

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Г. А. Филиппов, С. А. Ишков, П. В. Фадеенков
**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
В СРЕДЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ SIMInTECH**

САМАРА 2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Г. А. Филиппов, С. А. Ишков, П. В. Фадеенков
**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
В СРЕДЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ SIMInTECH**

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной программе высшего образования по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация, 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

САМАРА
Издательство Самарского университета
2025

УДК 629.053+629.7.058.47

ББК 39.53-05+39.641

Ф 53

Рецензенты: д-р техн. наук, доцент Г. М. Макарьянц;

к-т техн. наук, В. Е. Юрин

Филиппов, Григорий Александрович

Ф 53 Исследование систем автоматического управления в среде динамического моделирования технических систем SimInTech: учебное пособие / Г. А. Филиппов, С. А. Ишков, П. В. Фадеенков. – Самара: Издательство Самарского университета, 2025. – 119 с.

ISBN 123-4-5678-9876-5

Учебное издание включает в себя достаточные методические сведения, необходимые для выполнения лабораторных и практических работ по дисциплине «Теория автоматического управления» и состоит из трёх глав, в которых излагаются математические модели возмущённого движения летательного аппарата, основы работы в современной российской среде динамического моделирования SimInTech и методические указания к выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине «Теории автоматического управления».

Учебное издание предназначено для обеспечения подготовки бакалавров, магистров и специалистов института авиационной и ракетно-космической техники Самарского университета по профилям «Ракетно-космические системы» и «Перспективные ракетно-космические комплексы» образовательной программы по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, профилям «Ракетные транспортные системы» и «Пилотируемые и автоматические космические аппараты и системы» образовательной программы по направ-

лению подготовки 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, профилю «Динамика и управление движением аэрокосмических систем» образовательной программы по направлению подготовки 24.04.02 Системы управления движением и навигация. Пособие может использоваться при выполнении практических заданий, научно-исследовательской и выпускной квалификационной работы.

Подготовлено на кафедре динамики полёта и систем управления.

УДК 629.053+629.7.058.47

ББК 39.53-05+39.641

ISBN 123-4-5678-9876-5

© Самарский университет, 2025

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	8
1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНО- ГО АППАРАТА	10
1.1 Уравнения движения летательного аппарата . . .	10
1.2 Линеаризация уравнений движения в окрестности опорной траектории	12
1.2.1 Уравнения продольного возмущённого дви- жения летательного аппарата	13
1.2.2 Уравнения бокового возмущённого движе- ния летательного аппарата	16
1.3 Динамика продольного возмущённого движения летательного аппарата	17
1.3.1 Передаточные функции в короткопериоди- ческом движении летательного аппарата .	19
1.3.2 Передаточные функции в длиннопериоди- ческом движении летательного аппарата .	22
1.4 Динамика бокового возмущённого движения лета- тельного аппарата	24
1.4.1 Линеаризация уравнений бокового возму- щённого движения летательного аппарата .	24
1.4.2 Реакция летательного аппарата на откло- нение органов управления боковым движением	28
1.5 Математическая модель углового движения кос- мического аппарата	34

2	ОСНОВЫ РАБОТЫ В ПАКЕТЕ SimInTech	38
2.1	Палитры готовых компонентов SimInTech для моделирования работы систем автоматического управления	39
2.1.1	Палитра «Источники»	40
2.1.2	Палитра «Операторы»	40
2.1.3	Палитра «Вывод данных»	42
2.1.4	Палитра «Нелинейные»	42
2.1.5	Палитра «Динамические»	46
2.1.6	Палитра «Анализ и оптимизация»	49
2.1.7	Окно «Генерация сигналов»	51
2.1.8	Окно «Параметры расчёта»	54
2.2	Формализация линейных моделей возмущённого движения летательного аппарата на тестовых приборах	55
3	ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	69
3.1	Лабораторная работа №1	71
3.2	Лабораторная работа №2	78
3.3	Лабораторная работа №3	94
3.4	Лабораторная работа №4	99
3.5	Лабораторная работа №5	105
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	118

ВВЕДЕНИЕ

Учебное издание предназначено для обучающихся младших и старших курсов, выполняющих лабораторные и практические работы по дисциплине «Теория автоматического управления», а также может быть использовано при подготовке выпускных квалификационных работ бакалавра и магистра. Учебное издание будет полезно всем обучающимся, интересующимся проблемами моделирования работы систем управления техническими объектами, а также оптимизацией параметров систем управления.

В первой главе учебного издания приводятся основы динамики полёта летательного аппарата. Кратко записаны математические модели, применяемые для исследования динамики движения летательного аппарата, и приведены основные соотношения, позволяющие перейти от уравнений возмущённого движения к передаточным функциям летательного аппарата, на базе которых могут быть выбраны программы управления движением летательного аппарата и построены структурные схемы систем управления летательного аппарата.

Во второй главе учебного издания приводятся минимально необходимые сведения об основах работы в современной российской среде SimInTech, специально предназначенной для моделирования систем управления, представленных в виде структурных схем и передаточных функций. Более подробные сведения о среде SimInTech опубликованы в соответствующей литературе и интегрированной справочной системе, которая также доступна в сети Интернет.

Третья глава учебного издания посвящена непосредственно исследованию систем управления летательного аппарата. В главе рассматриваются вопросы анализа и синтеза параметров

регуляторов, присоединённых к объекту – непрерывных, нелинейных и дискретных. Большое внимание уделяется анализу устойчивости систем управления частотными методами. Задачи, поставленные в лабораторных работах, позволят обучающимся освоить на практике базовые навыки анализа и синтеза систем управления летательными аппаратами методами теории автоматического управления.

Таким образом, перечисленные постановки задач покрывают большое множество практических задач анализа и синтеза систем управления летательного аппарата и могут быть использованы для научно-технического обоснования проектирования режимов эксплуатации изделий авиационной и космической техники.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Для исследования устойчивости и управляемости летательного аппарата используют уравнения движения центра масс, записанные в траекторной системе координат, и уравнения движения летательного аппарата вокруг центра масс, записанные в связанной системе координат.

1.1 Уравнения движения летательного аппарата

Положение центра масс летательного аппарата в траекторной системе координат определяется координатами в стартовых осях x_c , z_c и высотой полёта H , а также скоростью полёта V , углом наклона траектории θ и углом пути Ψ . Уравнения движения центра масс имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_c &= V \cos \theta \cos \Psi, & m \frac{d}{dt}V &= F_{x_k}, \\ \frac{d}{dt}H &= V \sin \theta, & mV \frac{d}{dt}\theta &= F_{y_k}, \\ \frac{d}{dt}z_c &= -V \cos \theta \sin \Psi, & -mV \cos \theta \frac{d}{dt}\Psi &= F_{z_k}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь F_{x_k} , F_{y_k} и F_{z_k} – суммы проекций гравитационной, аэродинамической сил и силы тяги двигателей, действующих на летательный аппарат и определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} F_{x_k} &= P \cos(\alpha + \varphi_P) \cos \beta - mg \sin \theta - X_a, \\ F_{y_k} &= P [\sin(\alpha + \varphi_P) \cos \gamma_a + \cos(\alpha + \varphi_P) \sin \beta \sin \gamma_a] + \\ &\quad + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - mg \cos \theta, \\ F_{z_k} &= P [\sin(\alpha + \varphi_P) \sin \gamma_a - \cos(\alpha + \varphi_P) \sin \beta \cos \gamma_a] + \\ &\quad + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где α – угол атаки, β – угол скольжения, γ_a – скоростной угол крена, φ_P – угол установки двигателей, P – сила тяги двигателей, X_a , Y_a и Z_a – аэродинамическая сила лобового сопротивления, подъёмная сила и боковая аэродинамическая сила.

Соотношения для расчёта углов атаки, скольжения и скоростного угла крена имеют вид

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{[\sin \vartheta \cos \gamma \cos (\Psi - \psi) + \sin \gamma \sin (\Psi - \psi)] \cos \theta}{\cos \beta} - \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \vartheta \cos \gamma}{\cos \beta}, \\ \sin \beta &= [\sin \vartheta \sin \gamma \cos (\Psi - \psi) - \cos \gamma \sin (\Psi - \psi)] \cos \theta - \\ &\quad - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \sin \gamma_a &= \frac{\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma)}{\cos \theta}.\end{aligned}$$

Уравнения углового движения летательного аппарата (кинематические уравнения) описываются уравнениями движения в углах Крылова-Эйлера. Дифференциальные уравнения углового движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \psi &= \frac{\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma}{\cos \vartheta}, \\ \frac{d}{dt} \vartheta &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\ \frac{d}{dt} \gamma &= \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Здесь ψ , ϑ и γ – углы рыскания, тангажа и крена соответственно, ω_x , ω_y и ω_z – проекции вектора угловой скорости летательного аппарата на оси связанной системы координат.

Дифференциальные уравнения для угловых скоростей (ди-

намические уравнения) имеют вид [5]

$$\begin{aligned} J_x \frac{d}{dt} \omega_x - J_{xy} \left(\frac{d}{dt} \omega_y - \omega_x \omega_z \right) + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_{R_x}, \\ J_y \frac{d}{dt} \omega_y - J_{xy} \left(\frac{d}{dt} \omega_x + \omega_y \omega_z \right) + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_{R_y}, \\ J_z \frac{d}{dt} \omega_z - J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_{R_z}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь J_x , J_y и J_z – осевые моменты инерции, J_{xy} – центробежный момент инерции летательного аппарата, M_{R_x} , M_{R_y} и M_{R_z} – момент внешних (аэродинамических) сил.

Совокупность уравнений (1.1), (1.3) и (1.4) образует точную систему дифференциальных уравнений движения летательного аппарата, которая, как правило, используется для решения задач выбора номинального управления движением летательного аппарата то есть требуемое опорное движение, которая не является предметом теории автоматического управления. Но, например, задача поддержания опорного движения при действии возмущений рассматривается в теории автоматического управления.

1.2 Линеаризация уравнений движения в окрестности опорной траектории

Пусть номинальное управление, обеспечивающее требуемое опорное движение, выбрано. В реальном движении на летательный аппарат действуют возмущения, вызывающие отклонения текущего движения летательного аппарата от опорного. В рамках теории автоматического управления ставится задача выбора закона управления с обратной связью, стабилизирующего летательный аппарат в окрестности опорного движения.

Будем считать, что характеристики возмущённого движе-

ния летательного аппарата мало отличаются от характеристик его опорного движения. В этом случае допускается линеаризация уравнений (1.1), (1.3) и (1.4) в окрестности опорного движения. В качестве опорного движения летательного аппарата рассмотрим прямолинейный полёт без крена и скольжения.

После линеаризации оказывается, что линейные уравнения возмущённого движения летательного аппарата можно разделить на две независимые системы. Первая описывает продольное возмущённое движение, а вторая – боковое.

1.2.1 Уравнения продольного возмущённого движения летательного аппарата

В продольном движении, как правило, управлением является приращение отклонения руля высоты $\Delta\delta$ к номинальному и приращение тяги ΔP к номинальной. Система уравнений, описывающая продольное возмущённое движение, имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta\dot{L} &= \cos\theta_0\Delta V - V_0\sin\theta_0\Delta\theta, \\ \Delta\dot{H} &= \sin\theta_0\Delta V + V_0\cos\theta_0\Delta\theta, \\ \Delta\dot{V} &= \bar{F}_x^V\Delta V + \bar{F}_x^\alpha\Delta\alpha + \bar{F}_x^\theta\Delta\theta + \bar{F}_x^{\delta_{\text{рв}}}\Delta\delta_{\text{рв}} + \bar{F}_x^P\Delta P, \\ \Delta\dot{\theta} &= \bar{F}_y^V\Delta V + \bar{F}_y^\alpha\Delta\alpha + \bar{F}_y^\theta\Delta\theta + \bar{F}_y^{\delta_{\text{рв}}}\Delta\delta_{\text{рв}} + \bar{F}_y^P\Delta P, \\ \Delta\dot{\vartheta} &= \Delta\omega_z, \\ \Delta\dot{\omega}_z &= \bar{M}_{R_z}^V\Delta V + \bar{M}_{R_z}^\alpha\Delta\alpha + \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + \bar{M}_{R_z}^{\omega_z}\Delta\omega_z + \\ &\quad + \bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рв}}}\Delta\delta_{\text{рв}} + \bar{M}_{R_z}^P\Delta P,\end{aligned}\tag{1.5}$$

Здесь параметры с символом Δ относятся к возмущённым значениям, а параметры с нижним индексом 0 – к опорным. Запись вида $\bar{M}_{R_z}^V$ означает, что берётся производная проекции момента, действующего на летательный аппарат вдоль оси z по опорной скорости летательного аппарата в рассматриваемой точке опорной траектории.

Производные сил и моментов по указанным переменным, входящие в правые части, могут быть вычислены путём разложения в ряд Тейлора величин сил и моментов, действующих на летательный аппарат (1.2). После преобразований получим

$$\begin{aligned}\overline{F}_x^V &= \frac{2(C_P - C_{x_a}) + (C_P^M - C_{x_a}^M)M}{\tau}, \\ \overline{F}_x^\alpha &= -\frac{V}{\tau}C_{x_a}^M, & \overline{F}_x^\theta &= -g \cos \theta, \\ \overline{F}_x^{\delta_{\text{PB}}} &= -\frac{V}{\tau}C_{x_a}^{\delta_{\text{PB}}}, & \overline{F}_x^P &= \frac{1}{m}, \\ \overline{F}_y^V &= \frac{2C_{y_a}}{\tau V} \left(1 - C_{y_a}^M \frac{d}{dC_{y_a}} M \right), \\ \overline{F}_y^\alpha &= \frac{C_P - C_{y_a}^\alpha}{\tau}, & \overline{F}_y^\theta &= \frac{g}{V} \sin \theta, \\ \overline{F}_y^{\delta_{\text{PB}}} &= \frac{C_{y_a}^{\delta_{\text{PB}}}}{\tau}, & \overline{F}_y^P &= \frac{\alpha + \varphi_P}{V},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_{R_z}^V &= D_z m_{R_z}^M \frac{M}{V}, & \overline{M}_{R_z}^\alpha &= D_z m_{R_z}^{C_{y_a}} C_{y_a}^\alpha, \\ \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} &= D_z m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A}{V}, & \overline{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} &= D_z m_z^{\delta_{\text{PB}}}, \\ \overline{M}_{R_z}^P &= -\frac{y_P}{J_z}, & \overline{M}_{R_z}^{\omega_z} &= D_z m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A}{V}.\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\tau = \frac{2m}{\rho S V}, \quad D_z = \frac{b_A S q}{J_z}, \quad q = \frac{\rho V^2}{2}, \quad C_P = \frac{P}{S q},$$

где S – площадь, q – скоростной напор, b_A – средняя аэродинамическая хорда. Выражения для частных производных записаны в приведённом виде, их действительные значения определяются как

$$\overline{F}_x^{\{i\}} = \frac{F_x^{\{i\}}}{m}, \quad \overline{F}_y^{\{i\}} = \frac{F_y^{\{i\}}}{mV}, \quad \overline{M}_{R_z}^{\{i\}} = \frac{M_{R_z}^{\{i\}}}{J_z}.$$

Между углом атаки, углом наклона траектории и углом тангажа существует связь

$$\Delta\vartheta = \Delta\alpha + \Delta\theta.$$

Также важным параметром является продольная перегрузка

$$n_{y_a} = \frac{Y_a + P \sin(\alpha + \varphi_P)}{mg}.$$

Для анализа устойчивости уравнений (1.5) их удобно представить в форме Коши. Для этого необходимо исключить $\Delta\dot{\alpha}$ из правой части шестого уравнения с помощью соотношения $\Delta\dot{\alpha} = \Delta\dot{\vartheta} - \Delta\dot{\theta} = \Delta\omega_z - \Delta\dot{\theta}$ и заменить $\Delta\theta$ на $\Delta\vartheta - \Delta\alpha$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\Delta\dot{L} &= \cos\theta_0\Delta V - V_0\sin\theta_0\Delta\theta, \\ \Delta\dot{H} &= \sin\theta_0\Delta V + V_0\cos\theta_0\Delta\theta, \\ \Delta\dot{V} + a_{11}\Delta V + a_{12}\Delta\alpha + a_{14}\Delta\vartheta &= b_{11}\Delta\delta_{\text{рв}} + b_{12}\Delta P, \\ \Delta\dot{\alpha} + a_{21}\Delta V + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_{\text{рв}}, \\ \Delta\dot{\omega}_z + a_{31}\Delta V + a_{32}\Delta\alpha + a_{33}\Delta\omega_z &= b_{31}\Delta\delta_{\text{рв}} + b_{32}\Delta P, \\ \Delta\dot{\vartheta} + a_{43}\Delta\omega_z &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\overline{F}_x^V, & a_{12} &= \overline{F}_x^\theta - \overline{F}_x^\alpha, & a_{14} &= -\overline{F}_x^\theta, \\ a_{21} &= \overline{F}_y^V, & a_{22} &= \overline{F}_y^\alpha, & a_{23} &= -1, \\ a_{31} &= \overline{M}_{R_z}^\alpha - \overline{M}_{R_z}^V, & a_{32} &= \overline{M}_{R_z}^\alpha \overline{F}_y^\alpha - \overline{M}_{R_z}^\alpha, & a_{33} &= -\left(\overline{M}_{R_z}^{\omega_z} + \overline{M}_{R_z}^\alpha\right), \\ & & & & a_{43} &= -1, \\ b_{11} &= -\overline{F}_x^{\delta_{\text{рн}}}, & b_{12} &= \overline{F}_x^P, \\ b_{21} &= -\overline{F}_y^{\delta_{\text{рн}}}, \\ b_{31} &= \overline{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рн}}} - \overline{M}_{R_z}^\alpha \overline{F}_y^{\delta_{\text{рн}}}, & b_{32} &= \overline{M}_{R_z}^P.\end{aligned}$$

1.2.2 Уравнения бокового возмущённого движения летательного аппарата

В боковом движении, как правило, управлением является приращение отклонения руля направления $\Delta\delta_{\text{рн}}$ к номинальному и приращение отклонения элеронов $\Delta\delta_{\text{эл}}$ к номинальному. Система уравнений, описывающая боковое возмущённое движение имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta\dot{z} &= -V_0 \cos \theta_0 \Delta\Psi, \\
 -mV_0 \cos \theta_0 \Delta\dot{\Psi} &= F_z^\beta \Delta\beta + F_z^{\gamma_a} \Delta\gamma_a + F_z^{\delta_{\text{рн}}} \Delta\delta_{\text{рн}}, \\
 \Delta\dot{\psi} &= \frac{\Delta\omega_y}{\cos \vartheta_0}, \\
 \Delta\dot{\gamma} &= \Delta\omega_x - \tan \vartheta_0 \Delta\omega_y, \\
 J_x \Delta\dot{\omega}_x - J_{xy} \Delta\dot{\omega}_y &= M_{R_x}^\beta \Delta\beta + M_{R_x}^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_{R_x}^{\omega_y} \Delta\omega_y + \\
 &\quad + M_{R_x}^{\delta_{\text{рн}}} \Delta\delta_{\text{рн}} + M_{R_x}^{\delta_{\text{эл}}} \Delta\delta_{\text{эл}}, \\
 J_y \Delta\dot{\omega}_y - J_{xy} \Delta\dot{\omega}_x &= M_{R_y}^\beta \Delta\beta + M_{R_y}^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_{R_y}^{\omega_y} \Delta\omega_y + \\
 &\quad + M_{R_y}^{\delta_{\text{рн}}} \Delta\delta_{\text{рн}} + M_{R_y}^{\delta_{\text{эл}}} \Delta\delta_{\text{эл}},
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Систему бокового движения дополним уравнениями кинематических связей между углом пути и углами рыскания и крена, а также между скоростным углом крена и углами скольжения и крена

$$\begin{aligned}
 \Delta\Psi &= \Delta\psi + \frac{\sin \alpha_0}{\cos \theta_0} \Delta\gamma - \frac{\Delta\beta}{\cos \theta_0}, \\
 \Delta\gamma_a &= \tan \theta_0 \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \theta_0} \Delta\gamma.
 \end{aligned}$$

Таким образом, как следует из записанных уравнений, при прямолинейном опорном движении летательного аппарата без крена продольное и боковое движение в линейном приближении можно рассматривать независимо друг от друга.

Полученные системы уравнений (1.6) и (1.7), строго говоря,

являются системами линейных уравнений с *переменными* коэффициентами. В случае установившегося опорного движения они становятся линейными системами с *постоянными* коэффициентами, более того, в этом случае возможно получение их аналитических решений в конечном виде.

1.3 Динамика продольного возмущённого движения летательного аппарата

Рассмотрим статически устойчивый летательный аппарат как объект управления. В этом случае, при нарушении равновесия сил и моментов в опорном движении, возникнут силы и моменты, которые стремятся вернуть его в исходное состояние.

Возмущённое продольное движение характеризуется быстрыми или короткопериодическими составляющими и медленными или длиннопериодическими составляющими.

Доказано, что быстрые и медленные составляющие возмущённого движения возникают одновременно. В первое время преобладает короткопериодическая составляющая, изменяются в основном $\Delta\alpha$ и $\Delta\vartheta$ при слабом изменении скорости ΔV . Таким образом, короткопериодическое движение – вращательное, оно связано с нарушением равновесия моментов тангажа и длится несколько секунд, пока не наступит равновесие моментов, действующих на летательный аппарат.

В длиннопериодическом движении заметно изменяется скорость летательного аппарата ΔV и угол наклона траектории $\Delta\theta$, а угол атаки $\Delta\alpha$ изменяется мало. Длиннопериодическое движение продолжается до тех пор, пока не наступит равновесие сил, действующих на летательный аппарат.

Таким образом, длиннопериодическая и короткопериодическая составляющая продольного движения летательного аппа-

рата разнесены во времени, что даёт возможность рассматривать их отдельно и в ряде случаев упрощает анализ продольного возмущённого движения. Однако, такое разделение допустимо только лишь в том случае, если доказано, что короткопериодическое движение затухающее, то есть летательный аппарат статически устойчивый. В противном случае такое разделение недопустимо.

Итак, рассмотрим статически устойчивый летательный аппарат. Пусть необходимо совершить интенсивный манёвр в вертикальной плоскости. В таком случае руль высоты летательного аппарата необходимо резко отклонить в какую-либо сторону, что с точки зрения теории автоматического управления рассматривается как ступенчатое воздействие на объект. Реакцией летательного аппарата будет выход на некоторый новый заданный угол атаки с прежней скоростью, причём его формирование происходит на этапе короткопериодического движения. Затем, на этапе длиннопериодического движения, необходимо скорректировать высоту и скорость полёта летательного аппарата.

