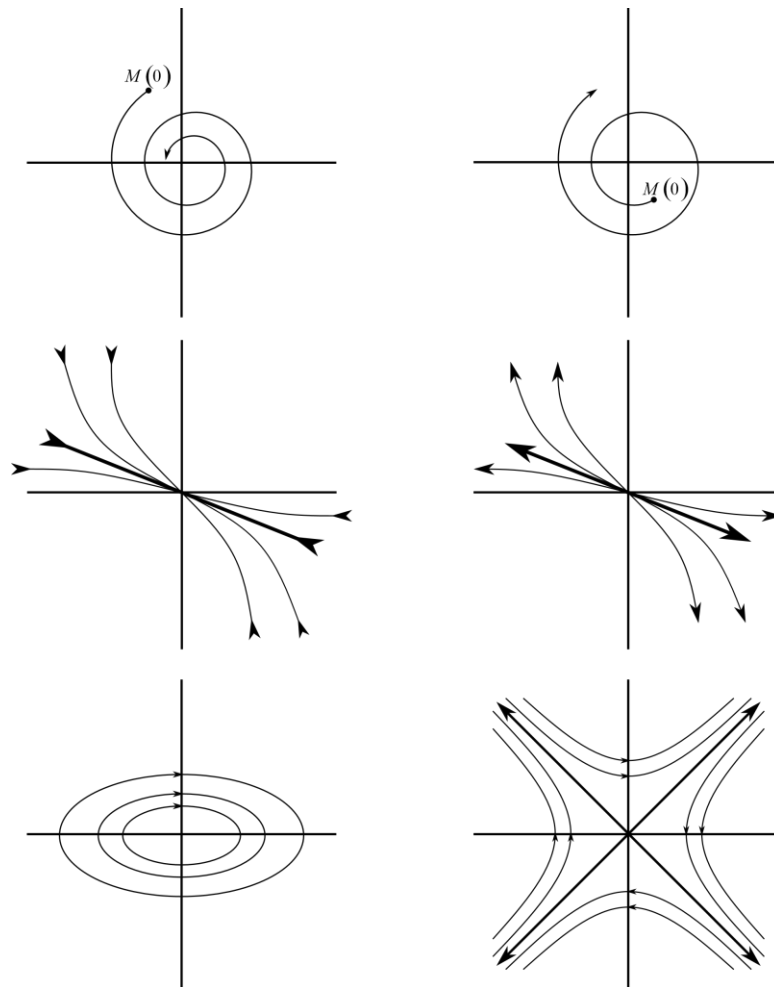


Рис. 3.2. Типы особых точек фазовой плоскости

Статическая характеристика нелинейного звена делит плоскость на участки, где дифференциальные уравнения системы имеют различный вид. Указанная характеристика называется, с этой точки зрения линией переключения.

Поэтому при построении фазовых траекторий необходимо помнить, что при переходе через линию переключения конечные значения переменных предыдущего участка являются начальными условиями для последующего участка.

Пример. Исследовать методом фазовых портретов систему стабилизации космического аппарата, структурная схема которой показана на рис. 3.3.

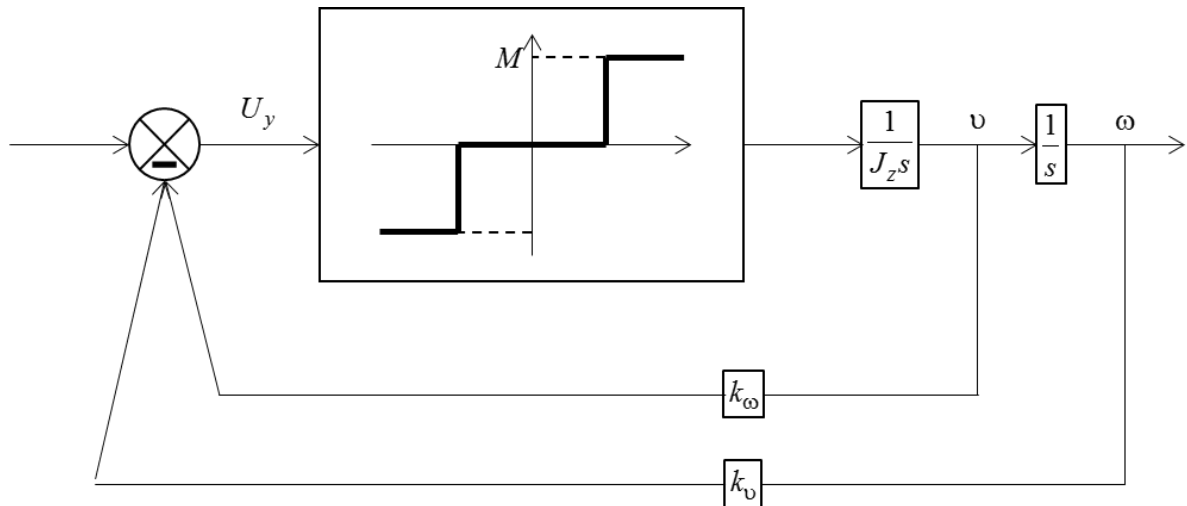


Рис. 3.3. Структурная схема системы стабилизации космического аппарата

Нелинейный элемент формирует момент, воздействующий на космический аппарат (КА) и этот момент определяется выражением:

$$M = \begin{cases} C \operatorname{sign}(U_y) & \text{при } |U_y| \geq b, \\ 0 & \text{при } |U_y| < b. \end{cases}$$

Система уравнений, составленная по структурной схеме, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \omega_z, \\ \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{M}{J_z}. \end{cases}$$

В этих выражениях J_z – момент инерции КА. Очевидно, что

$$M = M(U_y) = M(-k_v v - k_\omega \omega_z) = M(v, \omega_z).$$

Из системы уравнений получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\omega_z}{dv} = \frac{M(v, \omega_z)}{J_z \omega_z}.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} M(v, \omega_z) = 0, \\ \omega_z = 0. \end{cases}$$

получим, что координаты особой точки $(0,0)$ соответствуют началу координат. Решение системы уравнений при $|U_y| \geq b$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_z(t) = \omega_z(0) + \frac{M}{J_z} t, \\ v(t) = v(0) + \omega_z(0)t + \frac{M}{2J_z} t^2. \end{cases}$$

При $|U_y| < b$ получим:

$$\begin{cases} \omega_z(t) = \omega_z(0), \\ v(t) = v(0) + \omega_z(0)t. \end{cases}$$

Линия переключения определяется уравнением

$$|k_v v + k_\omega \omega_z| = b.$$

Выберем следующие численные значения параметров системы:

$$C = 40 \text{ Нм}, J_z = 1,05 \text{ кгм}^2, b = \pm 2 \text{ В}, k_v = 0,5 \text{ Вград}^{-1}, k_\omega = 0,1 \text{ Вград}^{-1} \text{ с}^{-1}.$$

По определённым решениям системы уравнений и с учётом ранее сделанных замечаний по величине начальных условий при переходе через линию переключения, построим фазовые траектории для $v(0) = -10 \text{ град}$ и $v(0) = -6 \text{ град}$.