Таким образом, управление продольным движением летательного аппарата строится по двухконтурной схеме. Внутренний контур – управление угловым движением летательного аппарата (углы атаки α и тангажа ϑ , угловая скорость тангажа ω_z и скорость изменения угла наклона траектории $\dot{\theta}$) и внешний контур – управление движением центра масс летательного аппарата (угол наклона траектории θ , скорость V и высота полёта H).

1.3.1 Передаточные функции в короткопериодическом движении летательного аппарата

В продольном движении управление летательным аппаратом осуществляется отклонением органов управления $\Delta\delta_{\text{рв}}$ и/или изменением тяги двигателей ΔP . Если за опорное движение принять установившийся горизонтальный полёт, то продольное движение летательного аппарата при отклонении органов управления описывается системой (1.6).

Наиболее важным параметром, определяющим продольное возмущённое движение, является угол атаки, который после отклонения органа управления формируется на этапе короткопериодического движения, в ходе которого восстанавливается равновесие моментов тангажа. Здесь можно пренебречь изменением скорости полёта летательного аппарата. В таком случае короткопериодический этап полёта, обусловленный отклонением руля высоты, будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\theta} &= \overline{F}_y^\alpha \Delta\alpha + \overline{F}_y^{\delta_{\text{рв}}} \Delta\delta_{\text{рв}}, \\ \Delta\ddot{\vartheta} - \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} - \overline{M}_{R_z}^{\omega_z} \Delta\dot{\vartheta} &= \overline{M}_{R_z}^\alpha \Delta\alpha + \overline{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рв}}} \Delta\delta_{\text{рв}}, \\ \Delta\theta + \Delta\alpha - \Delta\vartheta &= 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Выполним преобразование Лапласа над уравнениями (1.8) при нулевых начальных условиях и получим систему неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}s\Delta\theta(s) &= \overline{F}_y^\alpha \Delta\alpha(s) + \overline{F}_y^{\delta_{\text{рв}}} \Delta\delta_{\text{рв}}(s), \\ \overline{M}_{R_z}^\alpha \Delta\alpha(s) + \overline{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рв}}} \Delta\delta_{\text{рв}}(s) &= -s\overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \Delta\alpha(s) + \\ &+ s(s - \overline{M}_{R_z}^{\omega_z}) \Delta\vartheta(s), \\ 0 &= \Delta\theta(s) + \Delta\alpha(s) - \Delta\vartheta(s).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Из решения системы (1.9) определим

$$\Delta\alpha(s) = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \quad \Delta\theta(s) = \frac{\Delta_\theta}{\Delta}, \quad \Delta\vartheta(s) = \frac{\Delta_\vartheta}{\Delta},$$

здесь определитель системы (1.9) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\bar{F}_y^\alpha & 0 \\ 0 & -\left(\bar{M}_{R_z}^\alpha + \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}}\right) & s^2 - \bar{M}_{R_z}^{\omega_z} s \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -s \left(s^2 + 2h_\kappa s + \omega_\kappa^2 \right),$$

$$h_\kappa = \frac{\bar{F}_y^\alpha - \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} - \bar{M}_{R_z}^{\omega_z}}{2},$$

$$\omega_\kappa^2 = -\left(\bar{M}_{R_z}^\alpha + \bar{M}_{R_z}^{\omega_z} \bar{F}_y^\alpha\right).$$

После раскрытия определителей $\Delta\alpha(s)$, $\Delta\theta(s)$ и $\Delta\vartheta(s)$ получим

$$\Delta_\alpha = -\left[\bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} s - \bar{F}_y^{\delta_{\text{PB}}} \left(s^2 - \bar{M}_{R_z}^{\omega_z} s\right)\right] \Delta\delta_{\text{PB}}(s),$$

$$\Delta_\theta = -\left\{\bar{F}_y^\alpha \bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} + \bar{F}_y^{\delta_{\text{PB}}} \left[s^2 - \left(\bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} + \bar{M}_{R_z}^{\omega_z}\right) s - \bar{M}_{R_z}^\alpha\right]\right\} \times$$

$$\times \Delta\delta_{\text{PB}}(s),$$

$$\Delta_\vartheta = -\left[\bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} (s + \bar{F}_y^\alpha) - \bar{F}_y^{\delta_{\text{PB}}} \left(\bar{M}_{R_z}^\alpha + \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} s\right)\right] \Delta\delta_{\text{PB}}(s).$$

Передаточные функции летательного аппарата определим как отношение отображения по Лапласу выходной переменной к отображению по Лапласу входной переменной

$$W_\alpha^{\delta_{\text{PB}}}(s) = \frac{\Delta_\alpha(s)}{\delta_{\text{PB}}(s)} = \frac{K_\alpha}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

$$W_\theta^{\delta_{\text{PB}}}(s) = \frac{\Delta_\theta(s)}{\delta_{\text{PB}}(s)} = \frac{K_\theta}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}, \quad (1.10)$$

$$W_\vartheta^{\delta_{\text{PB}}}(s) = \frac{\Delta_\vartheta(s)}{\delta_{\text{PB}}(s)} = \frac{K_\vartheta (T_1 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}.$$

Здесь введены обозначения $W_i^{\delta_{\text{PB}}}$, $i = \{\alpha \ \theta \ \vartheta\}$ – передаточная функция летательного аппарата по углам атаки или наклона траектории или тангажа при отклонении руля высоты соответственно, передаточные коэффициенты

$$K_\alpha = \frac{\bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}}}{|\omega_\kappa^2|}, \quad K_\theta = K_\vartheta = \frac{\bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} \bar{F}_y^\alpha}{|\omega_\kappa^2|},$$

постоянные времени

$$T^2 = \frac{1}{|\omega_K^2|}, \quad T_1 = \frac{1}{\bar{F}_y^\alpha},$$

коэффициент демпфирования

$$\xi = \frac{H_K}{\sqrt{|\omega_K^2|}} = h_K T.$$

Продифференцировав по времени в операторах Лапласа, то есть умножив на s , второе и третье выражение (1.10), получим передаточные функции летательного аппарата по угловой скорости тангажа и по угловой скорости наклона траектории при отклонении руля высоты

$$\begin{aligned} W_{\theta}^{\delta_{PB}}(s) &= sW_{\theta}^{\delta_{PB}}(s) = \frac{K_{\theta}}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \\ W_{\omega_z}^{\delta_{PB}}(s) &= sW_{\vartheta}^{\delta_{PB}}(s) = \frac{K_{\vartheta} (T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Определим передаточную функцию летательного аппарата по продольной перегрузке при отклонении руля высоты. Линеаризуем выражение для продольной перегрузки в окрестности устоявшегося движения

$$\Delta n_{y_a} = \frac{(Y_a^\alpha + P) \Delta \alpha}{mg} = \frac{V}{g} \bar{F}_y^\alpha \Delta \alpha.$$

Тогда передаточная функция летательного аппарата по перегрузке при отклонении руля высоты составит

$$W_{n_{y_a}}^{\delta_{PB}} = \frac{\Delta n_{y_a}(s)}{\Delta \delta_{PB}(s)} = \frac{K_{n_y}}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

где передаточный коэффициент по перегрузке

$$K_{n_y} = \frac{V}{g} \bar{F}_y^\alpha K_\alpha = \frac{V}{g} K_\theta.$$

Таким образом, как следует из (1.10) и (1.11), передаточные функции летательного аппарата в короткопериодическом движении представляют собой звено второго порядка, которое может быть как аperiodическим, так и колебательным. По ним можно определить реакцию летательного аппарата на отклонение органов управления тангажом в короткопериодическом дви-

жении.

1.3.2 Передаточные функции в длиннопериодическом движении летательного аппарата

Выпишем уравнения продольного возмущённого движения центра масс самолёта. За опорное движение примем установившийся полёт с нулевым углом наклона траектории, получим уравнения

$$\begin{aligned}\Delta \dot{H} &= V_0 \Delta \theta, \\ \Delta \dot{V} &= \bar{F}_x^V \Delta V + \bar{F}_x^\alpha \Delta \alpha + \bar{F}_x^\theta \Delta \theta + \bar{F}_x^P \Delta P, \\ \Delta \dot{\theta} &= \bar{F}_y^V \Delta V + \bar{F}_y^\alpha \Delta \alpha + \bar{F}_y^{\delta_{\text{рв}}} \Delta \delta_{\text{рв}}, \\ 0 &= \bar{M}_{R_z}^V \Delta V + \bar{M}_{R_z}^\alpha \Delta \alpha + \bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рв}}} \Delta \delta_{\text{рв}} + \bar{M}_{R_z}^P \Delta P.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Пусть во внутреннем контуре выработано управляющее воздействие в виде изменения скоростной перегрузки Δn_{y_a} . Не приводя подробных выкладок¹, запишем систему уравнений (1.12) в виде

$$\begin{aligned}\Delta \dot{V} + k_d \Delta V - \bar{F}_x^\theta \Delta \theta &= \bar{F}_x^P \Delta P + \frac{g}{V} \frac{\bar{F}_x^\alpha}{\bar{F}_y^\alpha} \Delta n_{y_a}, \\ \Delta \dot{\theta} &= \frac{g}{V} \Delta n_{y_a}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Здесь обозначено $k_d = -\bar{F}_x^V + \bar{F}_y^V \frac{\bar{F}_x^\alpha}{\bar{F}_y^\alpha}$.

Выполним преобразование Лапласа над уравнениями систе-

¹При преобразовании уравнений (1.12) к виду (1.13) использованы соотношения

1. $\frac{g}{V} \Delta n_{y_a} = \bar{F}_y^V \Delta V + \bar{F}_y^\alpha \Delta \alpha$;
2. при малом $\bar{F}_y^{\delta_{\text{рв}}}$ можно считать $\Delta \alpha = \frac{\frac{g}{V} \Delta n_{y_a} - \bar{F}_y^V \Delta V}{\bar{F}_y^\alpha}$;
3. при $\Delta P = 0$, из третьего уравнения системы (1.12) определим $\Delta \delta_{\text{рв}} = -\frac{\bar{M}_{R_z}^V \Delta V + \bar{M}_{R_z}^\alpha \Delta \alpha}{\bar{M}_{R_z}^{\delta_{\text{рв}}}}$.

мы (1.13) при нулевых начальных условиях, получим систему алгебраических уравнений

$$\Delta V(s) = \frac{1}{s + k_d} \left[\overline{F}_x^P \Delta P(s) + \frac{1}{s} \frac{g}{V} \left(\frac{\overline{F}_x^\alpha}{\overline{F}_y^\alpha} s + \overline{F}_x^\theta \right) \Delta n_{y_a}(s) \right],$$

$$\Delta \theta(s) = \frac{1}{s} \frac{g}{V} \Delta n_{y_a}(s).$$

Далее возможны два варианта. В первом случае отслеживается перегрузка при отключении канала управления тягой, а во втором управление осуществляется регулированием тяги при стабилизированной перегрузке.

Пусть отслеживается перегрузки $n_{y_a} = 1 + \Delta n_{y_a}$ при $\Delta P = 0$. В этом случае передаточные функции летательного аппарата по скорости и углу наклона траектории при изменении тяги примут вид

$$W_V^n = \frac{\Delta V(s)}{\Delta n_{y_a}(s)} = \frac{\frac{\overline{F}_x^\alpha}{\overline{F}_y^\alpha} + \overline{F}_x^\theta}{s(s + k_d)} \frac{g}{V}, \quad (1.14)$$

$$W_\theta^n = \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta n_{y_a}(s)} = \frac{1}{s} \frac{g}{V}.$$

Эти передаточные функции описывают манёвр летательного аппарата с постоянной перегрузкой.

При изменении тяги двигателей на величину ΔP и стабилизации перегрузки ($\Delta n_{y_a} = 0$) передаточные функции летательного аппарата по скорости и углу наклона траектории при изменении перегрузки примут вид

$$W_V^P = \frac{\Delta V(s)}{\Delta P(s)} = \frac{\overline{F}_x^P}{s + k_d}, \quad (1.15)$$

$$W_\theta^P = \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta P(s)} = 0.$$

Изменение тяги при $\Delta n_{y_a} = 0$ приводит к разгону (или торможению) летательного аппарата до новой скорости.

Использование соотношений (1.14) и (1.15) допустимо лишь при малых ΔP и Δn_{y_a} .

1.4 Динамика бокового возмущённого движения летательного аппарата

Боковое движение летательного аппарата рассматривается отдельно от продольного, при этом имеется в виду, что органы управления продольным движением летательного аппарата зафиксированы, а возмущения продольных параметров движения и возмущающие воздействия, влияющие на продольное движение, отсутствуют.

Рассматривается либо свободное возмущённое движение с фиксированным положением органов управления боковым движением – элероны или руль направления, либо движение, вызванное отклонением этих органов.

В общем случае, при достаточно больших возмущениях, боковое движение вызывает существенное отклонение параметров продольного движения, таким образом, боковое движение можно рассматривать отдельно от продольного только лишь при малых возмущениях, если за опорный режим полёта принят прямолинейный горизонтальный установившийся полёт без крена и скольжения.

1.4.1 Линеаризация уравнений бокового возмущённого движения летательного аппарата

Запишем систему уравнений динамики для бокового движения летательного аппарата относительно связанных осей

$$\begin{aligned} m \left(\dot{V}_z - V_x \omega_y + V_y \omega_x \right) &= F_{R_z}, \\ J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z - J_{xy} (\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z) &= M_{R_x}, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_x \omega_z - J_{xy} (\dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y) &= M_{R_y}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь F_{R_z} – проекция равнодействующих аэродинамических и гравитационных сил, действующих на летательный аппарат, M_{R_x} и M_{R_y} результирующие моменты крена и рыскания от аэродинамических сил и тяги относительно связанных осей, ω_x , ω_y и ω_z – проекции вектора угловой скорости летательного аппарата на оси связанной системы координат.

Проекции скорости центра масс летательного аппарата, входящие в уравнения (1.16), выразим через углы атаки α и скольжения β

$$\begin{aligned} V_x &= V_0 \cos \alpha_0 \cos \beta, \\ V_y &= -V_0 \sin \alpha_0 \cos \beta, \\ V_z &= V_0 \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Примем, что в номинальном режиме движения летательного аппарата V_0 , α_0 , ϑ_0 неизменны, а $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Продифференцировав по времени уравнения (1.17) при $\beta = 0$, уравнения системы (1.16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m V_0 \left(\dot{\beta} - \omega_y \cos \alpha_0 - \omega_x \sin \alpha_0 \right) &= F_{R_z}, \\ J_y \dot{\omega}_y - J_{xy} \dot{\omega}_x &= M_y, \\ J_x \dot{\omega}_x - J_{xy} \dot{\omega}_y &= M_x. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Решим первое уравнение системы (1.16) относительно $\dot{\beta}$ и учитывая соотношения (1.17), получим²

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\beta} &= \Delta \bar{F}_{R_z} + \Delta \omega_y \cos \alpha + \Delta \omega_x \sin \alpha, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= \Delta \widetilde{M}_y, \\ \Delta \dot{\omega}_x &= \Delta \widetilde{M}_x. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь через $\Delta \bar{F}_{R_z}$ обозначена приведённая поперечная сила – отношение поперечной силы ΔF_{R_z} к произведению массы на скорость, которая складывается из проекций аэродинамической и

²Поскольку при боковом движении V_0 , α_0 и ϑ_0 неизменны, нижний индекс «0» для простоты записи опущен

гравитационной сил на ось OZ :

$$\bar{F}_{R_z} = \frac{Z}{mV} + \frac{mg}{mV} \cos \vartheta \sin \gamma \approx \bar{Z} + \frac{g}{V} \gamma \cos \vartheta = \frac{g}{V} (n_z + \gamma \cos \vartheta).$$

Здесь Z – поперечная аэродинамическая сила, n_z – поперечная перегрузка.

Величины $\Delta \widetilde{M}_x$ и $\Delta \widetilde{M}_y$ называют приведёнными моментами рыскания и крена

$$\Delta \widetilde{M}_y = \frac{\Delta M_y + \Delta M_x \frac{J_{xy}}{J_x}}{J_y \left(1 - \frac{J_{xy}^2}{J_x J_y} \right)}, \quad \Delta \widetilde{M}_x = \frac{\Delta M_x + \Delta M_y \frac{J_{xy}}{J_y}}{J_x \left(1 - \frac{J_{xy}^2}{J_x J_y} \right)}.$$

Добавим к уравнениям (1.19) кинематическое уравнение, связывающее производную угла крена с угловой скоростью крена и рыскания, получим замкнутую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающую боковое возмущённое движение

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\beta} &= \bar{Z}^\beta \Delta \beta + \Delta \omega_y \cos \alpha + \Delta \omega_x \sin \alpha + \Delta \gamma \frac{g}{V} \cos \vartheta + \\ &\quad + \bar{Z}^{\delta_n} \Delta \delta_n + \bar{Z}^{\delta_z} \Delta \delta_z, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= \widetilde{M}_y^\beta \Delta \beta + \widetilde{M}_y^{\omega_y} \Delta \omega_y + \widetilde{M}_y^{\omega_x} \Delta \omega_x + \widetilde{M}_y^{\delta_n} \Delta \delta_n + \widetilde{M}_y^{\delta_\vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \\ \Delta \dot{\omega}_x &= \widetilde{M}_x^\beta \Delta \beta + \widetilde{M}_x^{\omega_y} \Delta \omega_y + \widetilde{M}_x^{\omega_x} \Delta \omega_x + \widetilde{M}_x^{\delta_n} \Delta \delta_n + \widetilde{M}_x^{\delta_\vartheta} \Delta \delta_\vartheta, \\ \Delta \dot{\gamma} &= \Delta \omega_x - \Delta \omega_y \tan \vartheta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Для исследования траекторного движения к уравнениям системы (1.20) необходимо добавить кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}_c &= -V \Delta \Psi, \\ \Delta \Psi &= \Delta \psi + \Delta \gamma \sin \alpha - \Delta \beta, \\ \Delta \psi &= \frac{\Delta \omega_y}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Далее, для сокращения записи символ Δ будет опущен.

В более общем виде уравнения бокового возмущённого дви-

жения можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= n_{11}\beta + n_{12}\omega_y + n_{13}\omega_x + n_{14}\gamma + m_{11}\delta_{\text{н}} + m_{12}\delta_{\text{э}} + m_{13}\delta_{\text{з}}, \\
\dot{\omega}_y &= n_{21}\beta + n_{22}\omega_y + n_{23}\omega_x + n_{24}\gamma + m_{21}\delta_{\text{н}} + m_{22}\delta_{\text{э}} + m_{23}\delta_{\text{з}}, \\
\dot{\omega}_x &= n_{31}\beta + n_{32}\omega_y + n_{33}\omega_x + n_{34}\gamma + m_{31}\delta_{\text{н}} + m_{32}\delta_{\text{э}} + m_{33}\delta_{\text{з}}, \\
\dot{\gamma} &= \omega_x + n_{42}\omega_y.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь $\delta_{\text{н}}$, $\delta_{\text{э}}$ и $\delta_{\text{з}}$ – отклонение руля направления, элеронов и органов непосредственного управления боковой силой.

Коэффициенты n_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned}
n_{11} &= \frac{Z^\beta}{mv}, & n_{21} &= D_y \left(m_y^\beta + \frac{J_{xy}}{J_x} m_x^\beta \right), \\
n_{12} &= \cos \alpha, & n_{22} &= \frac{lD_y}{2V} \left(m_y^{\omega_y} + \frac{J_{xy}}{J_x} m_x^{\omega_y} \right), \\
n_{13} &= \sin \alpha, & n_{23} &= \frac{lD_y}{2V} \left(m_y^{\omega_x} + \frac{J_{xy}}{J_x} m_x^{\omega_x} \right), \\
n_{14} &= \frac{g}{V} \cos \vartheta, & n_{42} &= -\tan \vartheta, \\
n_{31} &= D_x \left(m_x^\beta + \frac{J_{xy}}{J_y} m_y^\beta \right), & n_{32} &= \frac{lD_x}{2V} \left(m_x^{\omega_y} + \frac{J_{xy}}{J_y} m_y^{\omega_y} \right), \\
n_{33} &= \frac{lD_x}{2V} \left(m_x^{\omega_x} + \frac{J_{xy}}{J_y} m_y^{\omega_x} \right),
\end{aligned}$$

здесь обозначено $D_x = \frac{Sql}{J_x \left(1 - \frac{J_{xy}^2}{J_x J_y} \right)}$, $D_y = \frac{Sql}{J_y \left(1 - \frac{J_{xy}^2}{J_x J_y} \right)}$.

Коэффициенты m_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{Z^{\delta_{\text{н}}}}{mV}, & m_{12} &= \frac{Z^{\delta_{\text{э}}}}{mV}, \\
m_{21} &= D_y \left(m_y^{\delta_{\text{н}}} + m_x^{\delta_{\text{н}}} \frac{J_{xy}}{J_x} \right), & m_{22} &= D_y \left(m_y^{\delta_{\text{э}}} + m_x^{\delta_{\text{э}}} \frac{J_{xy}}{J_x} \right), \\
m_{31} &= D_x \left(m_x^{\delta_{\text{н}}} + m_y^{\delta_{\text{н}}} \frac{J_{xy}}{J_y} \right), & m_{32} &= D_x \left(m_x^{\delta_{\text{э}}} + m_y^{\delta_{\text{э}}} \frac{J_{xy}}{J_y} \right), \\
m_{13} &= \frac{Z^{\delta_z}}{mV}, \\
m_{23} &= D_y \left(m_y^{\delta_z} + m_x^{\delta_z} \frac{J_{xy}}{J_x} \right), \\
m_{33} &= D_x \left(m_x^{\delta_z} + m_y^{\delta_z} \frac{J_{xy}}{J_y} \right).
\end{aligned}$$

1.4.2 Реакция летательного аппарата на отклонение органов управления боковым движением

Управление боковым движением летательного аппарата осуществляется органами путевого (руль направления) и поперечного (элероны, интерцепторы) управления. В зависимости от типа летательного аппарата могут использоваться как органы путевого или поперечного управления, так и одновременно оба органа управления. Изменение направления полёта осуществляется отклонением органов поперечного управления и креном летательного аппарата, реже отклонением руля направления и созданием скольжения. Руль направления играет вспомогательную роль и, как правило, используется для ликвидации скольжения при правильном вираже, а также для компенсации момента при боковом ветре.

Несмотря на то, что органы поперечного или путевого управления предназначены для изменения момента относительно продольной или нормальной связанной оси летательного аппарата

та, в действительности отклонение каждого органа приводит к изменению момента относительно и продольной, и нормальной связанной осей летательного аппарата. При отклонении элеронов наряду с моментом крена возникает момент рыскания, а управляемое движение сопровождается одновременно и креном, и рысканием.

Полагая, что за связанные оси координат приняты главные оси инерции летательного аппарата, проанализируем реакцию летательного аппарата на отклонение органов поперечного управления (отклонение элеронов на угол $\Delta\delta_\varepsilon$) и на отклонение руля направления на угол $\Delta\delta_\text{н}$.

После преобразования по Лапласу системы дифференциальных уравнений бокового движения (1.20) или (1.22) получим систему неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\bar{Z}^{\delta_\text{н}} \Delta\delta_\text{н}(s) &= \left(s - \bar{Z}^\beta\right) \Delta\beta(s) - \Delta\omega_y(s) \cos \alpha - \\ &\quad - \Delta\omega_x(s) \sin \alpha - \frac{g}{V} \cos \vartheta \Delta\gamma(s), \\ \bar{M}_y^{\delta_\text{н}} \Delta\delta_\text{н}(s) + \bar{M}_y^{\delta_\varepsilon} \Delta\delta_\varepsilon(s) &= \left(s - \bar{M}_y^{\omega_y}\right) \Delta\omega_y(s) - \\ &\quad - \bar{M}_y^\beta \Delta\beta(s) - \bar{M}_y^{\omega_x} \Delta\omega_x(s), \\ \bar{M}_x^{\delta_\text{н}} \Delta\delta_\text{н}(s) + \bar{M}_x^{\delta_\varepsilon} \Delta\delta_\varepsilon(s) &= \left(s - \bar{M}_x^{\omega_x}\right) \Delta\omega_x(s) - \\ &\quad - \bar{M}_x^\beta \Delta\beta(s) - \bar{M}_x^{\omega_y} \Delta\omega_y(s), \\ 0 &= s \Delta\gamma(s) - \Delta\omega_x(s) + \Delta\omega_y(s) \tan \vartheta.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Использование системы (1.23) позволяет получить «точные» передаточные функции летательного аппарата по отклонению элеронов и/или рулей направления, однако, эти передаточные функции слишком сложны для качественного анализа. Поэтому, в дальнейшем будем пользоваться упрощёнными передаточны-

ми функциями, полученными из системы уравнений (1.23) при следующих допущениях:

- из первого уравнения системы исключим слагаемое, содержащее силу тяжести;
- пренебрежём поперечной аэродинамической силой $\overline{Z}^{\delta_n}$, возникающей при отклонении нуля направления;
- будем считать, что рассматривается полёт самолёта с маленькими углами атаки $\cos \alpha = 1$ и $\sin \alpha = 0$.

При введённых допущениях первые три уравнения системы (1.23) могут решаться независимо от четвёртого.

Реакция летательного аппарата на отклонение элеронов

Органы поперечного управления служат для создания момента $\overline{M}_x^{\delta_\alpha} \Delta \delta_\alpha$ относительно продольной оси летательного аппарата OX , но в общем случае они создают ещё и момент $\overline{M}_y^{\delta_\alpha} \Delta \delta_\alpha$. Направление этого момента и его величина могут существенно изменяться, оказывая различное влияние на динамику поперечного движения летательного аппарата.

Чтобы проанализировать это влияние, рассмотрим движение летательного аппарата при отклонении элеронов на угол δ_ϵ с помощью следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\beta} &= \overline{Z}^\beta + \Delta \omega_y, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= \overline{M}_y^\beta \Delta \beta + \overline{M}_y^{\omega_y} \Delta \omega_y + \overline{M}_y^{\delta_\epsilon} \Delta \delta_\epsilon, \\ \Delta \dot{\omega}_x &= \overline{M}_x^\beta \Delta \beta + \overline{M}_x^{\omega_x} \Delta \omega_x + \overline{M}_x^{\delta_\epsilon} \Delta \delta_\epsilon. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Выполним преобразование Лапласа над уравнениями систе-

мы (1.24)

$$\begin{aligned}
 (s - \bar{Z}^\beta) \Delta\beta(s) - \Delta\omega_y(s) &= 0, \\
 (s - \bar{M}_y^{\omega_y}) \Delta\omega_y(s) - \bar{M}_y^\beta \Delta\beta(s) &= \bar{M}_y^{\delta_3} \Delta\delta_3(s), \\
 (s - \bar{M}_x^{\omega_x}) \Delta\omega_x(s) - \bar{M}_x^\beta \Delta\beta(s) &= \bar{M}_x^{\delta_3} \Delta\delta_3(s).
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Составим и раскроем определитель полученной системы

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} s - \bar{Z}^\beta & -1 & 0 \\ -\bar{M}_y^\beta & s - \bar{M}_y^{\omega_y} & 0 \\ \bar{M}_x^\beta & 0 & s - \bar{M}_x^{\omega_x} \end{vmatrix} = \\
 &= (s - s_{\text{кр}}) (s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2).
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь обозначено

$$s_{\text{кр}} = \bar{M}_x^{\omega_x}, \quad 2h_6 = -(\bar{Z}^\beta + \bar{M}_y^{\omega_y}), \quad \omega_6^2 = -\bar{M}_y^\beta + \bar{Z}^\beta \bar{M}_y^{\omega_y}.$$

Наибольший интерес представляет изменение угловой скорости крена при отклонении руля направления $\Delta\delta_3$. Определим передаточную функцию угловой скорости летательного аппарата по отклонению руля направления

$$W_{\omega_x}^{\delta_3}(s) = \frac{\Delta\omega_x(s)}{\Delta\delta_3(s)} = \frac{\Delta\omega_x}{\Delta},$$

где определитель Δ_{ω_x} имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\omega_x} &= \begin{vmatrix} s - \bar{Z}^\beta & -1 & 0 \\ -\bar{M}_y^\beta & s - \bar{M}_y^{\omega_y} & \bar{M}_y^{\delta_3} \delta_3(s) \\ \bar{M}_x^\beta & 0 & \bar{M}_x^{\delta_3} \delta_3(s) \end{vmatrix} = \\
 &= \Delta\delta_3 \bar{M}_x^{\delta_3} (s^2 + 2h_6 s + \omega_1^2),
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \omega_1^2 = \omega_6^2 + \bar{M}_x^\beta \frac{\bar{M}_y^{\delta_3}}{\bar{M}_x^{\delta_3}}.$$

Искомая передаточная функция примет вид

$$W_{\omega_x}^{\delta_3}(s) = \bar{M}_x^{\delta_3} \frac{s^2 + 2h_6 s + \omega_1^2}{(s - \bar{M}_x^{\omega_x}) (s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2)}. \tag{1.27}$$

Решающее значение имеет отношение частот ω_1^2 и ω_6^2 . Наиболее благоприятный случай – равенство этих частот, так как в этом случае отклонение элеронов не вызывает изменения угла

рыскания или когда летательный аппарат нейтрален в отношении поперечной статической устойчивости, то есть имеет место так называемое изолированное движение крена.

Передаточная функция летательного аппарата в этом случае будет иметь вид апериодического звена первого порядка

$$W_{\omega_x}^{\delta_\Delta}(s) = \frac{K_\Delta}{T_\Delta s + 1},$$

где коэффициент усиления и постоянная времени имеют вид

$$K_\Delta = -\frac{\overline{M}_x^{\delta_\Delta}}{\overline{M}_x^{\omega_x}} \text{ и } T_\Delta = -\frac{J_x}{\overline{M}_x^{\omega_x}} \text{ соответственно.}$$

Реакция летательного аппарата на отклонение руля направления

Отклонение руля направления не должно сопровождаться обратной реакцией по крену. При отклонении руля направления на положительный угол, не должно быть отрицательного крена. Для анализа реакции летательного аппарата на отклонение руля направления используют упрощённую систему

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\beta} &= \overline{Z}^\beta + \Delta \omega_y, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= \overline{M}_y^\beta \Delta \beta + \overline{M}_y^{\omega_y} \Delta \omega_y + \overline{M}_y^{\delta_n} \Delta \delta_n, \\ \Delta \dot{\omega}_x &= \overline{M}_x^\beta \Delta \beta + \overline{M}_x^{\omega_x} \Delta \omega_x + \overline{M}_x^{\delta_n} \Delta \delta_n. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Определитель этой системы имеет вид (1.26).

Заменим в определителе (1.26) соответствующие столбцы величинами $\overline{M}_y^{\delta_n} \Delta \delta_n$ и $\overline{M}_x^{\delta_\Delta} \Delta \delta_\Delta$, получим

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \overline{M}_y^{\delta_n} \delta_n(s) & s - \overline{M}_y^{\omega_y} & 0 \\ \overline{M}_x^{\delta_n} \delta_n(s) & 0 & s - \overline{M}_x^{\omega_x} \end{vmatrix} = \\ &= \overline{M}_x^{\delta_n} \delta_n(s) (s - \overline{M}_x^{\omega_x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\omega_y} &= \begin{vmatrix} s - \bar{Z}^\beta & 0 & 0 \\ -\bar{M}_y^\beta & \bar{M}_y^{\delta_H} \delta_H(s) & 0 \\ -\bar{M}_x^\beta & \bar{M}_x^{\delta_H} \delta_H(s) & s - \bar{M}_x^{\omega_x} \end{vmatrix} = \\
&= \bar{M}_y^{\delta_H} \delta_H(s) (s - \bar{M}_x^{\omega_x}) (s - \bar{Z}^\beta), \\
\Delta_{\omega_x} &= \begin{vmatrix} s - \bar{Z}^\beta & -1 & 0 \\ -\bar{M}_y^\beta & s - \bar{M}_y^{\omega_y} & \bar{M}_y^{\delta_H} \delta_H(s) \\ -\bar{M}_x^\beta & 0 & \bar{M}_x^{\delta_H} \delta_H(s) \end{vmatrix} = \\
&= \bar{M}_x^{\delta_H} \delta_H(s) (s^2 + 2h_6 s + \omega_2^2).
\end{aligned}$$

Здесь обозначено $\omega_2^2 = \omega_6^2 + \bar{M}_x^\beta \frac{\bar{M}_y^{\delta_H}}{\bar{M}_x^{\delta_H}}$.

Передаточные функции, характеризующие реакцию летательного аппарата на отклонение руля направления, будут иметь вид

$$W_\beta^{\delta_H}(s) = \frac{\bar{M}_y^{\delta_H}}{s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2}, \quad (1.29)$$

$$W_{\omega_y}^{\delta_H}(s) = \frac{\bar{M}_y^{\delta_H} (s - \bar{Z}^\beta)}{s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2} = \frac{M_y^{\delta_H} \left(s - \frac{g}{V} n_z^\beta\right)}{s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2}, \quad (1.30)$$

$$W_{\omega_x}^{\delta_H}(s) = \frac{\bar{M}_x^{\delta_H} (s^2 + 2h_6 s + \omega_2^2)}{(s - \bar{M}_x^{\omega_x}) (s^2 + 2h_6 s + \omega_6^2)}. \quad (1.31)$$

Как видно из (1.29) и (1.30), передаточные функции по углу скольжения и угловой скорости рыскания подобны передаточным функциям по углу атаки и угловой скорости тангажа (см. (1.10) на стр. 20). Следовательно, реакция летательного аппарата по углу скольжения $\Delta\beta$ и угловой скорости тангажа $\Delta\omega_y$ будет напоминать реакцию самолёта по углу атаки $\Delta\alpha$ и угловой

скорости $\Delta\omega_z$ на отклонение руля высоты.

1.5 Математическая модель углового движения космического аппарата

Космический аппарат как объект управления представляет собой материальное тело, свойства которого зависят от конструкции и размеров космического аппарата, наличия подвижных частей и упругих элементов – панелей солнечных батарей, антенн, стыковочных узлов и выносных штанг. Как правило, космический аппарат можно представить в виде центрального тела с тремя степенями свободы движения и n конечных элементов, связанных между собою механическими узлами. Каждый конечный элемент рассматривается как жёсткое тело, имеющее шесть степеней свободы.

Введём в рассмотрение связанную систему координат $Oxyz$ и орбитальную систему координат $Ox_0y_0z_0$. Положение осей космического аппарата относительно орбитальной может быть определено матрицей поворота. Минимальное число элементов, при помощи которых можно определить положение космического аппарата относительно осей ориентации равно трём – соответственно числу степеней свободы движения космического аппарата как твёрдого тела вокруг центра масс. Это три угла ориентации космического аппарата, известные как углы Крылова-Эйлера.

Пусть первоначально оси космического аппарата совпадали с осями базовой системы координат $Ox_0y_0z_0$. Требуется перевести оси космического аппарата в новое произвольное положение $Oxyz$.

При использовании углов Крылова этот перевод осуществляется посредством трёх последовательных поворотов вокруг

трёх разных осей космического аппарата. Первый поворот на угол φ совершается вокруг оси Ox_0 (вектор угловой скорости поворота φ' направлен по оси Ox_0). После первого поворота система осей космического аппарата занимает положение $Ox_1y_1z_1$ (рисунок 1.1). Второй поворот на угол ψ совершается вокруг оси O_1 (вектор угловой скорости поворота ψ' направлен по оси O_1). После второго поворота система осей занимает положение $Ox_2y_2z_2$. Третий поворот на угол ϑ совершается вокруг оси Oz_2 (вектор угловой скорости поворота ϑ' направлен по оси Oz_2). После третьего поворота система осей космического аппарата занимает конечное положение $Oxyz$.

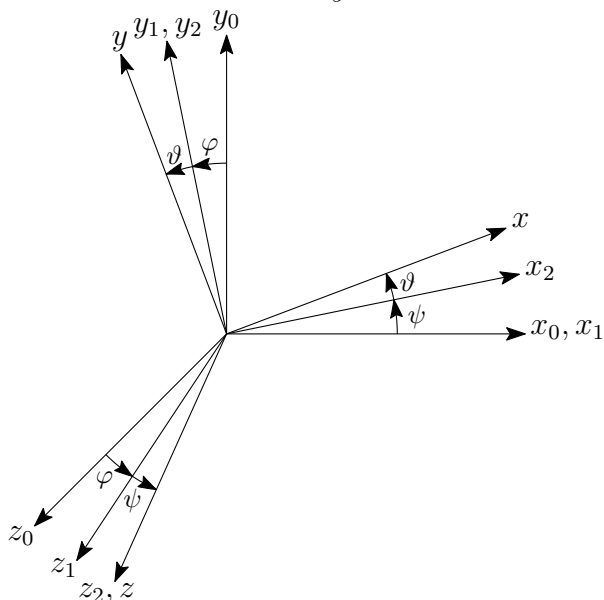


Рис. 1.1. Углы ориентации космического аппарата (углы Крылова)

Кинематические уравнения устанавливают связь между углами ориентации и угловой скоростью космического аппарата.

Аналогом этой зависимости для поступательного движения является связь между координатами движущейся точки и скоростью её перемещения.

Угловая скорость космического аппарата ω может быть представлена в виде суммы угловых скоростей трёх последовательных поворотов на углы Крылова и угловой скорости ω_0 базовой системы координат

$$\omega = \varphi' + \psi' + \vartheta' + \omega_0.$$

Для поступательно движущихся осей ориентации $\omega_0 = 0$. Полагая проекции ω_x , ω_y и ω_z угловой скорости ω на оси $Oxyz$ известными, запишем кинематические уравнения углового движения космического аппарата

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi &= \frac{\omega_x \cos \vartheta - \omega_y \sin \vartheta}{\cos \psi}, \\ \frac{d}{dt}\psi &= \omega_x \sin \vartheta + \omega_y \cos \vartheta, \\ \frac{d}{dt}\vartheta &= -(\omega_y \sin \vartheta - \omega_x \cos \vartheta) \tan \psi + \omega_z. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Динамические уравнения, описывающие движение твёрдого тела около неподвижной точки, основываются на теореме об изменении кинетического момента, согласно которой производная по времени вектора кинетического момента относительно неподвижной точки, равна главному моменту внешних сил $\mathbf{M}$.

Векторные уравнения динамики вращения твёрдого тела в углах Крылова имеют вид

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \mathbf{M}.$$

Здесь I – тензор инерции, компоненты которого зависят от выбора системы связанных осей космического аппарата. Если оси координат $Oxyz$ являются главными осями инерции, то тензор

приобретёт диагональный вид

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Спроектируем векторное уравнение для главного момента внешних сил на оси связанной системы координат, получим динамические уравнения

$$\begin{aligned} I_x \frac{d}{dt} \omega_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d}{dt} \omega_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ I_z \frac{d}{dt} \omega_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Совместное решение уравнений (1.32) и (1.33) позволит определить угловую скорость и углы ориентации космического аппарата при известных управляющих или возмущающих моментах M_i , действующих на космический аппарат.

Рассмотрим режим поддержания идеальной ориентации космического аппарата, то есть $\varphi = \psi = \vartheta = 0$ при нулевой угловой скорости. Полагая угловые отклонения и угловые скорости настолько малыми величинами, что их произведениями можно пренебречь, получим линейные уравнения углового движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi &= \omega_x, & I_x \frac{d}{dt} \omega_x &= M_x (\varphi, \varphi'), \\ \frac{d}{dt} \psi &= \omega_y, & I_y \frac{d}{dt} \omega_y &= M_y (\psi, \psi'), \\ \frac{d}{dt} \vartheta &= \omega_z, & I_z \frac{d}{dt} \omega_z &= M_z (\vartheta, \vartheta'). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Исходная система уравнений движения космического аппарата вокруг центра масс распалась на три независимых уравнения второго порядка относительно трёх углов ориентации так, что каждая компонента вектора управляющего момента вызывает угловой ускорение только вокруг одной оси.

2 ОСНОВЫ РАБОТЫ В ПАКЕТЕ SimInTech

SimInTech (сокращение от англ. Simulation In Technic – Моделирование в Технике) – среда динамического моделирования технических систем, предназначенная для расчётной проверки работы систем управления сложными техническими объектами. SimInTech осуществляет моделирование технологических процессов, протекающих в различных объектах, с одновременным моделированием работы системы управления, и позволяет повысить качество проектирования систем управления за счет проверки принимаемых решений на любой стадии проекта.

SimInTech предназначен для детального исследования и анализа любых технических систем, описание динамики которых может быть представлено в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений и/или реализовано методами структурного моделирования. Основными направлениями использования SimInTech являются создание моделей, проектирование алгоритмов управления, их отладка на модели объекта, генерация исходного кода для программируемых контроллеров.

Для SimInTech созданы и разрабатываются модули расширения, позволяющие создавать модели на базе специализированных расчетных кодов и интегрировать их в комплексные модели и проекты.

Впервые SimInTech был представлен в 1994 году, однако, активно разрабатывается и дорабатывается в настоящее время. Актуальная версия 2.24.10.17 от 17 октября 2024 года. Данное программное обеспечение является проприетарным, т. е. несвободным. Скачать учебную версию можно с сайта разработчика ООО «ЗВ Сервис» по адресу simintech.ru.

Для начала работы в SimInTech его необходимо установить

и запустить, после чего, в главном окне программы создать новый проект. Для этого необходимо выбрать пункт «Файл» → «Новый проект» → «Схема модели общего вида».

2.1 Палитры готовых компонентов SimInTech для моделирования работы систем автоматического управления

В ходе выполнения лабораторных работ будут использованы следующие палитры готовых блоков SimInTech:

1. Источники. Блок «Ступенька» реализует единичное ступенчатое воздействие.
2. Операторы. Блоки «Сумматор», «Сравнивающее устройство» (реализует обратную связь), «Усилитель».
3. Вывод данных. Блоки «Временной график», «Фазовый портрет» позволяют построить зависимость фазовой координаты от времени и фазовой координаты от фазовой координаты соответственно.
4. Нелинейные. Блок «Линейное с насыщением и зоной нечувствительности».
5. Динамические. Блоки «Интегратор», «Инерционное (апериодическое) звено первого порядка», «Колебательное звено», известное как звено второго порядка, «Передаточная функция общего вида» и «Функционал квадратичный».
6. Дискретные.
7. Анализ и оптимизация. Блоки «Оптимизатор», «Построение частотных характеристик» и «Годограф Михайлова»

Далее поочерёдно рассмотрим каждую палитру и свойства блоков, указанных в списке выше. Отметим, что вызов окна свойств всех блоков осуществляется двойным щелчком левой кнопки мыши по блоку, **за исключением** окон графиков, для

вызов окна свойств которых необходимо в контекстном меню (щелчок правой кнопки мыши по графику) выбрать пункт «Свойства объекта». Это же относится и к другим «графическим» окнам, таким как «Годограф Михайлова» и «Построение частотных характеристик».

Для более подробного ознакомления с возможностями работы в пакете SimInTech следует обратиться к специализированной литературе [7].

2.1.1 Палитра «Источники»

Вид палитры «Источники», вместе с окном редактирования свойств блока единичного ступенчатого сигнала, а в терминах SimInTech «Ступенька», показан на рисунке 2.1.

На рисунке 2.1 квадратом показано положение блока единичное ступенчатое воздействие. Обратите внимание, что необходимо в КАЖДОЙ лабораторной работе указывать правильные свойства единичного сигнала, такие, которые обведены красным овалом.

Особенно следует обратить внимание на строку «время срабатывания». В качестве значения этого параметра необходимо указать **нуль секунд**.

2.1.2 Палитра «Операторы»

Вид палитры «Операторы» и положение блоков «Сумматор», «Сравнивающее устройство» и «Усилитель» показаны на рисунке 2.2. Блок «Сравнивающее устройство» не имеет специальных свойств, а вид окон редактирования свойств блоков «Сумматор» и «Усилитель» показаны на рисунке 2.3

У блока «Усилитель» есть только одно свойство – во сколько раз он увеличивает входной сигнал.

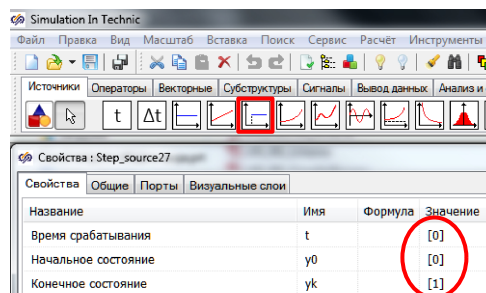


Рис. 2.1. Палитра источники и свойства блока «единичное ступенчатое воздействие»

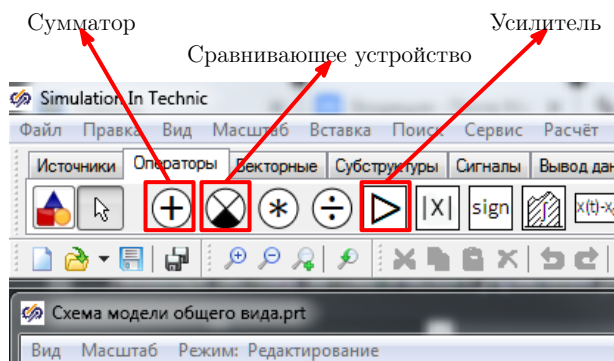


Рис. 2.2. Палитра операторы

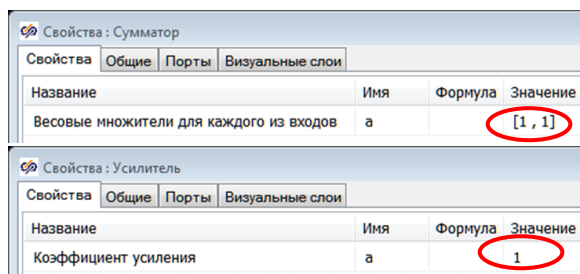


Рис. 2.3. Свойства блоков «Сумматор» и «Усилитель», сверху и снизу соответственно

У блока «Сумматор» два свойства – количество входов и коэффициент усиления входного сигнала на каждом входе перед их суммированием на выходе. По умолчанию у «Сумматора» есть только два входа, но их количество может быть изменено путём добавления через запятую третьего, четвёртого и последующих усиления.