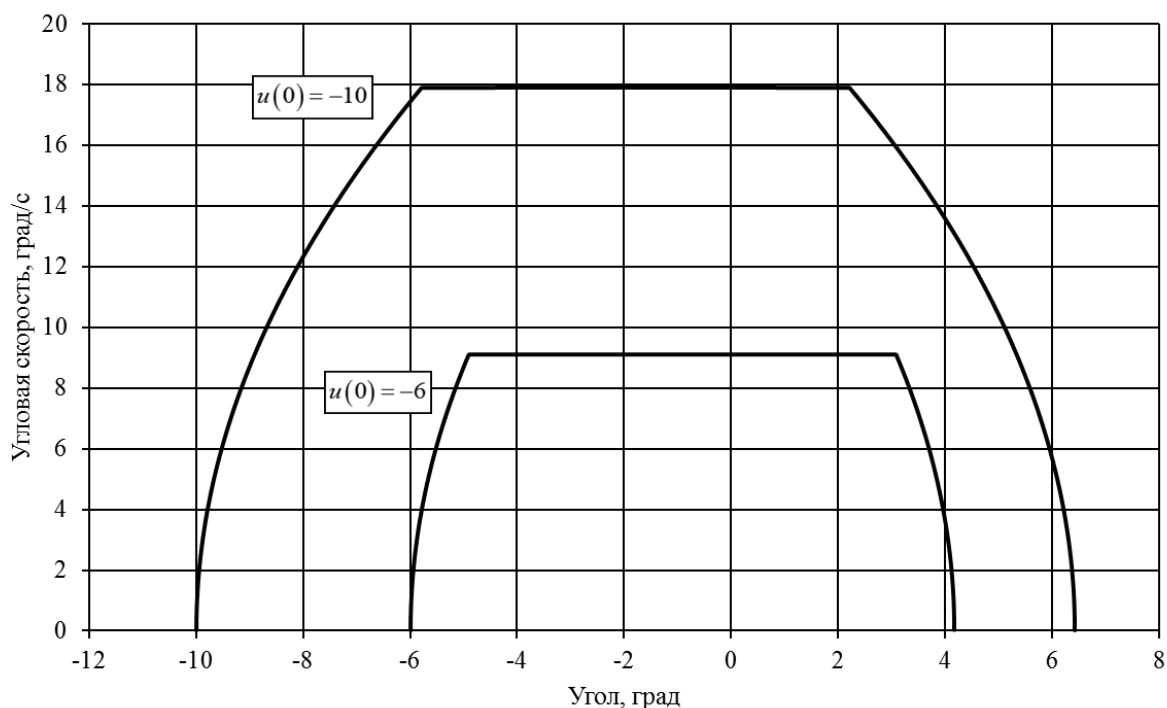


Рис. 3.4. Фазовые траектории системы стабилизации КА

Анализ полученных фазовых траекторий показывает, что они близки к типу устойчивого фокуса, но система по окончании процесса регулирования приходит не в особую точку, а в некоторую её окрестность, определяемую из уравнения линии переключения при $\omega_z = 0$. В рассматриваемой задаче точка покоя имеет координаты $(\pm 4 \text{град.}, 0)$.

Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет с достаточной для практики точностью исследовать устойчивость и точность нелинейных систем, используя методы, разработанные для линейных систем. Метод даёт возможность определить наличие автоколебаний, а также их частоту и амплитуду.

Нелинейная система представляется в виде соединения линейной и нелинейной части (рис. 3.5).

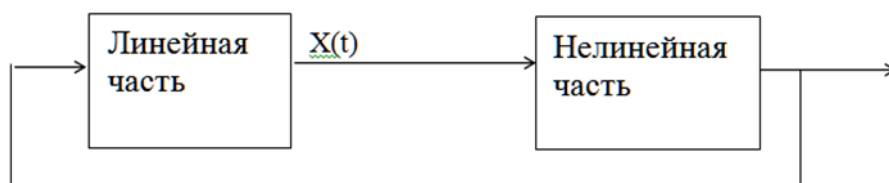


Рис.3.5. Схема нелинейной системы

Выходной сигнал нелинейной части системы в общем случае определяется выражением:

$$y = F(x, \dot{x}). \quad (3.16)$$

Обозначим как $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$ передаточную функцию линейной части. Система

уравнений примет вид:

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x + R(s)y &= 0 \\ y &= F(x, \dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Найдём условия, при которых на выходе линейной части системы возникают гармонические колебания вида:

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (3.18)$$

В этом случае сигнал $y(t)$ нелинейной части будет представлять собой также периодическую функцию, но отличную от синусоиды. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$y(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin i\omega t + b_i \cos i\omega t). \quad (3.19)$$

В этом выражении a_i и b_i – коэффициенты Фурье. Для симметричных нелинейностей $F_0 = 0$.

Основным условием, которое накладывает метод на линейную часть системы, является условие фильтра нижних частот. Считается, что линейная часть пропускает только первую гармонику колебаний. Данное допущение позволяет считать высшие гармоники в (3.19) несущественными и ограничиться рассмотрением только первой гармоники сигнала $y(t)$.

$$y(t) = a(A, \omega) \sin \omega t + b(A, \omega) \cos \omega t. \quad (3.20)$$

Из (3.18) следует, что $\sin \omega t = \frac{x(t)}{A}$ и т.к. $\frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t$, то выражение (3.20)

можно переписать в виде:

$$y(t) = \frac{a(A, \omega)}{A} x(t) + \frac{b(A, \omega)}{A\omega} \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.21)$$

Первое уравнение системы (3.17) примет вид:

$$(Q(s) + R(s)(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s))X(s) = 0. \quad (3.22)$$

В этом выражении:

$$\left. \begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{a(A, \omega)}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \\ q_1(A, \omega) &= \frac{b(A, \omega)}{\pi A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

где $\psi = \omega t$.