ВНИМАНИЕ В SimInTech принят разделитель целой и дробной части десятичных дробей в виде точки.

Блок «Сумматор» и «Сравнивающее устройство» в некотором смысле взаимозаменяемы. Если у одного входа «Сумматора» указать усиление плюс один, а у второго минус один, то мы получим блок «Сравнивающее устройство». Это важное свойство будет использовано в работе для построения годографа Найквиста, где вывод об устойчивости замкнутой системы делается по результатам исследования разомкнутой системы.

2.1.3 Палитра «Вывод данных»

Вид палитры «Вывод данных» и положение блоков «Временной график» и «Фазовый портрет» показаны на рисунке 2.4

Блоки «Временной график» и «Фазовый портрет» свойств не имеют. Если открыть график, полученный в результате моделирования, щёлкнуть по нему правой кнопкой мыши, то в контекстном меню можно открыть свойства самого графика. В свойствах графика можно задать минимальное и максимальное значения параметров на каждой оси, шаг сетки, а также установить логарифмический масштаб по осям.

2.1.4 Палитра «Нелинейные»

В SimInTech представлены четыре типа нелинейностей, а соответствующие им блоки имеют сходные свойства. Вид па-

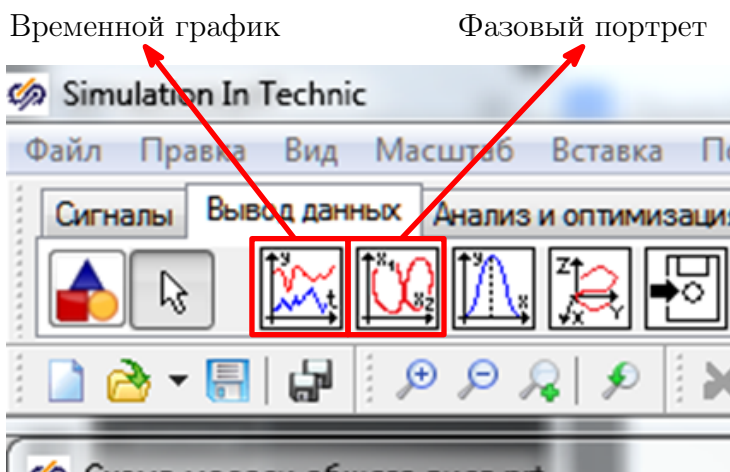


Рис. 2.4. Палитра «Вывод данных»

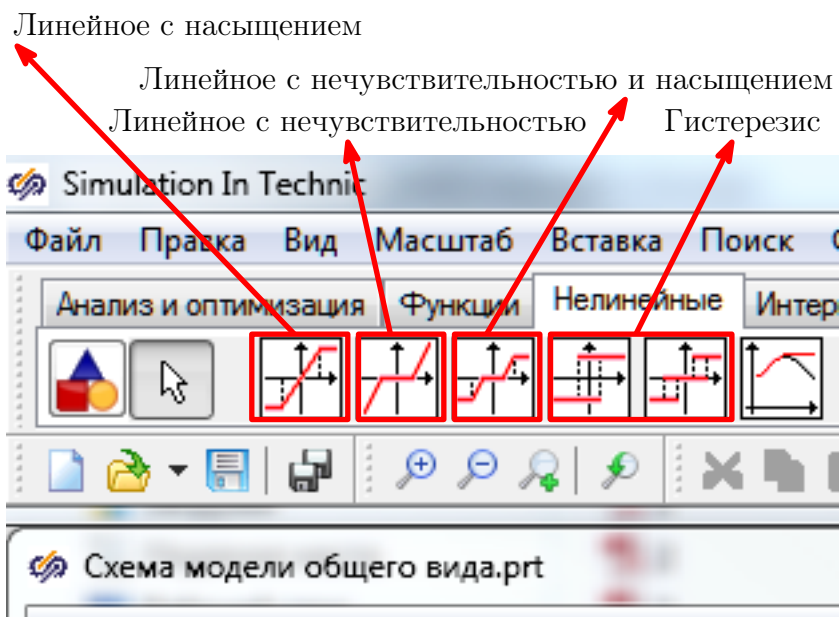
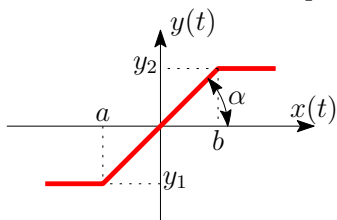
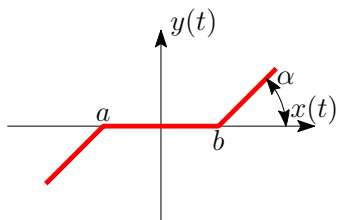


Рис. 2.5. Палитра «Нелинейные»

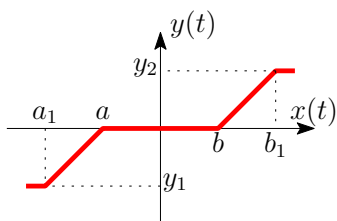
литры «Нелинейные» показан на рисунке 2.5. Статические характеристики нелинейных блоков показаны на рисунке 2.6, а их математическое описание приведено ниже.



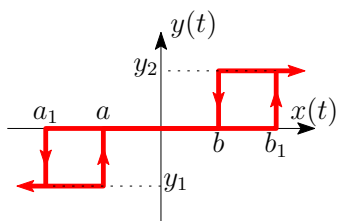
а) Линейное с насыщением



б) Линейное с зоной нечувствительности



в) Линейное с насыщением и зоной нечувствительности



г) реле с гистерезисом и нечувствительностью

Рис. 2.6. Графики статических характеристик нелинейных блоков

1. Блок «Линейное с насыщением». В зависимости от величины входного сигнала $x(t)$, блок вернёт выходной сигнал

$$y(t) = \begin{cases} kx(t), & \text{если } a < x(t) < b; \\ y_1, & \text{если } x(t) \leq a; \\ y_2, & \text{если } x(t) \geq b. \end{cases}$$

Здесь $k = \frac{y_2 - y_1}{b - a}$ — угол наклона линейного участка, y_1 и y_2 — верхнее и нижнее значение насыщения, a и b — границы линейной зоны.

2. Блок «Линейное с нечувствительностью». В зависимости от величины входного сигнала $x(t)$, блок вернёт выходной сиг-

нал

$$y(t) = \begin{cases} k[x(t) - a], & \text{если } x(t) \leq a; \\ 0, & \text{если } a < x(t) < b; \\ k[x(t) - b], & \text{если } x(t) \geq b. \end{cases}$$

Здесь k – угол наклона линейного участка, a и b – границы зоны нечувствительности.

3. Блок «Линейное с насыщением и зоной нечувствительности». В зависимости от величины входного сигнала $x(t)$, блок вернёт выходной сигнал

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x(t) \leq a_1; \\ k_1[x(t) - a], & \text{если } a_1 < x(t) < a; \\ 0, & \text{если } a \leq x(t) \leq b; \\ k_2[x(t) - b], & \text{если } b < x(t) < b_2; \\ y_2, & \text{если } x(t) \geq b_1. \end{cases}$$

Здесь $k_1 = \frac{y_1}{a_1 - a}$ и $k_2 = \frac{y_2}{b_1 - b}$ – углы наклона линейного участка, a и b – границы зоны нечувствительности, a_1 и b_1 – граница линейной зоны.

4. Блоки неоднозначной линейной характеристики с гистерезисом. Рассмотрим реле с гистерезисом и нечувствительностью. В зависимости от величины входного сигнала $x(t)$, блок вернёт выходной сигнал

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x(t) < a; \\ 0, & \text{если } a < x(t) < b; \\ x(t - \Delta t), & \text{если } a_1 \leq x(t) \leq a; \\ & b \leq x(t) \leq b_1; \\ y_2, & \text{если } x(t) > b_1. \end{cases}$$

y_1 и y_2 – верхнее и нижнее значения насыщения, a и b – границы зоны нечувствительности, a_1 и b_1 – граница зоны гистерезиса, $x(t - \Delta t)$ – значение выхода реле на предыдущем временном шаге интегрирования Δt .

Пример описания блока «Насыщение с нечувствительностью» в SimInTech показан на рисунке 2.7.

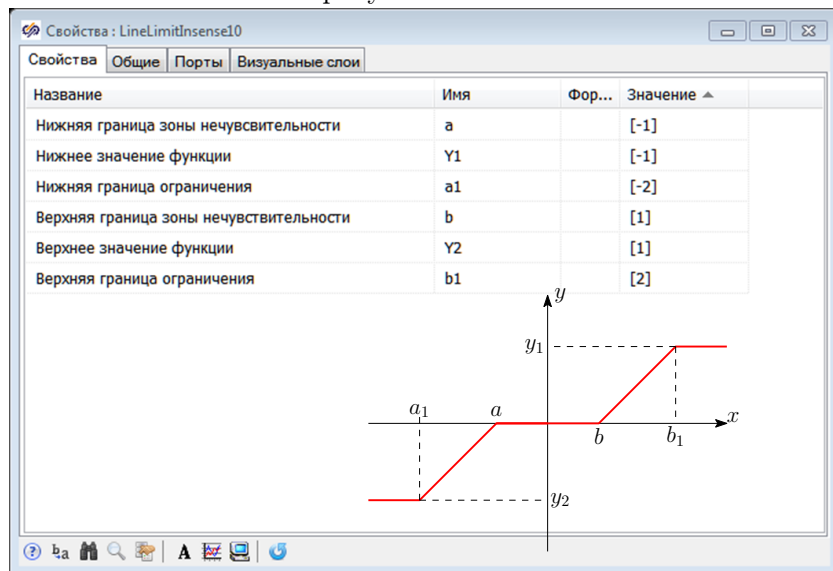


Рис. 2.7. Описание блока «Насыщение с нечувствительностью» в нотации SimInTech

2.1.5 Палитра «Динамические»

Вид палитры «Динамические» с типовыми динамическими звеньями показан на рисунке 2.8).

Ввод параметров динамического звена осуществляется в диалоговом окне свойств блока, которое открывается двойным щелчком левой кнопки мыши по изображению блока. Динамические звенья «Интегрирующее звено» и «Апериодическое звено первого порядка» имеют общее свойство «Начальные условия», которые, в соответствии с определением передаточной функции, как правило, нулевые, однако, они могут быть и отличными от нуля. «Звено второго порядка» имеет дополнительное свойство «Начальные условия по производной», так как это звено описывает

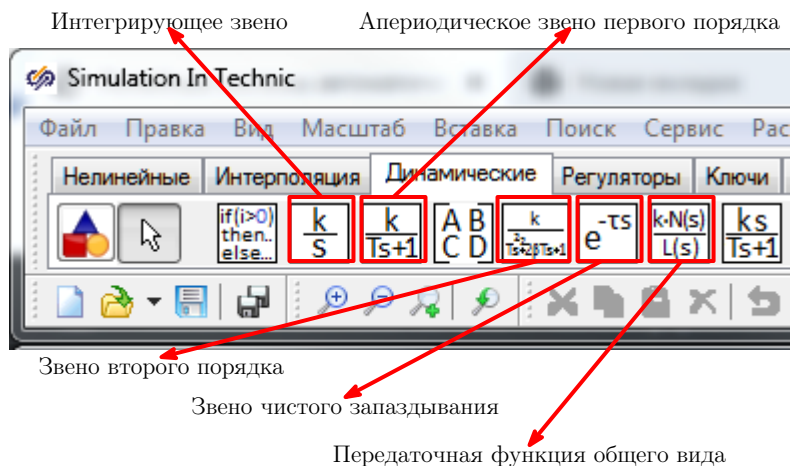


Рис. 2.8. Палитра «Динамические»

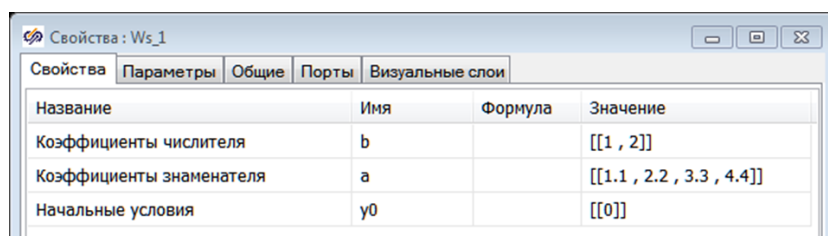


Рис. 2.9. Пример описания блока «Передаточная функция общего вида»

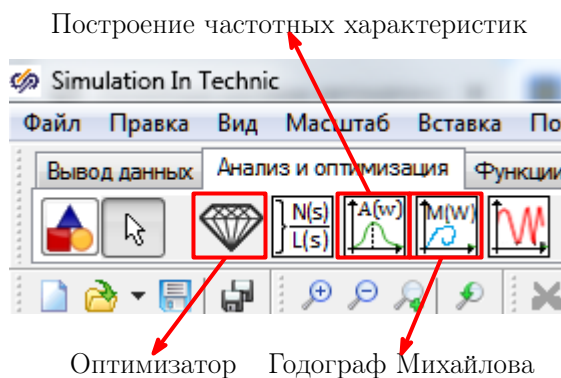


Рис. 2.10. Палитра «Анализ и оптимизация»

дифференциальное уравнение второго порядка. Также можно задать коэффициент усиления динамического звена. Для апериодического звена и звена второго порядка можно задать постоянную времени, а для звена второго порядка коэффициент демпфирования.

Отдельно остановимся на блоке «Передаточная функция общего вида». Этот блок используется в тех случаях, когда, в силу сложности уравнений объекта управления, не представляется возможным определить его через типовые динамические звенья.

ПРИМЕР. Пусть необходимо ввести в схему звено вида

$$W(s) = \frac{2s + 1}{4.4s^3 + 3.3s^2 + 2.2s + 1.1}.$$

В этом случае в окно свойств блока «Передаточная функция общего вида» следует вписать коэффициенты перед степенями s числителя и знаменателя в соответствующие поля **в обратном порядке** – коэффициент при нулевой степени s будет первым, а при максимальной последним (рисунок 2.9).

Звено чистого запаздывания имеет единственное свойство – время запаздывания в секундах.

После того как в рабочую область добавлены все блоки будущей модели, их необходимо соединить. В теории автоматического управления все блоки имеют направленное действие от входа к выходу. По умолчанию вход звена расположен слева, а выход справа.

Если блок расположен в канале обратной связи, то его вход будет справа, а выход слева, в таком случае блок можно повернуть. Для поворота нужно щёлкнуть по блоку правой кнопкой мыши, в контекстном меню найти «Повернуть» и выбрать «180 градусов».

Соединение блоков стрелками выполняют в три приёма:

1. Навести курсор мыши на вход последующего блока, курсор изменит вид на стрелку, направленную вверх, и появится название порта.
2. Щёлкнуть по входу блока левой кнопкой мыши и тянуть курсор мыши к выходу предыдущего блока. Можно добавить точку «излома» стрелки, щёлкнув левой кнопкой мыши в нужном месте.
3. Щёлкнуть левой кнопкой мыши по выходу предыдущего блока.

2.1.6 Палитра «Анализ и оптимизация»

Палитра «Анализ и оптимизация» содержит блоки оптимизации системы управления, а также блоки для построения частотных характеристик системы (рисунок 2.10).

Блок «Годограф Михайлова» не имеет входных и выходных портов, он анализирует всю систему проекта. Наиболее значимые свойства этого блока – начальная и конечная частота гармонического сигнала, подаваемого на вход системы. Начальную следует выставить как можно меньшей, например, 10^{-6} , а конечную подобрать так, что бы была видна часть кривой Михайлова в окрестности начала координат (см. рисунок 2.11).

Блок «Построение частотных характеристик» имеет два входа, на первый подаётся начальная точка системы (её вход) и конечная точка системы (её выход). Окно свойств блока «Построение частотных характеристик» показано на рисунке 2.11, на котором показаны начальные и конечные частоты сигнала, подаваемого на вход системы, а также отмечено важное поле «Типы характеристик». Рассмотрим его подробнее.



Рис. 2.11. Окно свойств блока «Построение частотных характеристик»

Для входа в меню «Типы характеристик» необходимо щёлкнуть левой кнопкой мыши по контекстной кнопке в конце строки, появится меню «Типы характеристик» (рисунок 2.12). Выбор конкретной характеристики осуществляется её выбором в списке слева и добавлением в проект «кнопками со стрелками».

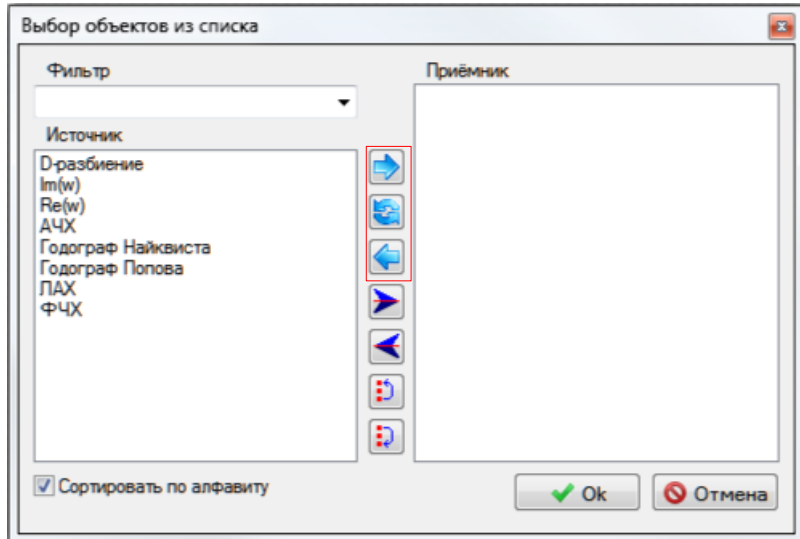


Рис. 2.12. Окно выбора типа частотной характеристики

Окно свойств блока «Оптимизатор» показано на рисунке 2.13.

2.1.7 Окно «Генерация сигналов»

Для решения задач оптимизации систем управления, некоторые переменные модели нужно «декларировать» как сигналы. Для этого необходимо открыть меню «Сервис», выбрать пункт «Сигналы», в результате появится окно, показанное на рисунке 2.14.

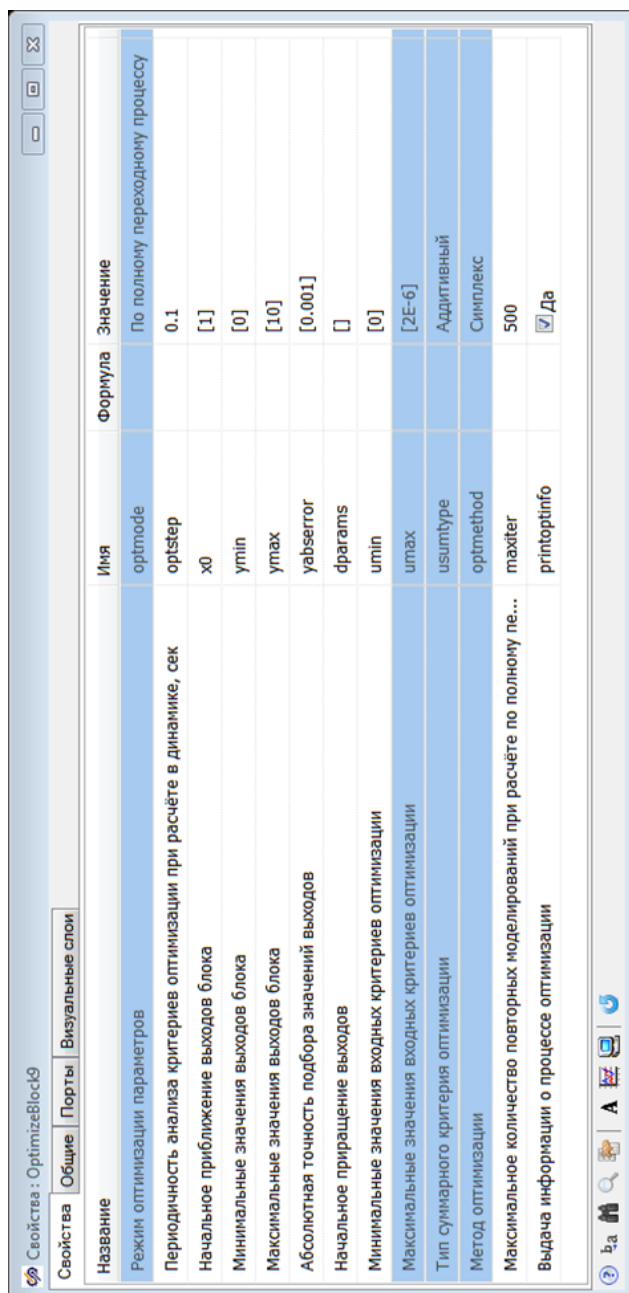


Рис. 2.13. Окно свойств блока «Оптимизатор»

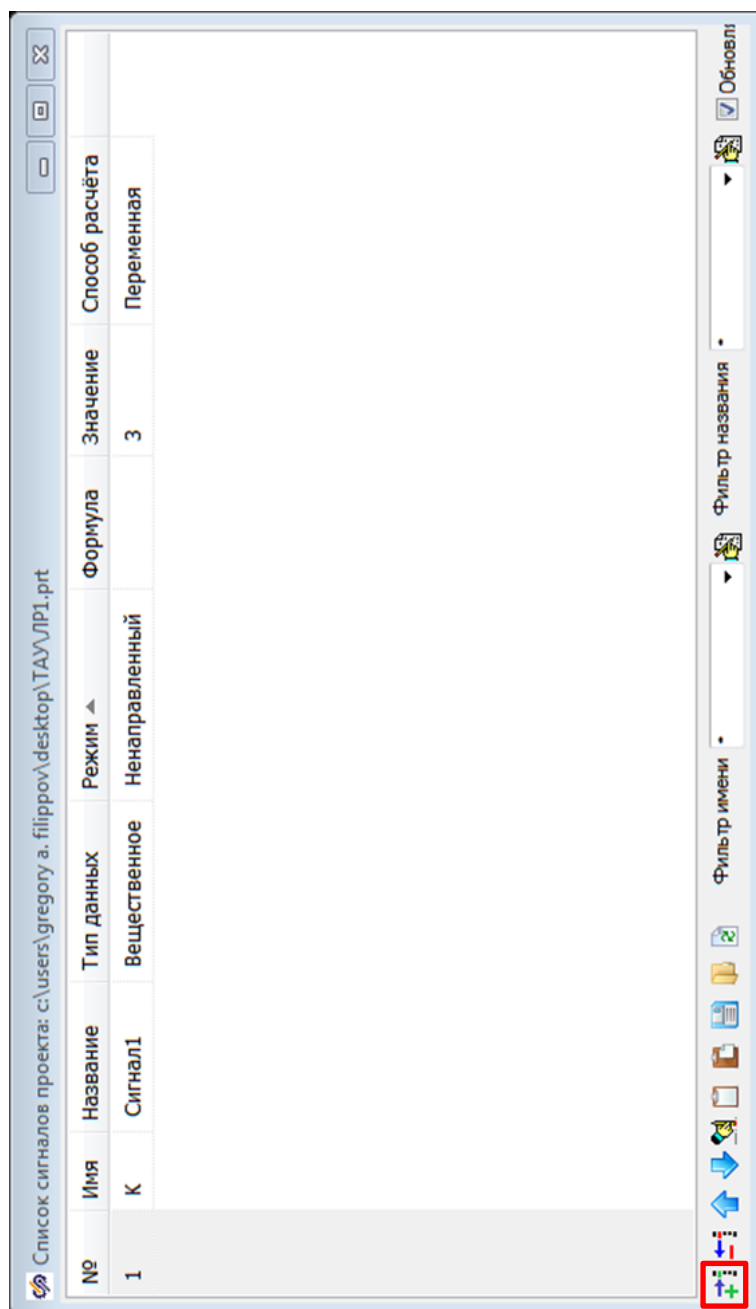


Рис. 2.14. Окно генерации сигналов в SimInTech

Чтобы добавить новый сигнал (т.е. декларировать некую переменную модели в SimInTech) необходимо нажать на кнопку новая переменная (показана квадратом на рисунке 2.14), затем обязательно ввести её уникальное имя, к которому затем можно будет обращаться, указать на вещественный тип переменных и задать её значение по умолчанию.

2.1.8 Окно «Параметры расчёта»

Окно «Параметры расчёта» открывается при нажатии на кнопку «Параметры расчёта» (рисунок 2.15), расположенную в верхнем левом углу рабочей области (пиктограмма «молоток с отвёрткой»). В этом окне можно установить минимальный и максимальный шаг интегрирования дифференциальных уравнений, метод численного интегрирования уравнений и конечное время расчёта.

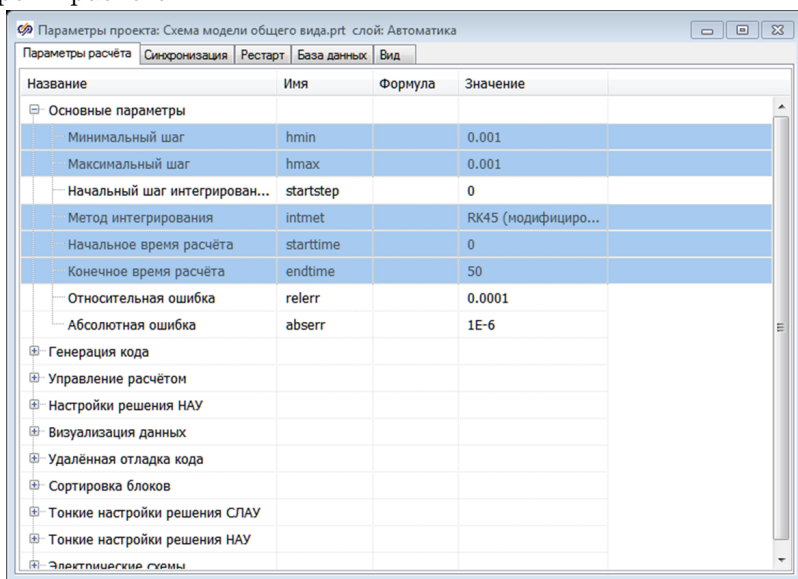


Рис. 2.15. Окно «Параметры расчёта»

Минимальный шаг нужно выбрать исходя из требования точности расчёта, а максимальный исходя из требования скорости расчёта. Для большинства задач, описываемых линейными уравнениями, шаг интегрирования может быть принят равным 10 – 100 точкам на единицу времени.

Методы интегрирования в среде SimInTech имеют несколько нетрадиционных названий. Для большинства практических задач вполне достаточно классического четырёхшагового метода Рунге-Кутты, который обозначен как RK45.

2.2 Формализация линейных моделей возмущённого движения летательного аппарата на тестовых примерах

Передаточной функцией системы или звена называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях. В общем виде она имеет вид правильной дроби

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad m < n. \quad (2.1)$$

Переходной функцией системы называется зависимость выходного сигнала от времени при подаче на её вход единичного ступенчатого воздействия, записанная в операторах Лапласа

$$H(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Переходной характеристикой системы называется оригинал переходной функции системы, то есть её зависимость от физического времени.

Показатели качества переходной характеристики Выделяют прямые и интегральные показатели качества переходной характеристики. Прямые могут быть получены непосредственно по её графику, наиболее интересными являются интегральные оценки качества переходных процессов, которые используются в задачах синтеза параметров систем управления. Выделяют две интегральных оценки качества

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt, \quad (2.2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left[x^2(t) + \tau \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 \right] dt.$$

Интеграл I_2 определяет площадь под кривой квадрата динамической ошибки. Чем меньше этот интеграл, тем быстрее затухает переходный процесс и, следовательно, интеграл I_2 служит мерой быстродействия системы. В ряде случаев система, удовлетворяющая условию минимума I_2 , имеет значительную колебательность переходного процесса.

Интеграл I_3 состоит из двух частей, то есть может быть представлен в виде двух интегралов. Первый является прежним интегралом I_2 , а второй – интегралом от производной регулируемой величины. Минимум интеграла I_3 будет при более медленном, а, следовательно, и менее колебательном переходном процессе. При этом замедление процесса будет тем больше, чем больше величина τ , называемая весовым коэффициентом.

Частотной характеристикой системы называют зависимость выходного сигнала от времени при подаче на её вход гармонического воздействия. Выделяют **амплитудную** и **фазовую** частотные характеристики системы. **Амплитудной ча-**

стотной характеристикой называют зависимость отношения амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала от частоты. **Фазовой частотной характеристикой** называют зависимость фазового сдвига между выходным и входным сигналом от частоты.

Пусть передаточная функция системы или её части имеет вид (2.1), тогда методика определения частотных характеристик следующая

1. В передаточной функции системы (2.1) делают замену $s = j\omega$, где j – мнимая единица, ω – частота сигнала, поданного на вход системы и получают частотную передаточную функцию, также известную как **амплитудно-фазовая частотная характеристика**

$$W(s)|_{s=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega). \quad (2.3)$$

В результате получают вещественную $\text{Re}(\omega)$ и мнимую $\text{Im}(\omega)$ частотные характеристики системы.

2. Амплитудную частотную характеристику определяют по формуле

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}.$$

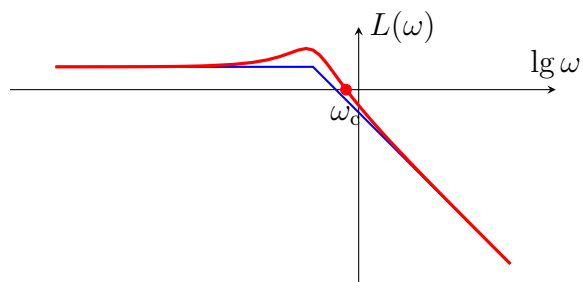
3. Фазовую частотную характеристику определяют по формуле

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}.$$

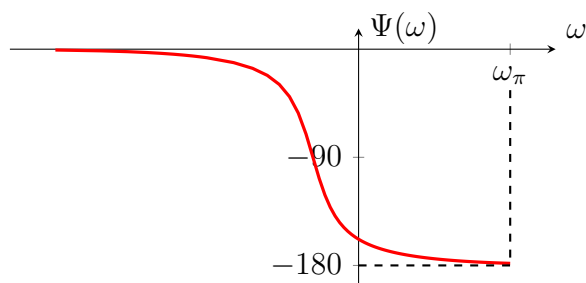
Логарифмическая амплитудная частотная характеристика это кривая, соответствующая выражению $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ и построенная в логарифмическом масштабе частот. **Логарифмической фазовой характеристикой** называется фазовая частотная характеристика, построенная в логарифмическом масштабе частот.

Выделяют частоту среза (ω_c), на которой амплитудная ха-

рактеристика $A(\omega) = 1$ или, что тоже самое $L(\omega) = 0$, и частоту ω_π , на которой фазовая характеристика равна -180° (см. рисунок 2.16). Условием устойчивости системы будет выполнение неравенства $\omega_c < \omega_\pi$.



а) амплитудная частотная характеристика



б) фазовая частотная характеристика

Рис. 2.16. Пример частотных характеристик

Критерий устойчивости Михайлова. Замкнутая система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты гармонического сигнала, поданного на вход системы, от 0 до $+\infty$ вектор $A(j\omega)$ повернётся на угол $n\pi/2$, или, что тоже самое, если кривая Михайлова начиналась на положительной вещественной полуоси, последовательно обходила n квадрантов координатной плоскости в положительном направлении (против часовой стрелки) и заканчивалась в n -ом.

Рассмотрим характеристический полином системы четвёртого порядка $A_4(s) = a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4$. Сделаем замену $s = j\omega$ и выделим в нём вещественную и мнимую части

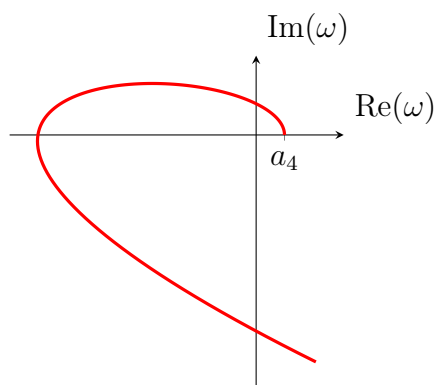
$$\operatorname{Re}(A_4(j\omega)) = a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4,$$

$$\operatorname{Im}(A_4(j\omega)) = -a_1\omega^3 + a_3\omega.$$

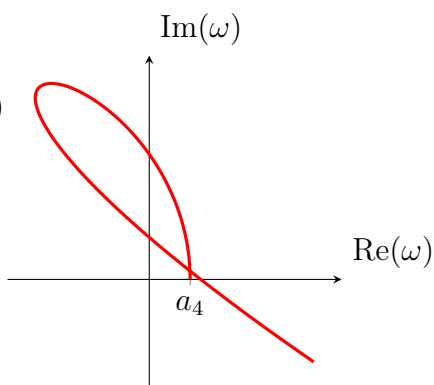
Построим годограф вектора $A_4(j\omega)$ в координатной плоскости $\operatorname{Re}(A_4(j\omega))$ – $\operatorname{Im}(A_4(j\omega))$. Перебирая частоту сигнала, поданного на вход системы, от нуля до «бесконечности», определим пары числовых значений вещественной и мнимой части и после чего построим годограф Михайлова.

На рисунке 2.17 показаны три варианта возможного вида годографа Михайлова – для устойчивой системы, системы, находящейся на границе устойчивости, и неустойчивой системы

1. **Устойчивая система.** Начальное значение частоты равно нулю. В этом случае вещественная часть годографа равна a_4 , мнимая – нулю. Таким образом, годограф начинается на положительном луче вещественной оси в точке a_4 , а при увеличении частоты в положительном направлении огибает четыре (равно порядку характеристического уравнения системы) квадранта координатной плоскости и заканчивается в четвёртом квадранте (см. рисунок 2.17а).
2. **Система находится на границе устойчивости.** Здесь можно выделить два варианта
 - характеристическое уравнение системы имеет один нулевой корень, что означает $a_4 = 0$, а годограф выходит из начала координат (рисунок 2.17б);
 - характеристическое уравнение системы имеет пару чисто мнимых корней $\pm j\omega$, что может быть только если $\operatorname{Re}(A_4(j\omega)) = \operatorname{Im}(A_4(j\omega)) = 0$. В этом случае годограф Михайлова проходит через начало координат (рисунок

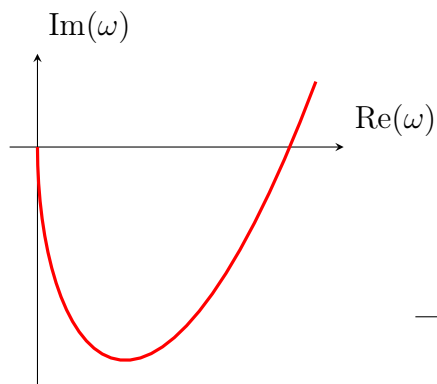


а) Годограф Михайлова устойчивой системы

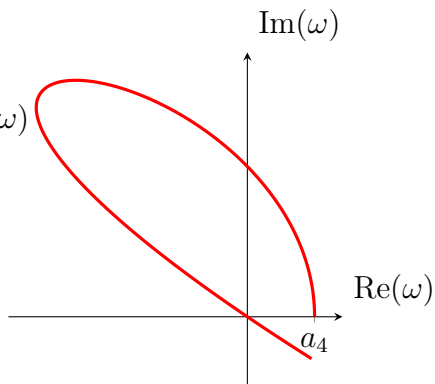


г) Годограф Михайлова неустойчивой системы

Рис. 2.17. Пример вида годографа Михайлова



б) Годограф Михайлова системы, находящейся на границе устойчивости и имеющей нулевой корень



в) Годограф Михайлова системы, находящейся на границе устойчивости и имеющей пару чисто мнимых корней

2.17в). Это свойство особенно важно для определения критического коэффициента усиления, выводящего систему на границу устойчивости.

3. **Система неустойчива.** В этом случае порядок обхода квадрантов координатной плоскости нарушен (рисунок 2.17г).

Критерий устойчивости Найквиста. Критерий устойчивости Найквиста позволяет сделать вывод об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы.

Пусть выражение (2.1) соответствует передаточной функции разомкнутой системы управления, а выражение (2.3) соответствует частотной передаточной функции разомкнутой системы.

Введём в рассмотрение функцию

$$N(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

или в частотном виде

$$N(j\omega) = \frac{A(j\omega) + B(j\omega)}{A(j\omega)}.$$

Вектор $N(j\omega)$ называется вектором Найквиста.

При исследовании устойчивости системы с применением критерия Найквиста следует разделять три случая

1. Разомкнутая система устойчива, то есть её характеристический полином имеет корни только с отрицательной вещественной частью.

Система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до ∞ не охватывает критическую точку с координатами

$(-1, j_0)$.

2. Разомкнутая система неустойчива, то есть её характеристический полином имеет p корней с положительной вещественной частью.

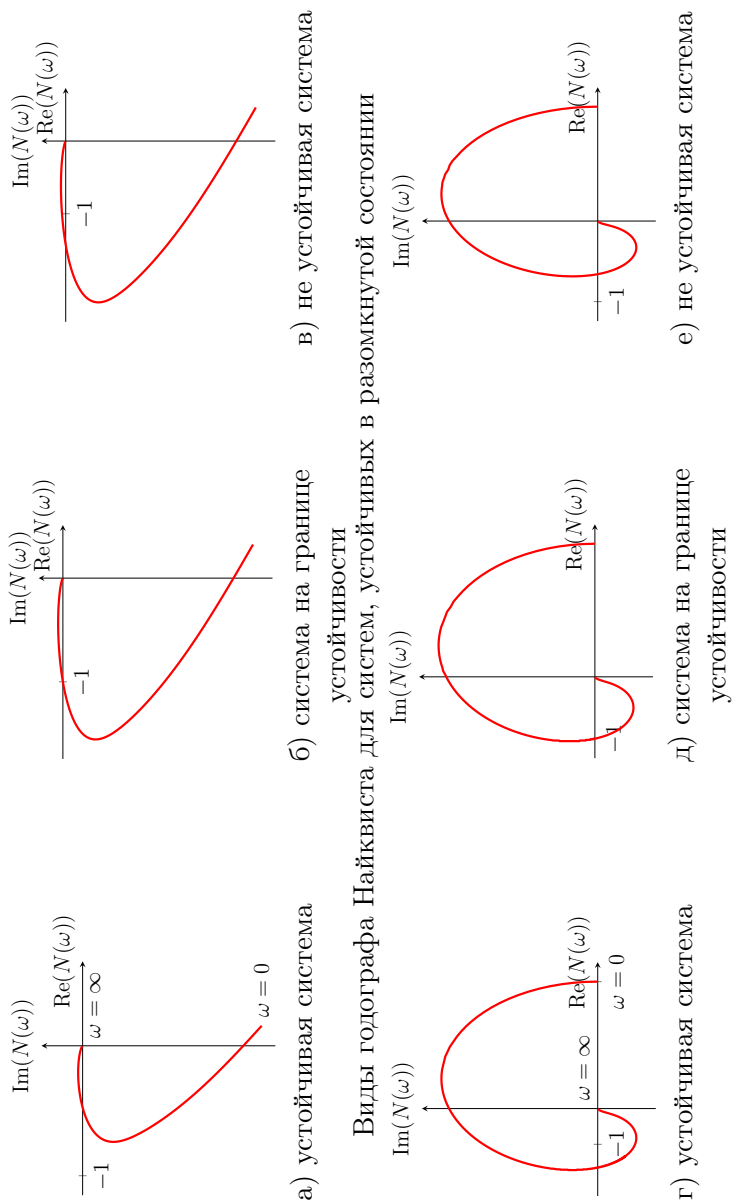
Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при изменении частоты от нуля до ∞ охватывает критическую точку $(-1, j_0)$ в положительном направлении ровно $p/2$ раз.

3. Следует выделить случай, когда разомкнутая система имеет нулевой корень, однако, на практике этот случай может быть отнесён к случаю устойчивой разомкнутой системы.

На рисунке 2.18 показаны виды годографа Найквиста для систем устойчивых (рисунки 2.18а, б и в) и неустойчивых (рисунки 2.18г, д и е) в разомкнутом виде.

Рассмотрим вариант системы, устойчивой в разомкнутом состоянии

1. На рисунке 2.18а годограф не охватил критическую точку, следовательно, система при замыкании обратной связи будет устойчивой.
2. На рисунке 2.18б годограф прошёл через критическую точку, следовательно, система при замыкании обратной связи будет находиться на границе устойчивости.
3. На рисунке 2.18в годограф охватил критическую точку, следовательно, замкнутая система будет неустойчивой.



Виды годографа Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутой состоянии

Виды годографа Найквиста для систем, не устойчивых в разомкнутой состоянии
Рис. 2.18. Пример годографа Найквиста

Для варианта неустойчивой разомкнутой системы предполагается, что характеристический полином разомкнутой системы имеет два неустойчивых нуля. Рассмотрим вид годографа Найквиста

- На рисунке 2.18(г) годограф один раз охватил критическую точку, следовательно, система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом.
- На рисунке 2.18д годограф прошёл через критическую точку, следовательно, замкнутая система будет находится на границе устойчивости.
- На рисунке 2.18е годограф ни разу не охватил критическую точку, следовательно, замкнутая система будет неустойчивой.

Запасы устойчивости. Устойчивость замкнутой системы управления зависит от вида её амплитудно-фазовой частотной характеристики – чем дальше она проходит от критической точки, тем выше устойчивость системы, а при пересечении критической точки система теряет устойчивость.

Возникает вопрос количественной оценки устойчивости системы, которую оценивают запасом устойчивости по **фазе** и по **модулю**.

Запас устойчивости по фазе это угол γ , образованный прямой, проходящей через точку пересечения амплитудно-фазовой частотной характеристики с окружностью единичного радиуса, что соответствует **частоте среза** системы, и отрица-

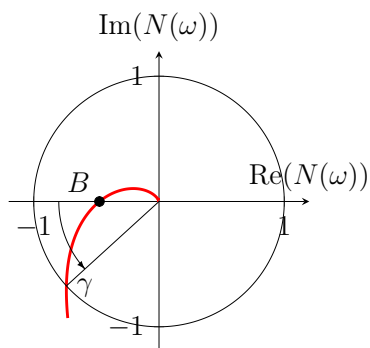


Рис. 2.19. К определению запасов устойчивости

тельным направлением вещественной оси $\gamma = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$.

Запас устойчивости по модулю это величина h равная отношению единицы и длины отрезка OB , где B точка пересечения амплитудно-фазовой частотной характеристики с отрицательным направлением вещественной оси

$$h = \frac{1}{OB} = \frac{1}{A(\omega_\pi)}.$$

Построение передаточной функции. Линеаризованные уравнения движения летательного аппарата в отклонениях от установившегося движения имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\alpha} + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_{\text{рв}}, \\ \Delta\dot{\omega}_z + a_{32}\Delta\alpha + a_{33}\Delta\omega_z &= b_{31}\Delta\delta_{\text{рв}}, \\ \Delta\dot{\vartheta} + a_{43}\Delta\omega_z &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

где α – угол атаки, ω_z – угловая скорость тангажа, ϑ – угол тангажа, a_{ij} – постоянные коэффициенты модели, определяемые массово-инерционными характеристиками летательного аппарата.

Исполнительным устройством является руль высоты, нас интересует угол его отклонения $\Delta\delta_{\text{рв}}$, но в лабораторной работе мы ограничимся только лишь электрическим двигателем, приводящим его в движение, уравнение которого имеет вид

$$T_{\text{рв}} \frac{d}{dt} \Delta\delta_{\text{рв}} + \Delta\delta_{\text{рв}} = K_{\text{рв}} U,$$

где $T_{\text{рв}}$ и $K_{\text{рв}}$ – постоянная времени и коэффициент усиления рулевого привода, $U = K(\vartheta^* - \vartheta) + K_\omega(0 - \omega_z)$ – закон управления.

Выполним преобразование Лапласа над уравнениями (2.4) и запишем систему в матричном виде $X(s)A(s) = G(s)B(s)$, где

матрицы имеют вид

$$X(s) = \begin{bmatrix} \Delta\alpha(s) \\ \Delta\omega_z(s) \\ \Delta\vartheta(s) \end{bmatrix}, \quad A(s) = \begin{bmatrix} s + a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & s + a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & s \end{bmatrix},$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G(s) = \delta(s).$$

Определим передаточную функцию объекта управления (лётательного аппарата), характеризующую его реакцию на отклонение руля высоты (входное воздействие). Для чего необходимо выполнить следующие расчёты:

1. Рассчитать определитель матрицы $\mathbf{A}(s)$:

$$\det(\mathbf{A}(s)) = s(s^2 + (a_{12} + a_{23})s + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

2. В матрице $\mathbf{A}(s)$ заменить столбец искомого параметра на столбец матрицы управления $\mathbf{B}(s)$ и найти определитель полученной матрицы $\mathbf{R}(s)$.