Результат замены нелинейности $F(x, sx)$ выражением:

$$(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s)X(s)$$

и называется гармонической линейризацией. Величины q и q_1 называются коэффициентами гармонической линейризации или просто гармоническими коэффициентами. Для однозначных нелинейностей обычно $q_1 = 0$. Формулы для гармонических коэффициентов, соответствующих типовым нелинейностям, приводятся в справочной литературе.

Принципиальное отличие гармонической линейризации от обычной состоит в том, что при обычной линейризации нелинейную характеристику заменяют прямой линией с определённой постоянной крутизной, а при гармонической линейризации – прямой линией, крутизна которой зависит от амплитуды входного сигнала нелинейного элемента.

Рассмотрим методику определения амплитуды и частоты автоколебаний.

1. В характеристическом уравнении системы, полученном из (3.22) делаем замену $s = j\omega$ и получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, \omega) + jq_1(A, \omega)) = 0.$$

2. Из полученного выражения выделяем вещественную и мнимую части и приравниваем их нулю, что, по критерию Михайлова, соответствует нахождению системы на колебательной границе устойчивости.

$$\begin{cases} U(q, q_1, \omega) = 0, \\ V(q, q_1, \omega) = 0. \end{cases}$$

3. Решение этой системы даёт частоту и значения гармонических коэффициентов. Если эти значения вещественны и положительны, то в системе существует предельный цикл. По значениям гармонических коэффициентов можно определить амплитуду предельного цикла.

4. Общим признаком устойчивости предельного цикла, т.е. существования автоколебаний, является равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица при полученных значениях амплитуды и частоты предельного цикла. Часто более удобно использовать условие устойчивости предельного цикла, в основе которого лежит критерий устойчивости Михайлова.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^* > 0. \quad (3.24)$$

Если это неравенство выполняется, то предельный цикл устойчив и в системе существуют автоколебания с определёнными выше амплитудой и частотой. Индекс "*" означает, что производные вычислены при уже известных значениях гармонических коэффициентов, амплитуды и частоты.

Пример. Допустим, что в уже рассмотренной выше системе стабилизации угла тангажа самолёта рулевой привод нелинейный и его структурная схема имеет вид, показанный на рис. 3.6.

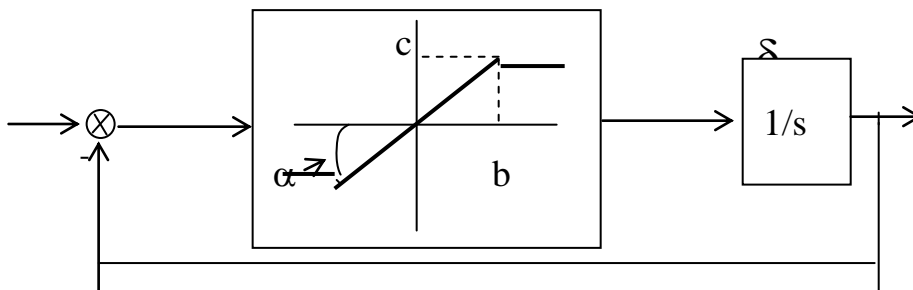


Рис. 3.6. Схема нелинейного рулевого привода

Зададим следующие параметры нелинейности скоростной характеристик рулевого привода: $b = 0,12$, $k_1 = \tan(\alpha) = \frac{c}{b} = 6,7$. Коэффициенты гармонической линеаризации этой нелинейности определяются выражениями:

$$\begin{cases} q(A) = \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \\ q_1(A) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Заменив в схеме нелинейную характеристику гармоническим коэффициентом, получим передаточную функцию рулевого привода:

$$W_{pn}(A) = \frac{q(A)}{s + q(A)}.$$

Подставим эту передаточную функцию в структурную схему системы стабилизации угла тангажа и определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{k_v k_c q(A)(T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4},$$

где:

$$\begin{aligned}
d_0 &= T^2; \\
d_1 &= T^2 q(A) + 2T\zeta; \\
d_2 &= 1 + (2T\zeta + k_c k_\omega T_1) q(A); \\
d_3 &= (1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) q(A); \\
d_4 &= k_c k_v q(A).
\end{aligned}$$

В характеристическом уравнении замкнутой системы сделаем замену $s = j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases}
U(\omega) = d_0\omega^4 - d_2\omega^2 + d_4 = 0, \\
V(\omega) = -d_1\omega^3 + d_3\omega = 0.
\end{cases}$$

Из второго уравнения системы получим выражение для частоты: $\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}$ и,

подставив его в первое уравнение, после преобразований получим

$$d_0 d_3^2 - d_1 d_2 d_3 + d_4 d_1^2 = 0.$$

Подставив сюда ранее определённые выражения для коэффициентов характеристического уравнения, можно получить квадратное уравнение относительно гармонического коэффициента, решив которое, найдём $q_1 = 2,7277$, $q_2 = 0,3103$.

По этим значениям можно вычислить для двух случаев все коэффициенты характеристического уравнения и определить частоты, соответствующие каждому значению $q(A)$. Получим: $\omega_1 = 20,948$, $\omega_2 = 10,534$.

Оба значения гармонического коэффициента и соответствующие частоты вещественны и положительны. Следовательно, в системе существуют два предельных цикла. Значения амплитуды предельного цикла определяются численно путём подбора такого значения $\frac{b}{A}$, при котором формула для коэффициента гармонической линеаризации даёт значение, равное ранее вычисленному. В рассматриваемом случае получим

- 1) $\frac{b}{A} = 0.3255$, $A = 0.3687$.
- 2) $\frac{b}{A} = 0.0364$, $A = 3.2967$.

Теперь оценим устойчивость предельных циклов. Используем неравенство, полученное из критерия Михайлова, для чего определим

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial A} &= -\omega^2(2T\zeta + k_c k_\omega T_1) \frac{\partial q}{\partial A} + k_c k_v \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 4d_0\omega^3 - 2d_2\omega; \\ \frac{\partial V}{\partial A} &= -d_0\omega^3 \frac{\partial q}{\partial A} + \omega(1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} &= -3d_1\omega^2 + d_3.\end{aligned}$$

Производная от коэффициента гармонической линеаризации, входящая в полученные выражения, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{2k_1}{\pi} \left\{ -\frac{b}{A^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} - \frac{b}{A^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \frac{b^3}{A^4 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} \right\}.$$

Расчёты по выше приведённым формулам показывают, что первый предельный цикл не устойчив и возникает он при $\nu(0) \approx 0,1166 (\approx 6,7^\circ)$. Если начальное отклонение меньше указанного, то процесс на входе нелинейного элемента затухает (рис. 3.7) и система устойчива.

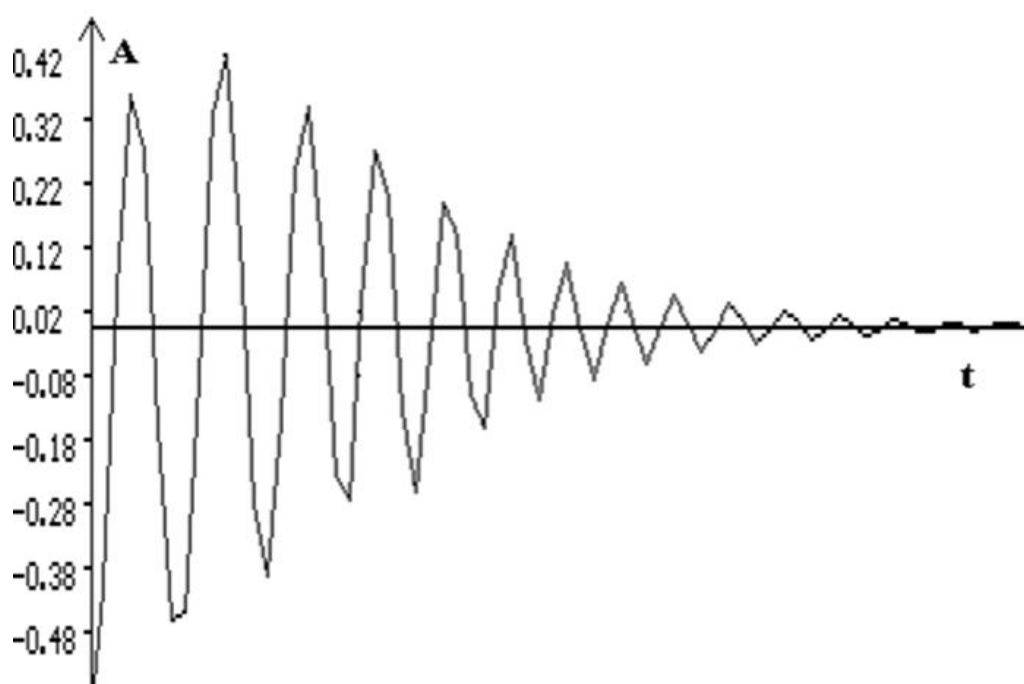


Рис. 3.7. Процесс на входе нелинейного элемента

Если начальное значение угла тангажа больше указанного, то процессы сходятся ко второму предельному циклу, который устойчив и, таким образом в системе возникают автоколебания (рис. 3.8).

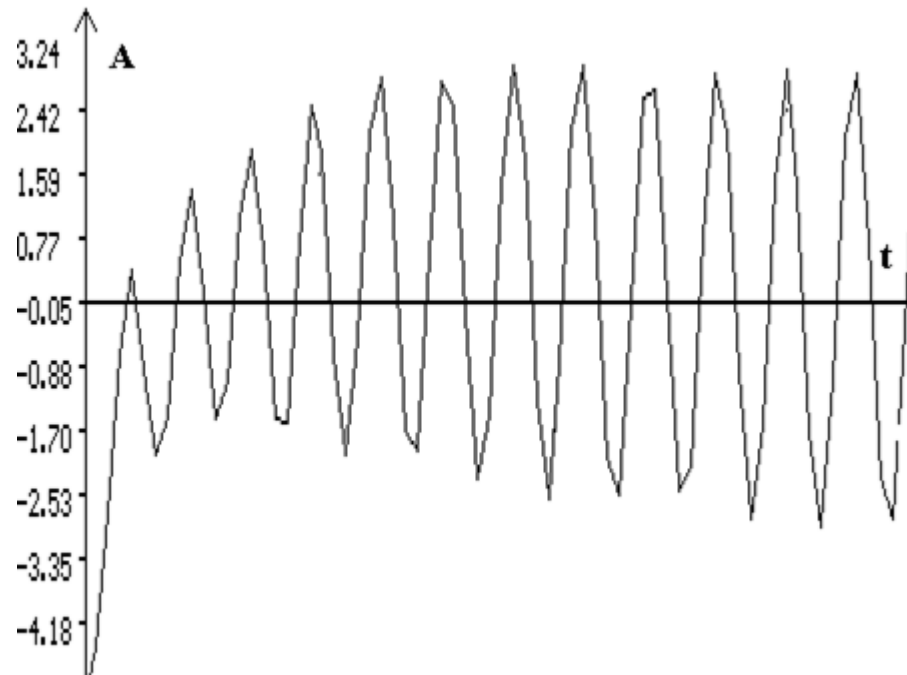


Рис. 3.8. Автоколебания на входе нелинейности

Путём моделирования определено, что область притяжения устойчивого предельного цикла лежит приблизительно в пределах $\nu(0) \approx 0,1167 - 1,7 (\approx 6,71^\circ - 80,2^\circ)$.

Исследование устойчивости нелинейных систем

Второй метод Ляпунова

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце 19-го века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

Прежде чем давать точные формулировки, кратко рассмотрим идею метода.

Предположим, что на устойчивость исследуется точка покоя $x_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$ системы (3.26). Если бы с возрастанием t точки всех траекторий приближались к началу координат или хотя бы не удалялись от него, то очевидно, рассматриваемая точка покоя была бы устойчивой.

Проверка выполнения этого условия не требует знания решений системы уравнений (3.26). Действительно, если ρ – расстояние от точки траектории x_i до начала координат, то $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}$ и:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} f_i. \quad (3.27)$$

Правая часть в (3.27) является известной функцией времени и координат процесса и, следовательно, можно исследовать её знак. Если окажется, что $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$, то точки на всех траекториях не удаляются от начала координат при возрастании времени и точка покоя устойчива.

Вместо $\frac{d\rho}{dt}$ обычно вычисляют для упрощения дифференцирования производную $\frac{d(\rho^2)}{dt}$, знак которой совпадает с $\frac{d\rho}{dt}$.