Матрица $\mathbf{R}(s)$ имеет вид

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} s + a_{12} & a_{13} & b_{11} \\ a_{22} & s + a_{23} & b_{12} \\ 0 & a_{33} & s \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathbf{R}(s)$ примет вид

$$\mathbf{R}(s) = -a_{33}(b_{21}(s + a_{12}) - a_{22}b_{11}).$$

3. Найти передаточную функцию объекта управления как

$$W(s) = \frac{\det(\mathbf{R}(s))}{\det(\mathbf{A}(s))}.$$

В результате преобразований получим

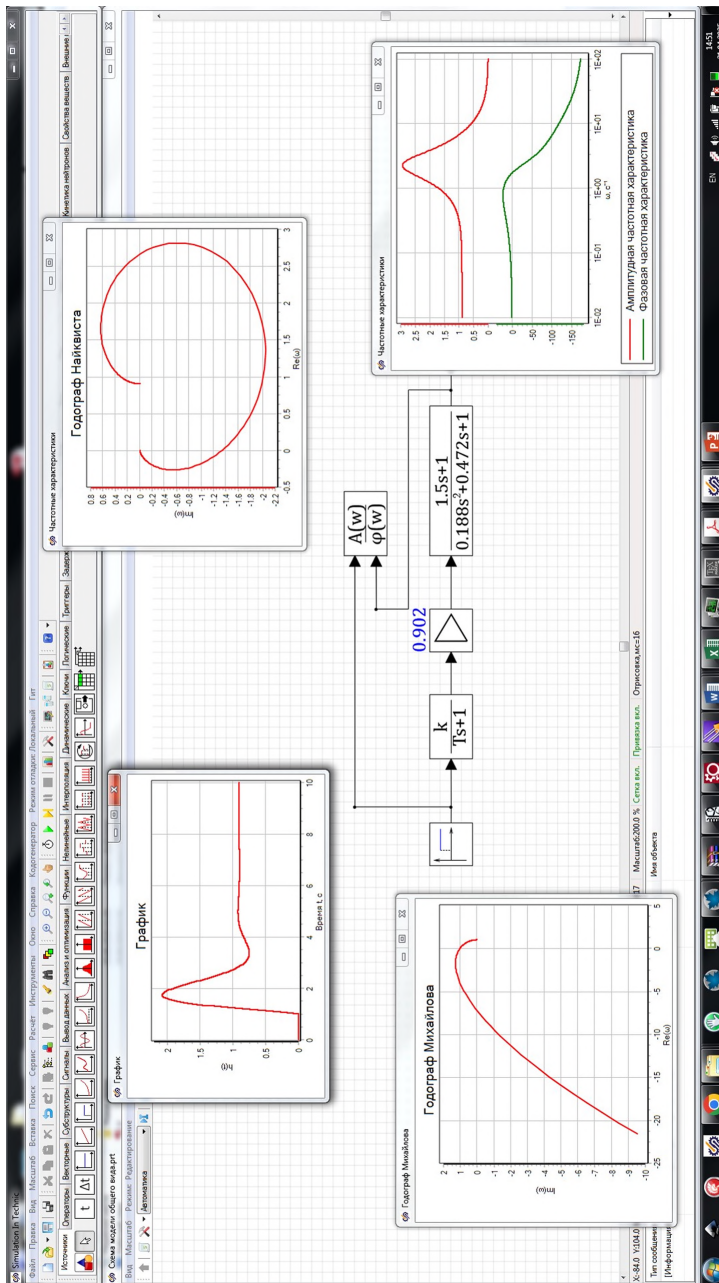
$$W(s) = \frac{K_{\text{ЛА}}(T_1 s + 1)}{T_{\text{ЛА}}^2 s^2 + 2\xi_{\text{ЛА}} T_{\text{ЛА}} s + 1}.$$

Здесь

$$K_{\text{ЛА}} = \frac{b_{31}a_{22} - a_{32}b_{21}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \quad T_1 = \frac{b_{31}}{b_{31}a_{22} - a_{32}b_{21}},$$

$$T_{\text{ЛА}} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}}, \quad \xi_{\text{ЛА}} = \frac{a_{22} + a_{33}}{2\sqrt{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}}.$$

Полученная математическая модель летательного аппарата как объекта исследования может быть формализована на языке структурных схем динамических систем и построена в среде SimInTech в виде, показанном на рисунке 2.20. Дополнительно на этом же рисунке показаны графики переходного процесса при ступенчатом воздействии на летательный аппарат, частотных амплитудной и фазовой характеристик летательного аппарата, годографы Найквиста и Михайлова.



3 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В главе изложены методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория автоматического управления». Лабораторный практикум состоит из пяти лабораторных работ, которые охватывают следующие практически важные вопросы:

1. Построение структурной схемы системы управления по уравнениям движения.
2. Исследование устойчивости систем управления частотными методами.
3. Исследование нелинейных систем методом фазовых портретов.
4. Исследование предельных циклов в нелинейных системах методом гармонической линеаризации.
5. Синтез дискретно-непрерывных (гибридных) систем.

Данный список не является исчерпывающим, объём лабораторных работ может быть увеличен по желанию преподавателя.

По каждой лабораторной работе обучающийся должен подготовить отчёт о проделанной работе. Отчёт оформляется в соответствии со стандартом СТО 02068410-004-2018 «Общие требования к учебным текстовым документам», который опубликован на официальном сайте Самарского университета по адресу www.ssau.ru.

Как правило, в отчёт по лабораторной работе включают:

1. **Титульный лист**, содержащий фамилию, имя и отчество обучающегося, номер его группы и фамилию преподавателя.
2. **Введение**, в котором, как правило, обучающийся должен сформулировать цель и задачи лабораторной работы, а так-

же методы и средства решение поставленных задач и достижения цели работы.

3. **Техническую и математическую постановку задачи.**

В технической постановке задачи должен быть показан объект управления и перечислены его основные свойства, важные с точки зрения теории автоматического управления.

В математическую постановку задачи, как правило, включают дифференциальные уравнения движения объекта, передаточную функцию объекта и структурную схему системы управления.

4. **Исходные данные** к лабораторной работе. В перечень исходных данных включают коэффициенты модели, показанные в таблицах 3.1 – 3.4.

5. **Результаты расчётов.** Результатами расчётов могут быть данные, полученные в ходе выполнения работы, например, графики переходных процессов в системе и/или критическое или оптимальное значение какого-то параметра.

6. **Заключение**, в котором обучающийся должен кратко изложить основные результаты, полученные в лабораторной работе.

3.1 Лабораторная работа №1. Построение схемы системы автоматического управления по уравнениям движения летательного аппарата

Цель работы: изучение методики построения схемы системы управления по математической модели объекта, представленной в виде дифференциальных уравнений.

Содержание работы:

1. Ознакомиться с уравнением вращательного движения космического аппарата, привести его к системе нескольких уравнений первого порядка;
2. Представить полученную систему уравнений в виде схемы. Согласно правилам соединения динамических звеньев, привести схему системы к эквивалентной одноконтурной;
3. Выполнить моделирование движения космического аппарата согласно таблице исходных данных;

Теоретическая справка к лабораторной работе Динамическое звено это некоторое физическое устройство, описываемое каким-либо дифференциальным уравнением, как правило не выше второго порядка. Структурную схему системы автоматического управления можно рассмотреть как соединения динамических звеньев.

В ходе выполнения лабораторной работы исследуются правила соединения динамических звеньев. Выделяют три основных вида их соединения – последовательное, параллельное и соединение с обратной связью (рисунок 3.1).

В случае последовательного соединения выход текущего звена является входом последующего (рисунок 3.1a), а их эквивалентная передаточная функция $W_{\text{посл}}$ равна произведению пе-

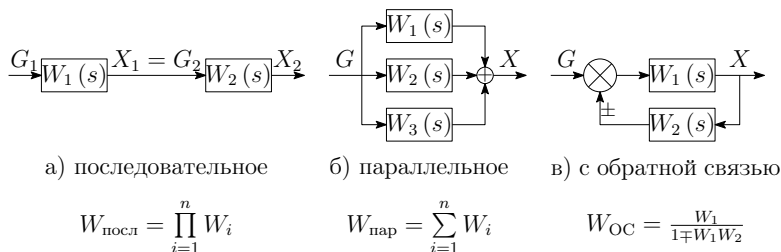


Рис. 3.1. Основные виды соединения динамических звеньев передаточных функций звеньев, соединённых последовательно.

При параллельном соединении нескольких динамических звеньев они имеют один общий вход, а их выходы суммируются. Эквивалентная передаточная функция $W_{\text{пар}}$ параллельного соединения равна сумме передаточных функций каждого звена (рисунок 3.1б).

При соединении нескольких звеньев обратной связью (рисунок 3.1в) выход звена подаётся на его вход с тем же – положительная обратная связь – или обратным знаком – отрицательная обратная связь. В случае отрицательной обратной связи в формуле на рисунке 3.1в нужно использовать знак «плюс», а в случае положительной – знак «минус».

Уравнения движения Известно [6], что космический аппарат, двигаясь по орбите, в силу действия внешних возмущений, приходит во вращение вокруг трёх осей. В лабораторной работе рассматривается вращательное движение космического аппарата вокруг оси φ под действием возмущающего гравитационного и управляющего демпфирующего момента. Запишем уравнение углового движения космического аппарата

$$J\ddot{\varphi} = M_{\Gamma} + M_{\text{Д}}, \quad (3.1)$$

где J – момент инерции космического аппарата, M_{Γ} и $M_{\text{Д}}$ – соответственно гравитационный и демпфирующий моменты, дей-

ствующие на космический аппарат, которые, как известно из курса «Баллистика ракет», определяются соотношениями

$$\begin{aligned} M_{\Gamma} &= -K_{\Gamma}\varphi, \\ M_{\text{Д}} &= -K_{\text{Д}}\frac{d}{dt}\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставив выражения (3.2) для моментов, действующих на космический аппарат, в уравнения движения (3.1), получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{K_{\text{Д}}}{J}\dot{\varphi} + \frac{K_{\Gamma}}{J}\varphi = 0. \quad (3.3)$$

Приведём уравнение (3.3) к системе двух уравнений первого порядка. Введём новую вспомогательную переменную – угловую скорость ω космического аппарата, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{K_{\text{Д}}}{J}\omega - \frac{K_{\Gamma}}{J}\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как рассматривается статически устойчивый космический аппарат, то $K_{\Gamma} > 0$.

Представление уравнений движения в виде схемы

Представим уравнения системы (3.4) в виде схемы. Начнём с первого уравнения. В

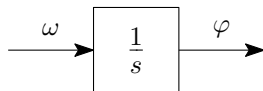


Рис. 3.2. Первое уравнение системы (3.4) в виде схемы

его правой части стоит угловая скорость, а в левой части, после интегрирования, угол поворота космического аппарата. Нарисуем его в виде схемы (рисунок 3.2).

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (3.4). В его правой части **с обратным знаком** стоит угол поворота и угловая скорость космического аппарата, домноженные на соответствующие коэффициенты, а в левой части, после интегрирова-

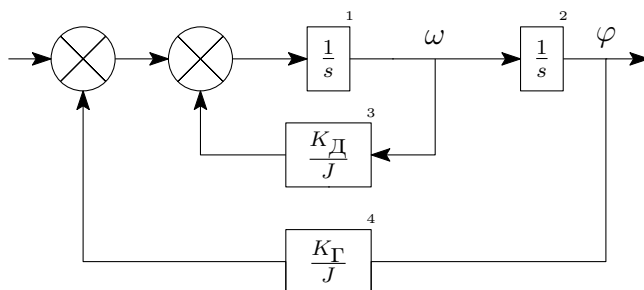


Рис. 3.3. Уравнения системы (3.4) в виде схемы

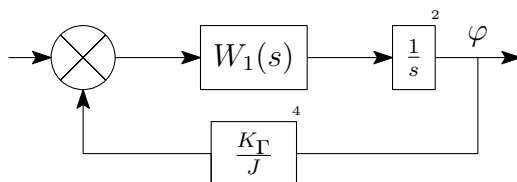


Рис. 3.4. Последовательное соединение интегратора 2 с контуром W_1

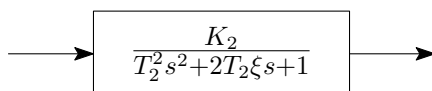


Рис. 3.5. Эквивалентная одноконтурная схема

ния, угловая скорость.

Дополним рисунок 3.2 и окончательно представим уравнения (3.4) в виде схемы (рисунок 3.3).

Приведём схему системы (рисунок 3.3) к **эквивалентному одноконтурному виду**, для чего воспользуемся правилами соединения динамических звеньев.

Начнём с контура, содержащего интегратор 1 и усилитель 3 (рисунок 3.3), которые соединены обратной связью, получим

схему, показанную на рисунке 3.4, запишем:

$$W_1(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \frac{K_D}{J}} = \frac{1}{s + \frac{K_D}{J}}.$$

Интегратор 2 соединён с контуром $W_1(s)$ (рисунок 3.4) последовательно, запишем

$$W_2(s) = W_1 \frac{1}{s}.$$

Далее контур $W_2(s)$ соединён с усилителем 4 отрицательной обратной связью, запишем

$$W_{\text{экв}}(s) = \frac{\frac{W_2}{s}}{1 + W_{\text{ср}} \frac{K_{\Gamma}}{J}} = \frac{K_2}{T_2^2 s^2 + 2T_2 \xi s + 1}, \quad (3.5)$$

где обозначено $K_2 = \frac{J}{K_{\Gamma}}$, $T_2 = \sqrt{\frac{J}{K_{\Gamma}}}$, $\xi = \frac{K_D}{2\sqrt{J K_{\Gamma}}}$, которые необходимо рассчитать по таблице 3.1.

Выражение (3.5) есть эквивалентная передаточная функция системы, показанная на рисунке 3.3.

Построение схемы системы в среде SimInTech

1. Открыть SimInTech. Составить многоконтурную (рисунок 3.3 и 3.6) и одноконтурную (рисунки 3.5 и 3.7) схемы, используя стандартные блоки палитры «динамические» – интегратор, колебательное звено, палитры «операторы» – усилитель и сравнивающее устройство и палитры «Источники» – единичное ступенчатое воздействие, конечное состояние которого указать равным нулю. На многоконтурную схему добавить графики угла ориентации и угловой скорости космического аппарата, использовать временной график палитры «вывод данных». Значения функции на графике привести в градусах и градусах в секунду. Вещественные значения

вводятся с применением точки.

2. В окне параметры расчёта установить время счёта равное половине суток, выраженное в секундах, установить метод интегрирования Рунге-Кутты четвёртого порядка точности, шаг интегрирования одну секунду.
3. Построить графики угла и угловой скорости космического аппарата, затем, используя окно свойств графика, подписать оси на графиках, установить масштаб по осям так, чтобы график был удобочитаемым (рисунок 3.8).

Таблица 3.1. Варианты заданий для лабораторной работы №1

№	J , кг·м ²	K_{Γ} , Н·м	$K_{\text{Д}}$, Н·м·с	№	J , кг·м ²	K_{Γ} , Н·м	$K_{\text{Д}}$, Н·м·с
1	3000	0,001	0,1	14	4000	0,005	0,5
2	3000	0,001	0,5	15	4000	0,005	1
3	3000	0,001	1	16	4000	0,01	0,1
4	3000	0,005	0,1	17	4000	0,01	0,5
5	3000	0,005	0,5	18	4000	0,01	1
6	3000	0,005	1	19	5000	0,001	0,1
7	3000	0,01	0,1	20	5000	0,001	0,5
8	3000	0,01	0,5	21	5000	0,001	1
9	3000	0,01	1	22	5000	0,005	0,1
10	4000	0,001	0,1	23	5000	0,005	0,5
11	4000	0,001	0,5	24	5000	0,005	1
12	4000	0,001	1	25	5000	0,01	0,1
13	4000	0,005	0,1	26	5000	0,01	0,5

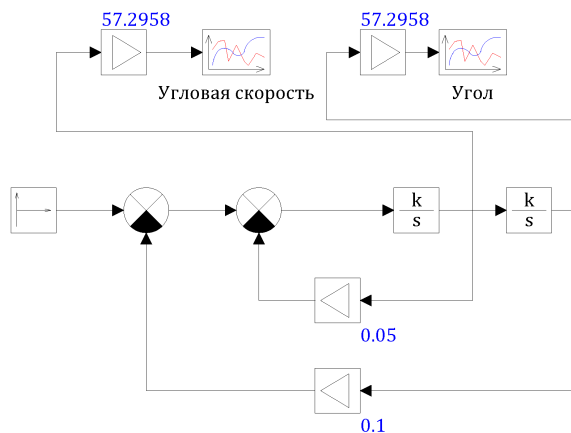


Рис. 3.6. Многоконтурная схема в нотации SimInTech

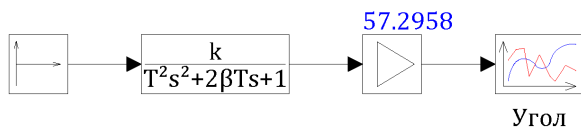


Рис. 3.7. Одноконтурная схема в нотации SimInTech

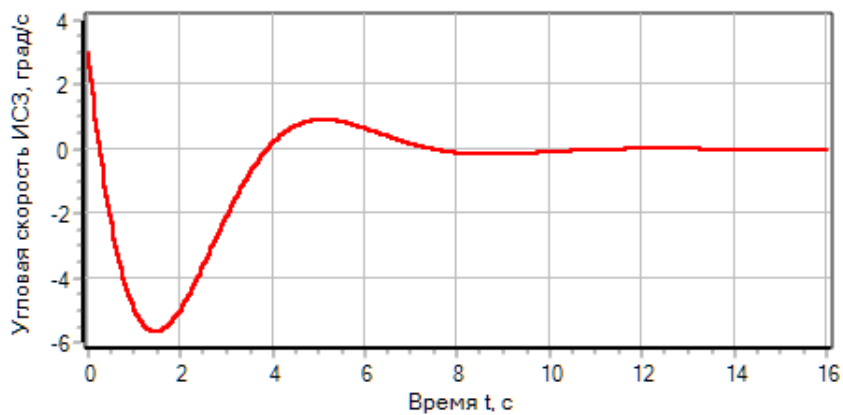


Рис. 3.8. Пример оформления рисунка

3.2 Лабораторная работа №2. Анализ устойчивости системы автоматического управления короткопериодическим движением летательного аппарата

Цель работы: изучить методику оценки устойчивости системы управления летательным аппаратом и вычисления запасов устойчивости.

Содержание работы:

1. Изучение динамики продольного возмущённого движения летательного аппарата (см. раздел 1.3 на странице 17).
2. Построение структурной схемы системы управления короткопериодическим движением летательного аппарата, реализующей управление по отклонению угла тангажа и угловой скорости тангажа самолёта.
3. Компьютерное моделирование переходного процесса в системе управления короткопериодическим движением летательного аппарата. Аналитический расчёт переходной характеристики системы управления.
4. Исследование устойчивости системы управления короткопериодическим движением летательного аппарата с применением частотных критериев устойчивости Михайлова, Найквиста и графиков амплитудной и фазовой частотных характеристик системы с применением компьютера.
5. Компьютерное исследование устойчивости системы управления короткопериодическим движением летательного аппарата в пространстве варьируемых параметров, определение областей устойчивости системы управления.
6. Аналитические исследования границы устойчивости системы управления короткопериодическим движением с применением свойств частотных характеристик систем автомати-

ческого управления.

Выполнение лабораторной работы Рассмотрим динамику продольного углового движения летательного аппарата (рисунок 3.9). Ставится задача приведения угла тангажа летательного аппарата к требуемому ($\vartheta = \vartheta^*$) при нулевой угловой скорости летательного аппарата ($\omega_z = 0$).

В этом случае схема летательного аппарата как объекта управления примет вид, показанный на рисунке 3.10. На вход системы подаётся желаемое значение угла тангажа летательного аппарата. Затем на вход регулятора через обратную связь подаётся разность между текущим и желаемым значением тангажа и угловой скоростью тангажа, который формирует управление – угол отклонения руля высоты. Выходом системы является текущий угол тангажа.

Уравнения движения летательного аппарата получены в первой главе учебного пособия, в разделе 1.2 и имеют вид (1.6) на странице 15. Выпишем линеаризованные уравнения углового движения летательного аппарата как объекта управления

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\alpha} + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_{рв}, \\ \Delta\dot{\omega}_z + a_{32}\Delta\alpha + a_{33}\Delta\omega_z &= b_{31}\Delta\delta_{рв}, \\ \Delta\dot{\vartheta} + a_{43}\Delta\omega_z &= 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

где α – угол атаки, ω_z – угловая скорость тангажа, ϑ – угол тангажа, a_{ij} – коэффициенты модели, определяемые массово-

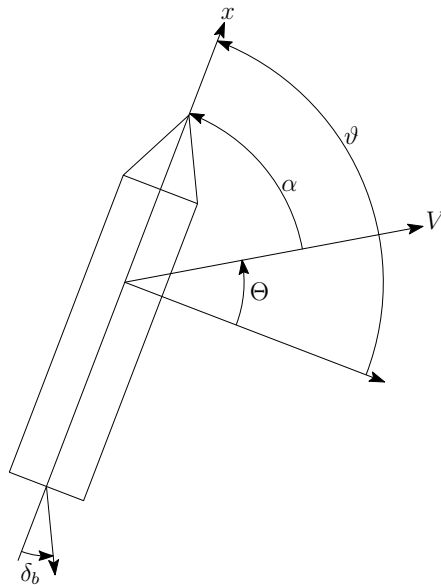


Рис. 3.9. К определению вектора состояния

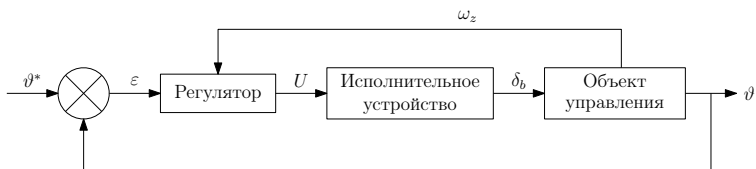


Рис. 3.10. Принципиальная схема системы управления с обратной связью

на рисунке обозначено: ψ^* – требуемое значение угла тангажа, ε – отклонение, U – управление, сформированное регулятором, δ_b – управляющее воздействие (отклонение руля высоты) на объект управления (летательный аппарат), ω_z – угловая скорость, ψ – угол тангажа

инерционными характеристиками летательного аппарата

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= \overline{F}_y^\alpha, & a_{23} &= -1, \\
 a_{32} &= \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \overline{F}_y^\alpha - \overline{M}_{R_z}^\alpha, & a_{33} &= - \left(\overline{M}_{R_z}^{\omega_z} + \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \right), \\
 a_{43} &= -1, \\
 b_{21} &= -\overline{F}_y^{\delta_{\text{PB}}}, \\
 b_{31} &= \overline{M}_{R_z}^{\delta_{\text{PB}}} - \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \overline{F}_y^{\delta_{\text{PB}}}.
 \end{aligned}$$

Здесь в F_y входят силы тяги и аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат в соответствии с (1.2), а в M_{R_z} момент внешних сил, действующих на летательный аппарат в номинальном режиме движения.