Однако точка покоя может быть устойчивой и даже асимптотически устойчивой и при немонотонном приближении к ней точек траектории с возрастанием времени. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно взглянуть на траектории типа центра или устойчивого фокуса, рассмотренные при изучении метода фазовых портретов. Поэтому вместо функций ρ А. М. Ляпунов рассматривал некоторые функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющиеся в некотором смысле «обобщёнными расстояниями» до начала координат.

Каждая

V – функция определена в некоторой области G , заданной неравенством

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < L,$$

где L – некоторая постоянная величина.

Прямой метод Ляпунова об изучении устойчивости сводится к построению таких функций V векторной переменной $X(x_1, \dots, x_n)$, полные производные которых по времени, вычисленные согласно (3.27), обладают некоторыми специфическими свойствами.

Всякую функцию V назовём знакопостоянной, если она, кроме нулевых значений, принимает всюду в области G значения только одного знака.

Всякую знакопостоянную функцию, принимающую нулевое значение только в начале координат, назовём знакоопределённой и учитывая её знак – определённо положительной или определённо отрицательной.

Наряду с функциями V будем рассматривать их полные производные по времени:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \quad (3.28)$$

Ляпуновым были доказаны следующие две фундаментальные теоремы:

Теорема 1. Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что возможно найти знакоопределённую функцию V , производная (3.28) которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущённое движение устойчиво.

Теорема 2. Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что возможно найти знакоопределённую функцию V , производная (3.28) которой в силу этих уравнений была бы функцией знакоопределённой противоположного с V знака, то невозмущённое движение устойчиво асимптотически.

Функции V , удовлетворяющие условиям этих теорем, называются функциями Ляпунова.

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y + 6xy, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 14x^2y. \end{cases}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде $V = 7x^2 + 3y^2$. Эта функция является знако-постоянной. Её производная:

$$\frac{dV}{dt} = 14x(-3y + 6xy^2) + 6y(7x - 14x^2y) \equiv 0.$$

Условия теоремы 1 выполнены, следовательно точка покоя устойчива.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x + kb(t)y, \\ \frac{dy}{dt} = -b(t)x + c(t)y, \end{cases}$$

где $a(t) \leq 0, c(t) \leq 0, k > 0$. Функцию Ляпунова выберем в виде $V = x^2 + ky^2$. Найдём производную:

$$\frac{dV}{dt} = 2x(a(t)x + kb(t)y) + 2ky(-b(t)x + c(t)y) = 2(a(t)x^2 + kc(t)y^2) \leq 0.$$

Выполнены условия теоремы 2, следовательно, рассматриваемая точка покоя асимптотически устойчива.

Трудность применения прямого метода Ляпунова к решению прикладных задач связана с отсутствием широко разработанных общих приёмов построения функций Ляпунова в тех или иных случаях. Наибольшее распространение для анализа устойчивости САУ находят функции Ляпунова в виде квадратичных форм:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j, \text{ при } p_{ij} = p_{ji}. \quad (3.29)$$

В матричной форме можно записать:

$$V = x^T P x,$$

$$\text{где } P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма, представленная в виде (3.29) или соответствующей ей матрицы P является знакопостоянной - положительно определённой, если $x^T P x > 0$ отрицательно определённой, если $x^T P x < 0$ или знакоопределённой - знакоположительной, если $x^T P x \geq 0$ и знакоотрицательной, если $x^T P x \leq 0$.

Укажем признаки, по которым можно проверить - какое из указанных выше свойств имеет изучаемая квадратичная форма или соответствующая ей матрица. Найдём собственные числа матрицы $P - \lambda_i$, решив известное уравнение $\det(\lambda I - P) = 0$, где I - единичная матрица. Если все собственные числа рассматриваемой матрицы строго больше нуля, то квадратичная форма определённо положительная, если все собственные числа строго отрицательны, то квадратичная форма определённо отрицательная. При $\lambda_i \geq 0$ квадратичная форма знакоположительна, а при $\lambda_i \leq 0$ - знакоотрицательна.

Сформулируем ещё один признак определённой положительности квадратичной формы, известный как критерий Сильвестра.

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы каждый из угловых (диагональных) миноров

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

матрицы P был положителен.

Если задача о построении функций Ляпунова для какого-либо класса систем решена, то прямой метод можно рассматривать как наиболее эффективный метод исследования устойчивости. Его особая ценность проявляется в тех случаях, когда интересуются исследованием устойчивости в большом, т.е. при любых конечных отклонениях. Кроме того, этот метод может применяться к изучению устойчивости тех систем управления, которые содержат существенно нелинейные и неаналитические (разрывные) характеристики. Во всех этих случаях возможность применения метода первого приближения исключена.

Следует помнить, что если какая-либо задача об устойчивости в теории управления может быть решена прямым методом, то это решение не будет однозначным. Действительно, функции Ляпунова определены столь общими свойствами, что их может быть построено бесчисленное множество. Следовательно, условия устойчивости, к которым приводит прямой метод, являются условиями достаточными и их нарушение ещё не будет означать неустойчивости системы. Мы уже говорили о том, что свобода выбора функций Ляпунова позволяет строить критерии устойчивости систем, в которых некоторые нелинейные элементы не могут быть точно охарактеризованы. Любой другой известный метод исследования устойчивости не даёт возможности решить задачу об устойчивости в большом в этом случае. Но полученное решение, в силу указанной многозначности функций Ляпунова и отсутствия условия необходимости, может оказаться неконструктивным, т.е. таким, которое предъявляет чрезмерно высокие требования к параметрам регулятора, реализовать которые практически невозможно.

Вопрос о конструктивности решений задачи прямым методом в каждом конкретном случае следует подвергать особому рассмотрению.

Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова

Абсолютная устойчивость - это устойчивость в целом нелинейной системы при задании её нелинейностей принадлежностью к определённому классу. При этом понимается задание нелинейности не конкретной характеристикой, а в более общем виде - с точностью только до определения её класса. Типичным случаем такого задания является задание статической нелинейной характеристики тем, что она должна находиться в пределах определённого угла между осью абсцисс и некоторой прямой, как показано на рис. 3.9. При этом конкретная форма нелинейной характеристики может быть любой, в том числе и непостоянной. При таком определении характеристики говорят, что она задана в угле $(0, k)$. Здесь 0 и k - тангенсы углов наклона линий, ограничивающих этот угол.