Исполнительным устройством является руль высоты, нас интересует угол его отклонения $\Delta\delta_{\text{PB}}$, но в лабораторной работе мы ограничимся только лишь электрическим двигателем, приводящим его в движение, уравнение которого имеет вид

$$T_{\text{PB}} \frac{d}{dt} \Delta\delta_{\text{PB}} + \Delta\delta_{\text{PB}} = K_{\text{PB}} U,$$

где T_{PB} и K_{PB} – постоянная времени и коэффициент усиления рулевого привода, $U = K(\vartheta^* - \vartheta) + K_\omega(0 - \omega_z)$ – закон управления.

Выполним преобразование Лапласа над уравнениями (3.6) и запишем систему в матричном виде $X(s)A(s) = G(s)B(s)$, где матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \begin{bmatrix} \Delta\alpha(s) \\ \Delta\omega_z(s) \\ \Delta\vartheta(s) \end{bmatrix}, & A(s) &= \begin{bmatrix} s + a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & s + a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & s \end{bmatrix}, \\
 B(s) &= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, & G(s) &= \delta(s).
 \end{aligned}$$

Определим передаточную функцию объекта управления (ле-

тательного аппарата), характеризующую его реакцию на отклонение руля высоты (входное воздействие). Для чего необходимо выполнить следующие расчёты:

1. Рассчитать определитель матрицы $\mathbf{A}(s)$.
2. В матрице $\mathbf{A}(s)$ заменить столбец искомого параметра на столбец матрицы управления $\mathbf{B}(s)$ и найти определитель полученной матрицы $\mathbf{R}(s)$.
3. Найти передаточную функцию объекта управления как

$$W(s) = \frac{\det(\mathbf{R}(s))}{\det(\mathbf{A}(s))}.$$

В результате преобразований получим

$$W(s) = \frac{K_{\text{ЛА}}(T_1 s + 1)}{T_{\text{ЛА}}^2 s^2 + 2\xi_{\text{ЛА}} T_{\text{ЛА}} s + 1}.$$

Здесь

$$K_{\text{ЛА}} = \frac{b_{31}a_{22} - a_{32}b_{21}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \quad T_1 = \frac{b_{31}}{b_{31}a_{22} - a_{32}b_{21}},$$

$$T_{\text{ЛА}} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}}, \quad \xi_{\text{ЛА}} = \frac{a_{22} + a_{33}}{2\sqrt{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}}.$$

Учитывая схему показанную на рисунке 3.10 и передаточную функцию объекта управления, получим структурную схему системы управления летательным аппаратом по углу тангажа (рисунок 3.11).

Построение схемы системы в среде SimInTech Для набора структурной схемы (рисунок 3.11) в среде SimInTech (рисунок 3.12) понадобятся типовые блоки¹

1. Усилитель.
2. Аперидические звено первого порядка.
3. Передаточная функция общего вида.
4. Интегратор.
5. Сравнивающее устройство (обратная связь).

¹номер списка соответствует номерам блока на рисунке 3.11

Для исследования переходных процессов следует набрать схему замкнутой системы (рисунок 3.12), а для исследования устойчивости системы следует набрать схему разомкнутой системы (рисунок 3.13).

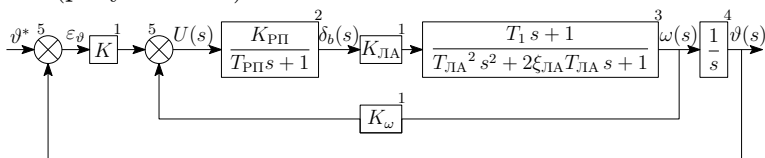


Рис. 3.11. Структурная схема системы управления

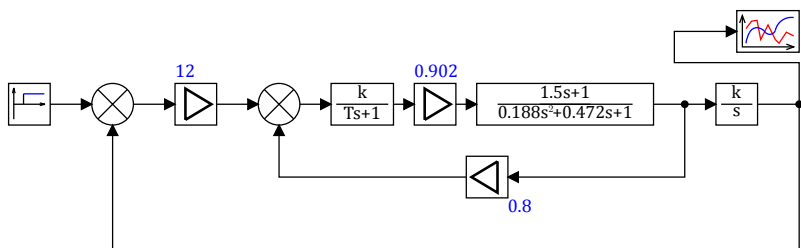


Рис. 3.12. Схема замкнутой системы в нотации SimInTech

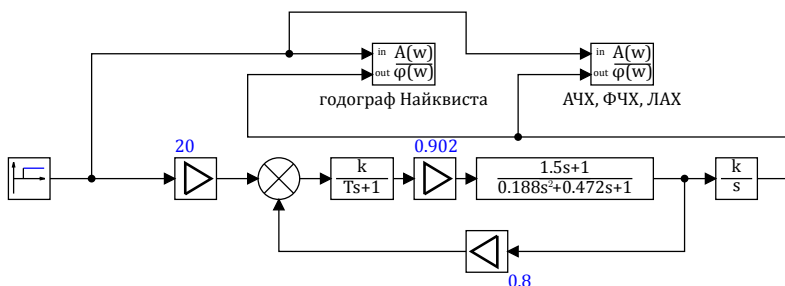


Рис. 3.13. Схема разомкнутой системы системы в нотации SimInTech

Исследование переходного процесса После того как структурная схема системы набрана, необходимо установить настройки шага интегрирования дифференциальных уравнений (см. рисунок 2.15) и метод интегрирования, открыть окно с графиком переходного процесса. График переходного процесса сле-

лать удобочитаемым, для чего установить масштаб по осям, указать единицы измерения величин по осям и их размерность (рисунки 3.14).

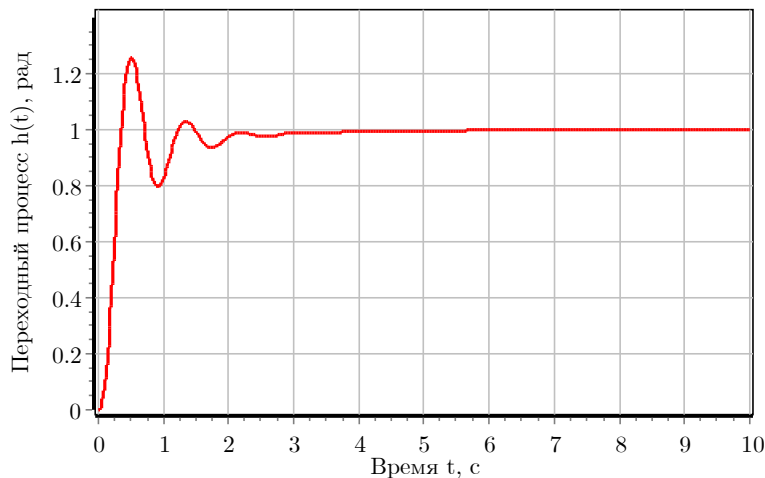


Рис. 3.14. Пример переходного процесса

Необходимо решить задачу выведения системы на границу устойчивости. Варьированием коэффициента усиления ошибки по углу тангажа летательного аппарата K (номер 1 на рисунке 3.11) определить критическое $K_{\text{крит}}$ его значение, при котором система выходит на границу устойчивости, то есть на графике переходного процесса будут видны колебания с постоянной амплитудой.

Оптимизация переходного процесса В теории автоматического управления выделяют аperiodические и колебательные переходные процессы. Как установлено ранее, величина коэффициента усиления ошибки по углу тангажа K оказывает существенное влияние на качество переходного процесса. Ставится задача отыскания такого значения коэффициента усиления,

чтобы переходный процесс длился не более пяти секунд и имел перерегулирование порядка 20-30%, как на рисунке 3.14

Данная задача успешно решается путём оптимизации систем управления по критерию минимума интегральных оценок качества переходных процессов. В работе рассматривается только интегральная оценка I_3 . Для её вычисления схему системы необходимо доработать.

Сначала необходимо «задекларировать» коэффициент усиления ошибки по углу тангажа как переменную. Для этого необходимо открыть окно генерации сигналов (см. рисунок 2.14) и создать новый сигнал, присвоив ему имя K . Затем в окне свойств усилителя, соответствующего коэффициенту усиления ошибки по углу тангажа, в поле «Формула» следует указать название переменной K (см. рисунок 2.3).

Затем в схему системы следует добавить блоки, реализующие расчёт интегральных показателей качества (палитра «Динамические», блок «Функционал квадратичный»), а также «Оптимизатор», «Сумматор» и блок «Запись в список сигналов», расположенный в палитре «Сигналы». В результате схема системы примет вид, показанный на рисунке 3.15.

После добавления оптимизатора, запустить расчёт, по окончании которого будет доступен график оптимизированного переходного процесса (см. рисунок 3.14). Варьированием коэффициентов на входах сумматора, добиться того, чтобы переходный процесс длился около четырёх-пяти секунд и имел перерегулирование порядка 20-30%.

Исследование устойчивости системы управления по критерию Михайлова После построения переходного процесса можно построить кривую Михайлова (рисунок 3.16), от-

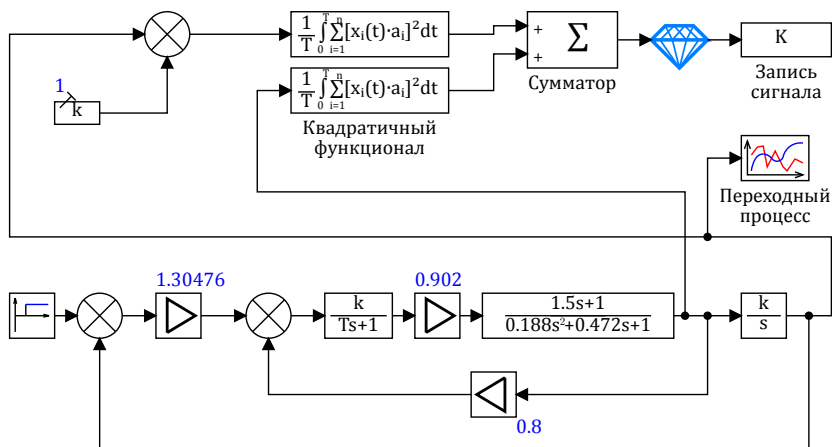


Рис. 3.15. Схема системы автоматического управления с оптимизатором

крыв окно свойств которой необходимо задать начальную и конечную частоты гармонического сигнала, подаваемого на вход системы (рисунок 2.11). Начальную частоту следует установить как можно меньшей, например 10^{-10} Гц, а конечную подобрать так, чтобы часть кривой Михайлова, наиболее близкая к критической точке, была видна на графике.

В качестве образца принять рисунок 3.16

Исследование устойчивости системы управления по критерию Найквиста Как известно, согласно критерию Найквиста, вывод об устойчивости замкнутой системы делается на основании АФЧХ разомкнутой системы. Следовательно, в рассматриваемом случае необходимо исключить из рассмотрения главную обратную связь (нижняя линия на рисунке 3.11), что соответствует приведению схемы системы к виду, показанному на рисунке 3.13.

Для построения годографа Найквиста в свойствах блока

«Построение частотных характеристик» в поле «Тип характеристики» (см. рисунок 2.11) следует выбрать годограф Найквиста, начальную и конечную частоты сигнала, поданного на вход системы нужно принять равными 2 и 200 Гц соответственно.

Для определения запаса устойчивости необходимо дополнить кривую Найквиста окружностью единичного радиуса (это можно сделать в редакторе Paint), а для её выравнивания необходимо установить минимум и максимум по осям рисунка ± 1.2 .

Построение частотных характеристик Для определения частоты среза системы ω_c и частоты ω_π необходимо получить график амплитудной и фазовой частотной характеристики.

Для построения годографа Найквиста и графиков частотных характеристик необходимо выполнить следующие действия. Для построения графиков логарифмической амплитудной и фазовой характеристик системы в свойствах блока «Построение частотных характеристик» в поле «Тип характеристики» (см. рисунок 2.11) следует выбрать ЛАХ и ФЧХ, начальную и конечную частоты сигнала, поданного на вход системы следует принять равной 0.01 и 100 Гц соответственно.

Возможно, данные частоты нужно будет «подрегулировать» так, что бы отчётливо были видны частота среза системы ω_c и частота ω_π . За образец следует принять рисунок 3.18

Аналитический расчёт критического коэффициента усиления Приведём схему, показанную на рис. 3.11 к эквивалентному одноконтурному виду. Для чего воспользуемся правилами соединения динамических звеньев, при этом коэффициент K будем считать неизвестной величиной. В общем виде получим

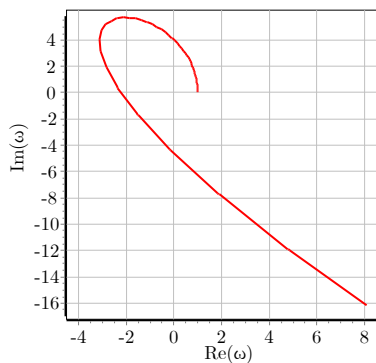


Рис. 3.16. Пример годографа Михайлова

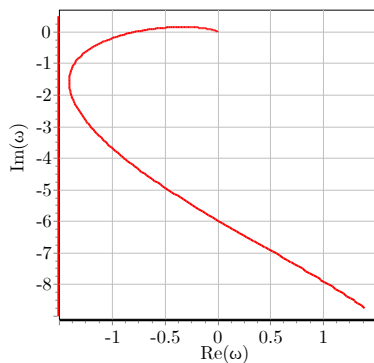


Рис. 3.17. Пример годографа Найквиста

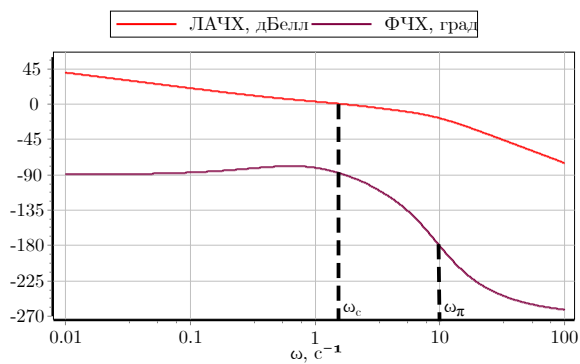


Рис. 3.18. Пример графика амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$W_{\text{экв}}(s) = \frac{K K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} (T_1 s + 1)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (3.7)$$

здесь обозначено

$$a_4 = T_{\text{ЛА}}^2 T_{\text{РП}},$$

$$a_3 = T_{\text{ЛА}} (T_{\text{ЛА}} + 2\xi_{\text{ЛА}} T_{\text{РП}}),$$

$$a_2 = K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} T_1 K_{\omega} + 2T_{\text{ЛА}} \xi_{\text{ЛА}} + T_{\text{РП}},$$

$$a_1 = 1 + K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} (K T_1 + K_{\omega}),$$

$$a_0 = K K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}}.$$

В характеристическом полиноме замкнутой системы – знаменателе эквивалентной передаточной функции – сделаем замену $s = j\omega$, где j – мнимая единица, ω – частота гармонического сигнала, подаваемого на вход системы. Построим частотный характеристический полином и выделим его вещественную и мнимую часть

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A(\omega)) &= T_{\text{ЛА}}^2 T_{\text{РП}} \omega^4 - \\ &- (K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} T_1 K_{\omega} + 2T_{\text{ЛА}} \xi_{\text{ЛА}} + T_{\text{РП}}) \omega^2 + \\ &+ K K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A(\omega)) &= - (T_{\text{ЛА}}^2 + 2T_{\text{ЛА}} T_{\text{РП}} \xi_{\text{ЛА}}) \omega^3 + \\ &+ [K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} (K T_1 + K_{\omega}) + 1] \omega = 0. \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений необходимо решить численно относительно неизвестных K и ω .

Расчёт переходной функции Переходная характеристика системы получается из её передаточной функции путём подачи на вход системы единичного ступенчатого сигнала. В рассматриваемом случае получим

$$H(s) = \frac{W_{\text{экв}}(s)}{s}.$$

При коэффициентах модели

$$K_{\text{ЛА}} = 0.902, \quad T_{\text{ЛА}} = 0.434, \quad \xi_{\text{ЛА}} = 0.544;$$

$$T_1 = 1.5, \quad K_{\omega} = 1.2, \quad k = 12,$$

получим переходную функцию системы

$$W(s) = \frac{1}{s^4 + 15.007s + 144.39s^2 + 1215.6s + 718.31}.$$

По переходной функции определяют переходную характеристику системы по следующему алгоритму

1. Сначала определяют производную характеристического полинома переходной функции

$$A'_s(s) = 0.075345s^4 + 0.90456s^3 + 6.5274s^2 + 31.224s + 9.02.$$

2. Затем определяют корни характеристического уравнения переходной функции. В нашем случае получим

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -0.6295, \quad s_3 = -10.232 \quad s_{4,5} = -2.0725 \pm j9.4143.$$

3. В зависимости от вида корня s_i определяют значение одного из трёх выражений

– если $s_i = 0$, то $f_i = 1$. В нашем случае $s_1 = 0$, следовательно, $f_1 = 1$;

– если s_i действительный корень, в этом случае

$$f_i = \frac{B(s_i)}{A'_s(s_i)} e^{s_i t}.$$

В нашем случае действительные корни s_2 и s_3 , запишем $f_2 = -0.0608e^{-0.6295t}$ и $f_3 = -0.5631e^{10.232t}$.

– если корень комплексно-сопряжённый $s_i = a + jb$, то определяют действительную и мнимую части выражения

$$g_i = \frac{B(s_i)}{A'_s(s_i)} = \alpha_i + j\beta_i,$$

а также его модуль и аргумент

$$r_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad \varphi_i = \arctan \frac{\beta}{\alpha}.$$

После чего значение выражения f_i , соответствующее ком-

плексно-сопряжённому корню s_i , определится как

$$f_i = r_i e^{a_i t} \cos(b_i t + \varphi_i).$$

В нашем случае комплексно-сопряжённые корни s_4 и s_5 , определим $g_{4,5} = -0.188 \pm j0.3495$, его модуль $r_{4,5} = 0.39685$ и аргумент $\varphi_{4,5} = \pm 2.0644$. После чего получим $f_4 = f_5 = 0.39685 e^{-2.0725t} \cos(9.4143t + 2.0644)$.

4. Переходная функция получается суммированием

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i = 1 - 0.0608 e^{-0.6295t} - 0.5631 e^{10.232t} + \\ + 0.7937 e^{-2.0725t} \cos(9.4143t + 2.0644),$$

где n – количество корней характеристического полинома.

График полученной передаточной функции следует построить в любом математическом редакторе и сравнить с полученным средствами SimInTech.

Порядок выполнения работы в SimInTech

1. Открыть SimInTech, набрать структурную схему замкнутой системы (см. рисунки 3.11 или 3.12). Выполнить исследование переходного процесса
 - (а) Выполнить моделирование переходного процесса (рисунок 3.14) согласно заданию (таблица 3.2), дать ему характеристику, сделать вывод об устойчивости переходного процесса.
 - (б) Выполнить параметрические исследования влияния величины коэффициента усиления ошибки по углу тангажа летательного аппарата, подобрать критический коэффициент усиления $K_{\text{крит}}$, выводящий систему на границу устойчивости.
 - (с) Структурную схему системы дополнить оптимизатором (см. рисунок 3.15) и выполнить оптимизацию переход-

ного процесса по критерию I_3 , необходимо найти такой весовой коэффициент, который обеспечивает продолжительность переходного процесса четыре-пять секунд и перерегулирование 20 – 30 %.

2. Исследование устойчивости системы управления частотными методами. Расчёты необходимо выполнить для трёх вариантов коэффициента усиления ошибки по углу тангажа – по заданию, при $K = K_{\text{крит}}$ и большем критического.

(а) Построить кривую Михайлова. Доказать, что в первом случае система устойчива, во втором находится на границе устойчивости и в третьем случае не устойчива.

(б) Построить кривую Найквиста. Для устойчивой системы рассчитать запасы устойчивости по фазе и по модулю, а для случая системы, находящейся на границе устойчивости и неустойчивой системы доказать это.

(с) Построить графики амплитудной и фазовой частотной характеристик, найти частоты среза ω_c и частоту ω_π .

3. Аналитические расчёты

(а) Используя правила соединения динамических звеньев, привести структурную схему разомкнутой и замкнутой системы к эквивалентному одноконтурному виду.

(б) Для подтверждения правильности выполненных численных исследований, для варианта коэффициента усиления K по заданию, получить аналитическую форму переходной характеристики системы управления, построить её график и сравнить с полученным в SimInTech.

(с) Выполнить аналитический расчёт критического коэффициента усиления ошибки по углу тангажа системы.

Таблица 3.2. Варианты заданий для лабораторной работы №2.
Коэффициент усиления рулевого привода $K_{РП} = 1$ и
постоянная времени рулевого привода $T_{РП} = 0.08$ для всех
вариантов постоянны

№	K	K_{ω}	$K_{ЛА}$	T_1	$T_{ЛА}$	$\xi_{ЛА}$
1	2	0.8	0.902	1.5	0.434	0.544
2	5	1.2	1.3	1.074	0.333	0.542
3	3.5	0.75	1.522	0.416	0.106	0.4176
4	1.5	0.6	0.89	1.777	0.459	0.452
5	7	1.5	0.65	0.53	0.0907	0.216
6	3	1.2	0.58	0.526	0.0933	0.294
7	4.5	1.6	0.796	2.032	0.342	0.32
8	6	1.5	0.24	1.679	0.135	0.107
9	8	1.8	0.254	2.1	0.146	0.121
10	10	2	0.161	3.648	0.261	0.106
11	4	0.9	0.148	3.73	0.235	0.0776
12	2	0.5	0.485	2.29	0.998	0.57
13	5.5	0.7	0.534	2.016	0.947	0.592
14	9	1.3	0.523	2.041	0.924	0.596
15	8.5	1.4	0.606	1.754	0.857	0.63
16	6	1.2	0.62	1.68	0.828	0.634
17	5.5	1.2	0.645	1.6	0.8	0.655
18	3.5	1.1	0.7	1.439	0.78	0.664
19	2.5	0.8	1.14	1.186	0.525	0.478
20	3	0.9	1.196	1.12	0.512	0.487
21	5.5	1.2	1.36	0.884	0.3785	0.5
22	6	1.2	1.4267	0.847	0.37	0.503
23	4	1.1	1.477	0.807	0.36	0.513
24	7	1.3	1.48	0.721	0.29	0.483
25	8.5	1.4	1.359	0.829	0.38	0.602

3.3 Лабораторная работа №3. Исследование системы стабилизации летательного аппарата методом фазовых портретов

Цель работы: изучение методики построения фазовых портретов системы управления.