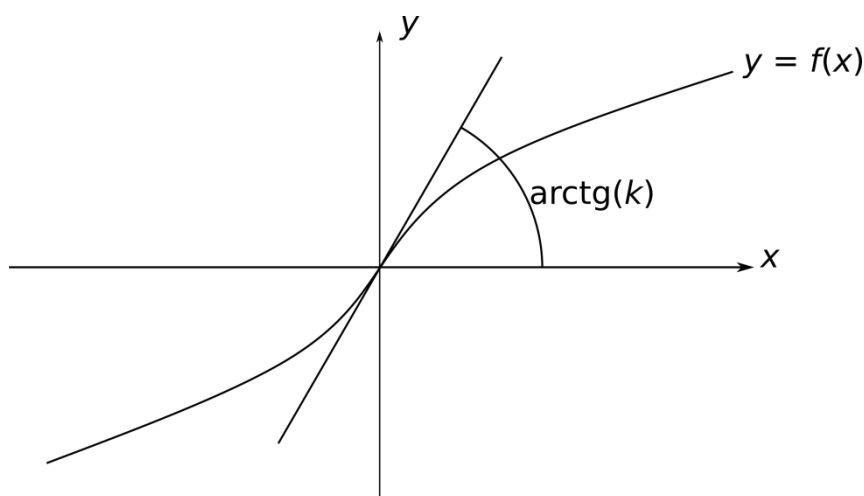


Рис. 3.9. Нелинейная характеристика, заданная в угле $(0, k)$

Исследование систем при таком неконкретном задании нелинейностей вызвано не только чисто математическими соображениями в смысле упрощения задачи, но имеет и практический смысл в тех случаях, когда нелинейности известны неточно или могут изменяться.

Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова, предложенный в 1959 г., относится к системам, которые можно представить в виде соединения линейной части с передаточной функцией $W_{\text{л}}(s)$ и безынерционного нелинейного звена $f(x)$ (рис. 3.10а).

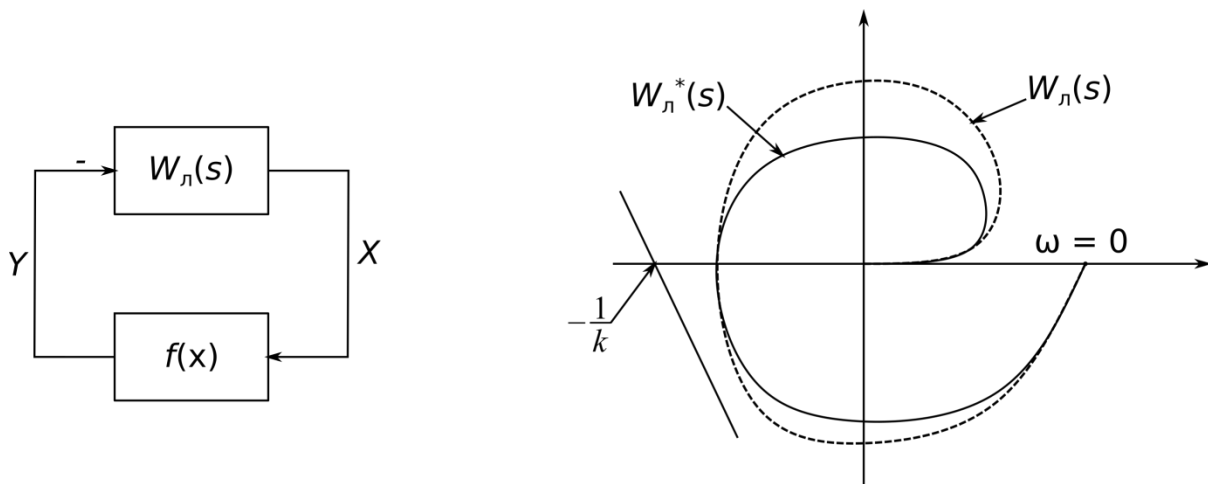


Рис. 3.10. Структурная схема системы и преобразованная АФЧХ

Характеристика нелинейного звена является однозначной и лежит в угле $(0, k)$. Минус на входе $W_{\text{л}}(s)$ показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Для суждения об устойчивости по этому критерию используется преобразованная амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = \text{Re}(W_{\text{л}}(j\omega)) + j\omega \text{Im}(W_{\text{л}}(j\omega)). \quad (3.30)$$

Эта характеристика получается из АФЧХ $W_{\text{л}}(j\omega)$ линейной части системы путём умножения ординат последней на текущее значение частоты ω (рис.3.10б).

Рассмотрим вначале критерий В. М. Попова, когда линейная часть системы устойчива.

Нелинейная система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку $(-\frac{1}{k}, j_0)$ можно провести хотя бы одну прямую линию так, чтобы вся характеристика $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ находилась от неё справа. Такая линия

называется линией Попова. На рис. 3.10b показан случай, когда имеет место абсолютная устойчивость.

В случае сплошной линии на рис. 3.11, критерий абсолютной устойчивости не выполняется. Разумеется, тем более он не выполняется, если характеристика $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ охватывает точку $(-\frac{1}{k}, j_0)$ (пунктир на рис.3.11).

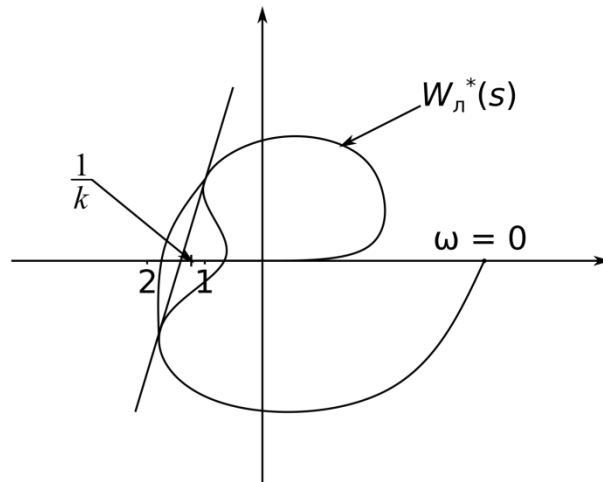


Рис. 3.11 АФЧХ системы, не обладающей абсолютной устойчивостью

Критерий В. М. Попова является достаточным, т.е. он даёт часть области абсолютной устойчивости и его невыполнение может не означать отсутствия абсолютной устойчивости в какой – либо другой области.

Представляет интерес сравнить условия абсолютной устойчивости В. М. Попова с условиями устойчивости линейной системы, получаемой при предположении, что характеристика $f(x)$ в угле $(0, k)$ является линейной. Это значит, что нелинейное звено $f(x)$ заменяется идеальным линейным звеном с коэффициентом передачи k_0 , лежащим в пределах $0 \leq k_0 \leq k$.

Передаточная функция для такой разомкнутой системы равна $k_0 W_{\text{л}}(s)$. Согласно критерию Найквиста, условие устойчивости рассматриваемой линейной системы заключается в том, что АФЧХ $k_0 W_{\text{л}}(s)$ не должна охватывать точку $(-1, j_0)$. Это эквивалентно

условию, что АФЧХ $k_0 W_{\text{л}}(j\omega)$ линейной части системы не охватывает точку $(-\frac{1}{k}, j_0)$.

Действительно, граница устойчивости по Найквисту соответствует равенству

$$k_0 W_{\text{л}}(j\omega) = -1 \text{ т.е. } W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{k_0}. \text{ При изменении величины } k_0 \text{ в диапазоне от } 0 \text{ до } k$$

точка $(-\frac{1}{k}, j_0)$ перемещается по действительной оси от $-\infty$ до $-\frac{1}{k_0}$. Поэтому условием

устойчивости линейной системы при $k_0 = 0 \dots k$ является прохождение характеристики

$$W_{\text{л}}(j\omega) \text{ через действительную ось правее точки } (\frac{1}{k}, j_0), \text{ т.е. непересечение ею действи-$$

тельной оси левее этой точки.

Характеристики $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Поэтому сформулированное условие устойчивости линейной системы полностью относится и к характеристике $W_{\text{л}}^*(j\omega)$.

Таким образом, достаточное условие устойчивости при произвольной форме однозначной нелинейной характеристики $f(x)$ в угле $(0, k)$ оказывается строже необходимого и достаточного условия в случае линейной характеристики $f(x)$ в этом угле тем, что помимо необходимости нахождения характеристики $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ правее точки

$$(-\frac{1}{k}, j_0) \text{ требует ещё возможности проведения через эту точку линии Попова. Напри-}$$

мер, в случае АФЧХ, изображённой на рис.3.11 сплошной линией, система устойчива при линейной характеристике в угле $(0, k)$, но не обладает абсолютной устойчивостью.

Точка 1 на действительной оси определяет критический по устойчивости коэффициент передачи k_0 для линейной системы, а точка 2 – критическое значение k по условию

абсолютной устойчивости в случае произвольной нелинейной характеристики $f(x)$. Та-

ким образом, при произвольной форме $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ абсолютная устойчивость обеспечивается

в меньшем угле, чем устойчивость в случае линейной системы.

Для того, чтобы распространить рассмотренный критерий на системы с неустойчивой линейной частью, преобразуем предварительную схему системы, как это показано на рис.3.12а. Здесь в схему введены два фиктивных звена с коэффициентом передачи k_ϕ . Они ничего не изменяют в системе, так как их выходные сигналы взаимно компенсируют друг друга на входе линейной части системы.

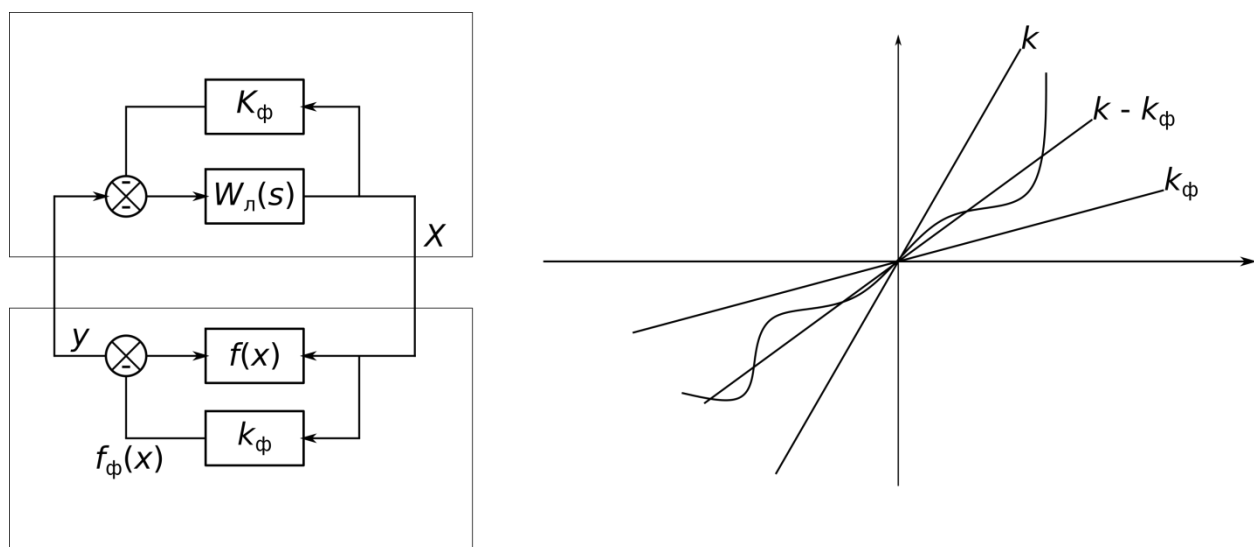


Рис. 3.12. Система с неустойчивой линейной частью

В результате получаем систему, состоящую из линейной части с передаточной функцией:

$$W_{л\phi}(s) = \frac{W_l(s)}{1 + k_\phi W_l(s)} \quad (3.31)$$

и нелинейной части с характеристикой:

$$f_\phi(x) = f(x) - k_\phi x. \quad (3.32)$$

Выберем величину коэффициента передачи k_ϕ такой, чтобы за счёт введённой отрицательной обратной связи вокруг $W_l(s)$ новая линейная часть оказалась устойчивой, т.е. все полюсы передаточной функции $W_{л\phi}(s)$ были левыми.

Отметим сразу, что если последнее не может быть осуществлено, то это уже означает отрицательный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости исходной систе-

мы, так как при этом она оказывается неустойчивой даже при линейной характеристике $f(x)$ любого наклона.

Применим к преобразованной системе с устойчивой линейной частью критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова и получим следующее условие абсолютной устойчивости исходной системы с неустойчивой линейной частью:

система абсолютно устойчива, если через точку $\left(-\frac{1}{k-k_\phi}, j_0\right)$ можно провести прямую линию, проходящую слева от характеристики $W_{\text{лф}}^*(j\omega)$. Абсцисса указанной точки определена в соответствии с соотношением (3.32). При этом k определяется углом, в котором задана характеристика $f(x)$.

В соответствии с критерием В. М. Попова характеристика $f_\phi(x)$ должна лежать в угле, ограниченном с одной стороны осью абсцисс. С учётом (3.32) это означает, что характеристика $f(x)$ должна лежать вне угла $(0, k_\phi)$. Таким образом, сформулированный критерий должен быть дополнен требованием, чтобы **характеристика $f(x)$ лежала в угле (k_ϕ, k)** , как показано на рис. 3.12б. Характеристика $f_\phi(x)$ при этом будет лежать в угле $(0, (k - k_\phi))$.

В частном случае, когда передаточная функция $W_{\text{л}}(s)$ линейной части имеет мнимые или нулевые полюсы при остальных левых полюсах, изложенный критерий абсолютной устойчивости совпадает с ранее сформулированным для случая устойчивой линейной части, но должен быть дополнен двумя следующими условиями.

Во-первых, должна обеспечиваться так называемая **предельная устойчивость**, под которой понимается устойчивость линейной системы с передаточной функцией $kW_{\text{л}}(s)$ при $k \rightarrow \infty$.

Во-вторых, исключается касание характеристикой нелинейного звена оси абсцисс, т.е. абсолютная устойчивость рассматривается в угле (ε, k) где ε -бесконечно малая величина.

Критерий В. М. Попова можно распространить на более общий случай нелинейности, когда характеристика лежит в угле (k_1, k_2) , где k_1 может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 3.13а). Этот случай сводится к основному случаю с характеристикой $f(x)$ в угле $(0, k)$. если представить нелинейность в следующем виде:

$$f(x) = f_{\Phi}(x) + k_1 x. \quad (3.33)$$

Очевидно, что новая нелинейность $f_{\Phi}(x)$ лежит в угле $(0, k)$, где $k = k_2 - k_1$.

В результате получим схему, приведённую на рис. 3.13б, где нелинейность $f_{\Phi}(x)$ лежит в угле $(0, k)$, а линейная часть имеет передаточную функцию:

$$W_{\text{лф}}(s) = \frac{W_{\text{л}}(s)}{1 + k_1 W_{\text{л}}(s)}. \quad (3.34)$$

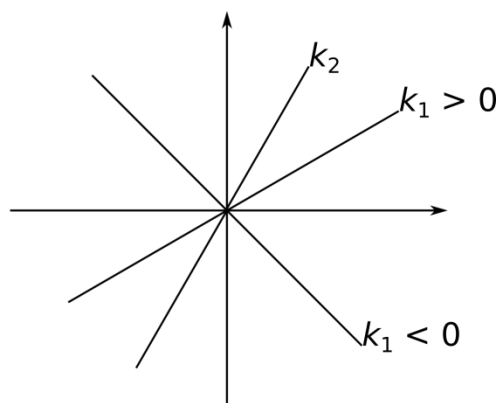
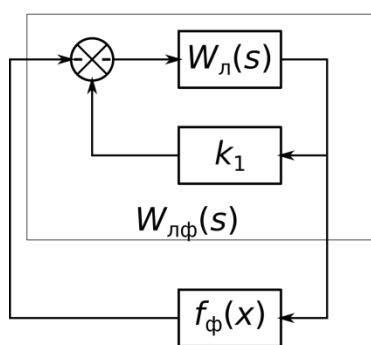


Рис.3.13 Оценка абсолютной устойчивости при произвольном угле (k_1, k_2)

Пример. Определить, будет ли абсолютно устойчивой система, если передаточная функция линейной части определяется выражением

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{200}{s(0.0001s^2 + 0.101s + 1)},$$

а нелинейная характеристика показана на рис.3.14а.

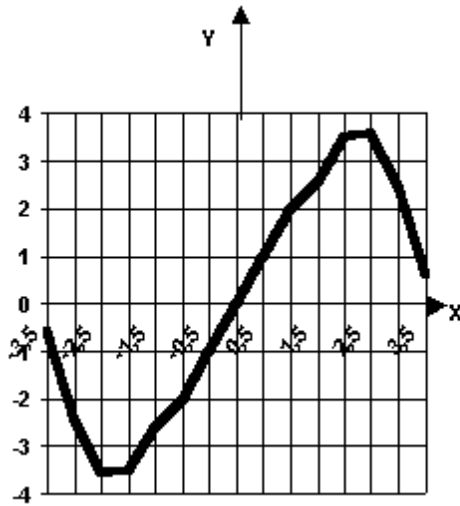


Рис.3.14а. Нелинейная характеристика

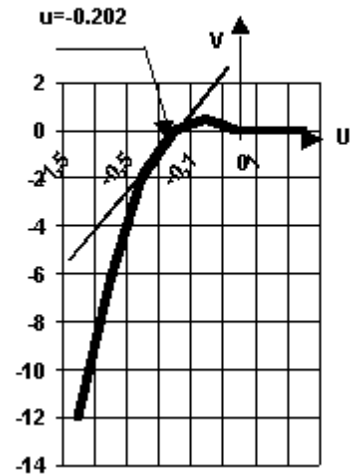


Рис. 3.14б. График $W_{л}(j\omega)$

Преобразованная АФЧХ линейной части приводится к виду

$$W_{л}^*(j\omega) = \operatorname{Re}(W_{л}(j\omega)) + j\omega \operatorname{Im}(W_{л}(j\omega)) =$$

$$= -\frac{20.2}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2} - j \frac{200(1 - 0.0001\omega^2)}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2}.$$

График $W_{л}^*(j\omega)$ изображён на рис. 3.14б. Предельная точка, через которую может пройти прямая Попова при условии, что $W_{л}^*(j\omega)$ будет располагаться справа, имеет абсциссу $-0,202$. Это означает, что если нелинейная характеристика однозначна и находится в пределах $0 < \alpha < \alpha_{\max}$, где $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{0,202}\right) = 78,6^\circ$, то система абсолютно устойчива независимо от формы нелинейной характеристики.

Основное достоинство метода исследования абсолютной устойчивости замкнутых систем, имеющих вид показанный на рис. 3.9, при отсутствии входного сигнала заключается в том, что для его применения достаточно знать лишь частотные характеристики линейной части, а поэтому он пригоден для анализа систем высокого порядка.