Содержание работы:

1. Изучение математической постановки задачи.
2. Построение структурной схемы системы управления.
3. Исследование влияния параметров системы управления на характеристики фазового портрета.

В лабораторной работе рассматривается космический аппарат, имеющий релейную систему ориентации с зоной нечувствительности на базе реактивных двигателей малой тяги. Предполагается, что в силу действия внешних сил, космический аппарат потерял заданную ориентацию. Ставится задача моделирования режима восстановления заданной ориентации.

Уравнения движения космического аппарата Дифференциальные уравнения управляемого углового движения космического аппарата имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vartheta &= \omega_z, \\ \frac{d}{dt}\omega_z &= \frac{M}{J_z},\end{aligned}\tag{3.8}$$

где ϑ – угол тангажа, ω_z – угловая скорость, J_z – момент инерции, M – управляющий момент.

При формировании управляющего момента используется пропорциональный закон управления. Управляющее воздействие формируется как сумма ошибок по углу и угловой скорости.

рости космического аппарата, умноженные на соответствующие коэффициенты

$$M(\vartheta, \omega_z) = -\vartheta K_\vartheta - \omega_z K_\omega = M(U_y). \quad (3.9)$$

Здесь K_ϑ и K_ω – коэффициент усиления ошибки по углу и угловой скорости соответственно, момент, сообщаемый космическому аппарату определяется суммой ошибок $U_y = -\vartheta K_\vartheta - \omega_z K_\omega$.

С целью уменьшения затрат рабочего тела на борту космического аппарата, введём в закон управления пассивные участки, то есть система ориентации не будет реагировать на малые отклонения угла тангажа и угловой скорости (то есть при сумме $-\vartheta K_\vartheta - \omega_z K_\omega$ меньшей некоторого порогового значения b) от нулевого значения

$$M(U_y) = \begin{cases} C \operatorname{sign}(U_y) & \text{при } |U_y| \geq b, \\ 0 & \text{при } |U_y| < b. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь C – величина управляющего момента (по модулю), b – граница зоны нечувствительности по углу тангажа.

На основании дифференциальных уравнений движения (3.8) и управления (3.9) и (3.10), составим структурную схему системы стабилизации космического аппарата (см. рисунок 3.19). Её нотация в среде SimInTech показана на рисунке 3.20.

Построение фазового портрета. Разделим второе уравнение системы дифференциальных уравнений движения на первое и получим уравнение для фазовых траекторий

$$\frac{d}{d\vartheta} \omega_z = \frac{M(\vartheta, \omega_z)}{J_z \omega_z}.$$

Как следует из последнего уравнения, система имеет особую точку с координатами $(0, 0)$, которая соответствует началу

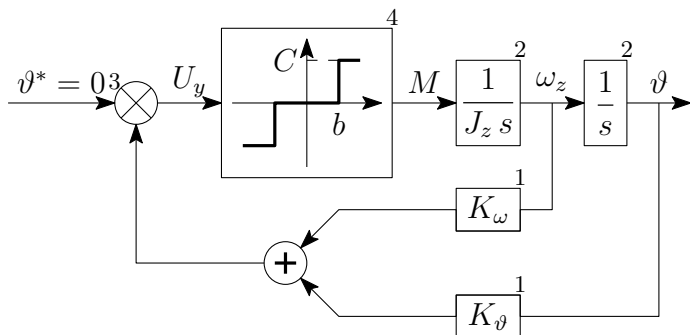


Рис. 3.19. Структурная схема системы стабилизации космического аппарата

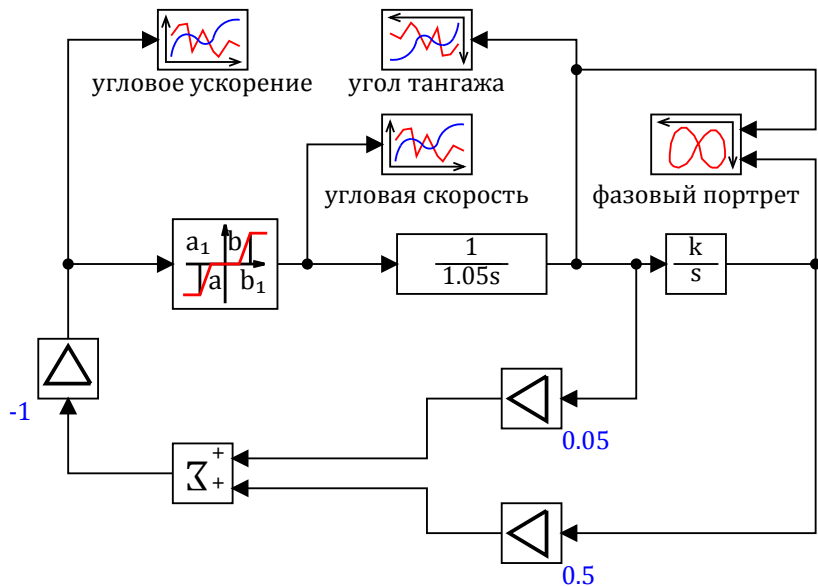


Рис. 3.20. Схема системы в среде SimInTech

координат. Решение системы при $|U_y| \geq b$ имеет вид

$$\omega_z(t) = \omega_z(0) + \frac{M}{J_z} t,$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + \omega_z(0) t + \frac{M}{2J_z} t^2.$$

При $|U_y| < b$ получим пассивное движение космического аппа-

рата

$$\omega_z(t) = \omega_z(0),$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + \omega_z(0) t.$$

Линия переключения определяется уравнением

$$|\vartheta K_{\vartheta} + \omega_z K_{\omega}| = b. \quad (3.11)$$

Построение схемы системы в среде SimInTech Для набора схемы системы управления (рисунок 3.20) понадобятся блоки²

1. Усилитель.
2. Интегратор.
3. Сумматор.
4. Нелинейный блок с нечувствительностью и насыщением (см. рисунок 2.7).

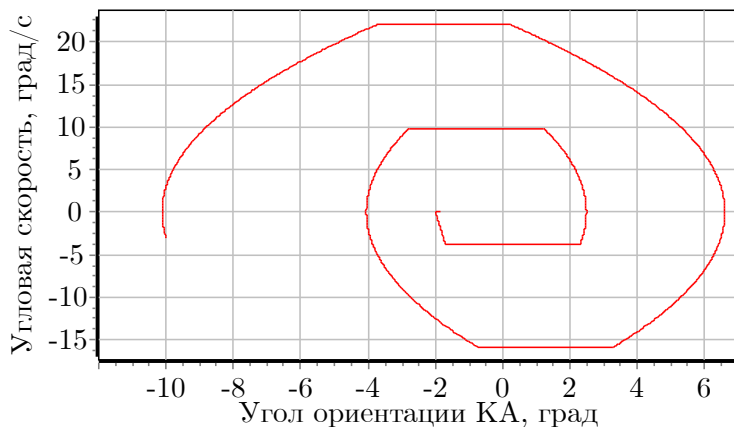


Рис. 3.21. Фазовый портрет

Для корректного набора нелинейного блока границы линейного участка следует сделать равными ($a = a_1$, $b = b_1$), а в интеграторах указать соответствующие начальные отклонения уг-

²номер списка соответствует номеру блока на рисунке 3.19

ловой скорости и угла тангажа.

Порядок выполнения работы в SimInTech

Открыть SimInTech, набрать схему системы (см. рисунки 3.19 или 3.20). Выполнить моделирование при начальном отклонении угла тангажа $\vartheta_0 = 10^\circ$, угловой скорости $\omega_{z0} = 3^\circ/\text{сек}$, коэффициенты усиления ошибок принять равными $K_\vartheta = 0.5$ безразмерных единиц $K_{\omega_z} = 0.05$ сек, параметры нелинейного блока в таблице 3.3. Фазовый портрет показан на рисунке 3.21. Подобрать коэффициент усиления K_ϑ так, чтобы стабилизация занимала не более двух включений тяги.

Таблица 3.3. Варианты заданий для лабораторной работы №3

№	U_y , Н · м	b , град	J_z , кг · м ²	№	U_y , Н · м	b , град	J_z , кг · м ²
1	30	1	1,5	14	40	2	2
2	30	1	2	15	40	2	2,5
3	30	1	2,5	16	40	3	1,5
4	30	2	1,5	17	40	3	2
5	30	2	2	18	40	3	2,5
6	30	2	2,5	19	50	1	1,5
7	30	3	1,5	20	50	1	2
8	30	3	2	21	50	1	2,5
9	30	3	2,5	22	50	2	1,5
10	40	1	1,5	23	50	2	2
11	40	1	2	24	50	2	2,5
12	40	1	2,5	25	50	3	1,5
13	40	2	1,5	26	50	3	2

3.4 Лабораторная работа №4. Анализ системы автоматического управления короткопериодическим движением летательного аппарата с нелинейным рулевым приводом

Цель работы: изучение методики исследования устойчивости предельных циклов, возникающих в нелинейной системы управления, методом гармонической линеаризации

Содержание работы:

1. Изучение структурной схемы системы управления с нелинейным рулевым приводом.
2. Определение эквивалентной одноконтурной передаточной функции нелинейной системы управления с применением гармонического коэффициента.
3. Моделирование влияния начальных условий движения летательного аппарата на устойчивость предельного цикла, возникающего в системе управления.

Выполнения лабораторной работы Вернёмся к лабораторной работе №2, в которой в качестве рулевого привода рассматривалось апериодическое звено первого порядка. На практике, рулевой привод осуществляет отклонение аэродинамических поверхностей, в данном случае рулей высоты, в некотором направлении в строго определённых пределах. Это означает наличие нелинейности типа насыщение. На рисунке 3.22 показана схема системы с нелинейным рулевым приводом, а на рисунке 3.23 её нотация в SimInTech.

Применение метода гармонической линеаризации

Применим к указанной системе метод гармонической лине-

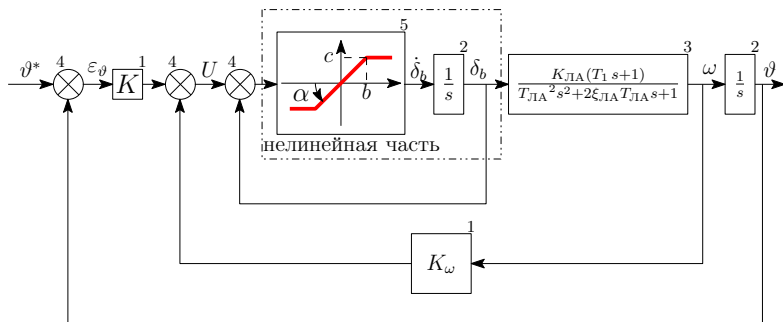


Рис. 3.22. Схема системы управления углом тангажа летательного аппарата с нелинейным рулевым приводом

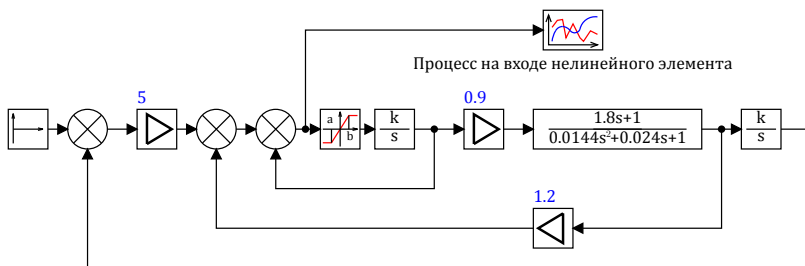


Рис. 3.23. Схема системы управления в нотации SimInTech
аризации. В рассматриваемом случае (нелинейность типа насы-
щение) коэффициент гармонической линеаризации имеет вид

$$q(A) = \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right). \quad (3.12)$$

Заменим в схеме нелинейную характеристику гармониче-
ским коэффициентом, согласно правилам соединения динами-
ческих звеньев, для рулевого привода (нелинейной части) запи-
шем

$$W_{\text{РП}}(A) = \frac{q(A)}{s + q(A)}. \quad (3.13)$$

Разделим числитель и знаменатель правой части выраже-
ния (3.13) на $q(A)$, получим

$$W_{\text{РП}} = \frac{1}{\frac{s}{q(A)} + 1},$$

то есть $q(A) = T_{\text{РП}}^{-1}$ для принятой формы записи аperiodического звена первого порядка.

Подставим полученную передаточную функцию с структурную схему системы стабилизации угла тангажа летательного аппарата и приведём её к эквивалентному одноконтурному виду

$$\Phi(s) = \frac{K K_{\text{ЛА}} q(A) (T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4},$$

где

$$d_0 = T_{\text{ЛА}}^2,$$

$$d_1 = q(A) T_{\text{ЛА}}^2 + 2 T_{\text{ЛА}} \xi_{\text{ЛА}},$$

$$d_2 = q(A) (2 T_{\text{ЛА}} \xi_{\text{ЛА}} + K_{\text{ЛА}} T_1 K_{\omega}) + 1,$$

$$d_3 = q(A) (K_{\text{ЛА}} K_{\omega} + K K_{\text{ЛА}} T_1 + 1),$$

$$d_4 = q(A) K K_{\text{ЛА}}.$$

В характеристическом полиноме замкнутой системы сделаем замену $s = j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части

$$\text{Re}(\omega) = d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4 = 0,$$

$$\text{Im}(\omega) = -d_1 \omega^3 + d_3 \omega = 0.$$

Эту систему необходимо решить численно и найти неизвестные $q(A)$ и ω . Рассмотрим решение этого уравнения при $K = 5$, $K_{\omega} = 1.2$, $K_{\text{ЛА}} = 0.9$, $T_1 = 1.8$, $T_{\text{ЛА}} = 0.12$, $\xi_{\text{ЛА}} = 0.1$. Получим $\omega = 10,5353$, $q(A) = 0,3104$;

$$\omega = 20,9193, \quad q(A) = 2,7081.$$

Так как оба полученных значения гармонического коэффициента и соответствующие им частоты вещественны и положительны, следовательно, в системе существуют два предельных цикла. Далее необходимо определить амплитуды предельных циклов A численно из формулы для $q(A)$. При $b = 0,12$ и $k_1 = \tan \alpha = c/b = 6,7$, получим

$$\text{при } q(A) = 0,3104, \quad A = 3,2971;$$

$$\text{при } q(A) = 2,7081, \quad A = 0,3713.$$

Определить который из двух предельных циклов устойчив можно только путём численного моделирования процесса стабилизации летательного аппарата.

Построение Схемы в Среде SimInTech Схема системы в нотации SimInTech показана на рис. 3.23. Для набора схемы структурной схемы системы управления (рисунок 3.22) понадобятся блоки

1. Усилитель.
2. Интегратор.
3. Передаточная функция общего вида.
4. Сравнивающее устройство.
5. Линейное с насыщением.

Выполним моделирование процесса стабилизации летательного аппарата при различных начальных отклонениях регулируемой величины – угла тангажа, которая определяет амплитуду A и частоту ω свободных колебаний входного сигнала на входе нелинейного элемента.

Пусть в первом случае начальное значение угла тангажа равно $\vartheta_0 = 5^\circ$, а во втором $\vartheta_0 = 7^\circ$. На рисунках 3.24 и 3.25 показаны переходные процессы на входе нелинейного элемента при различных углах тангажа. При малых отклонениях угла тангажа переходный процесс будет носить колебательный характер с образованием **неустойчивого** предельного цикла (на рисунке 3.24 амплитуда колебаний некоторое время держится постоянной, затем уменьшается до нуля). При увеличении отклонения угла тангажа до величины порядка 6.17° возникает второй **устойчивый** предельный цикл (рисунок 3.25).

Порядок выполнения работы

1. Варианты характеристик нелинейного рулевого привода берут из таблицы 3.4, оставшиеся параметры берутся из таблицы 3.2. Согласно описанной методике определяют амплитуду предельного цикла.
2. Открыть SimInTech, набрать схему системы (см. рисунки 3.22 и 3.23).
3. Выполнить моделирование с различными начальными углами тангажа летательного аппарата, определить предельное отклонение угла тангажа, при котором в системе возникают автоколебания.
4. Сравнить амплитуды колебаний на входе нелинейного элемента с рассчитанными аналитически для случая неустойчивого предельного цикла и автоколебаний.

Таблица 3.4. Варианты заданий для лабораторной работы №4

№	Параметр нелиней- ного блока c	Параметр нелиней- ного блока b	№	Параметр нелиней- ного блока c	Параметр нелиней- ного блока b
1	1	0,1	13	1,4	0,14
2	1,2	0,12	14	1,3	0,13
3	1,25	0,125	15	1,25	0,125
4	1,3	0,13	16	1,3	0,13
5	1,35	0,135	17	1,4	0,14
6	1,2	0,12	18	1,2	0,12
7	1,25	0,125	19	1,1	0,11
8	1,4	0,14	20	1,25	0,125
9	1,3	0,13	21	1,2	0,12
10	1,3	0,13	22	1,4	0,14
11	1,25	0,125	23	1,3	0,13
12	1,2	0,12	24	1,25	0,125

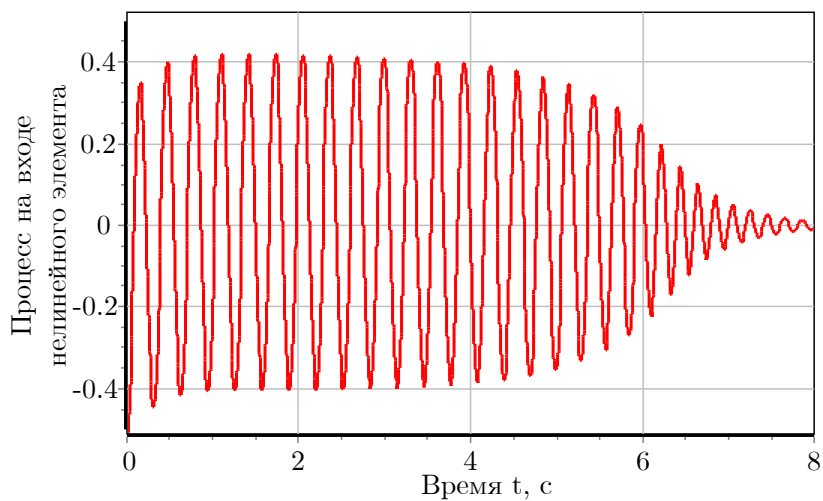


Рис. 3.24. Неустойчивый предельный цикл

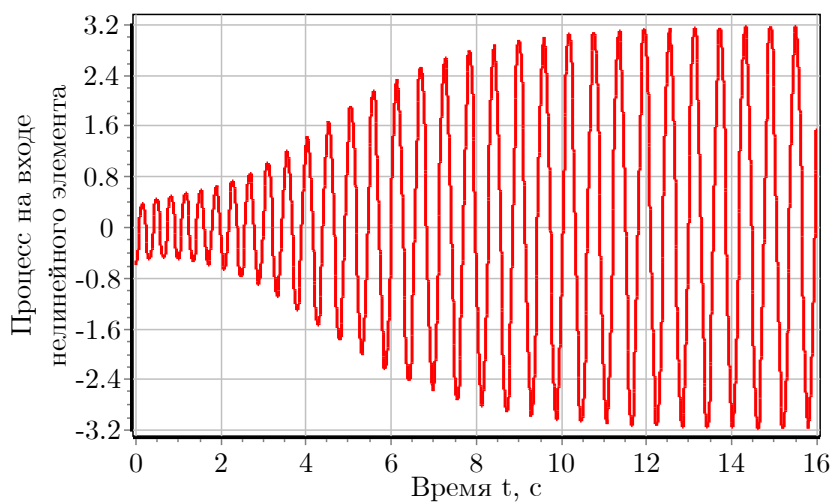


Рис. 3.25. Устойчивый предельный цикл на входе нелинейного элемента

3.5 Лабораторная работа №5. Синтез передаточной функции цифровой вычислительной машины системы управления короткопериодическим движением летательного аппарата

Цель работы: освоение методики синтеза передаточной функции цифровой вычислительной машины, включённой в контур управления, по критерию конечной минимальной длительности переходного процесса.

Содержание работы:

1. Изучение методики построения дискретной модели системы управления по её непрерывной схеме.
2. Определение рационального состава информации, обрабатываемой в цифровой вычислительной машине.
3. Изучение методики и построение передаточной функции цифровой вычислительной машины.
4. Сравнение переходных процессов минимальной конечной и неминимальной конечной длительности.

Теоретическая справка к лабораторной работе

Построение дискретной модели непрерывной системы управления. Как известно, для описания дискретных систем управления используется z -преобразование. Как правило, построение дискретной модели осуществляется по её заданной непрерывной форме, то есть по передаточной функции системы управления или её части

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

где $B(s)$ и $A(s)$ полиномы от s степени m и n соответственно, причём $m < n$.

Если все полюсы s_i данной передаточной функции (корни уравнения $A(s) = 0$) различны, то

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{A'_s(s_i)} \frac{z}{z - e^{s_i T}}, \quad (3.14)$$

где T — частота дискретизации.

На практике возможен случай, когда передаточная функция имеет два одинаковых полюса, например

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^2}.$$

В таком случае два одинаковых полюса следует «сделать разными»

$$W(s, \alpha) = \frac{B(s)}{s(s + \alpha)}.$$

Таким образом, в полученной передаточной функции $W(s, \alpha)$ полюсы различны и можно выполнить преобразование (3.14), после чего определить

$$W(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} W(s, \alpha).$$

Выполнение лабораторной работы

Техническая постановка задачи. В контур управления современных летательных аппаратов вводятся цифровые вычислительные машины и, таким образом, система управления становится дискретно-непрерывной (гибридной). Процедуру оптимизации гибридной системы рассмотрим на примере системы управления короткопериодическим движением летательного аппарата. По-прежнему, как в лабораторной работе «Анализ устойчивости системы автоматического управления короткопериодическим движением летательного аппарата», будем считать, что для решения задачи угловой стабилизации летательного аппарата используется информация об угловой скорости и угле тангажа.

Для простоты предположим, что информация об угловой скорости летательного аппарата циркулирует в непрерывной части системы, а в цифровую вычислительную машину подаётся информация о величине углового отклонения. Структурная схема системы примет вид, показанный на рисунке 3.26.

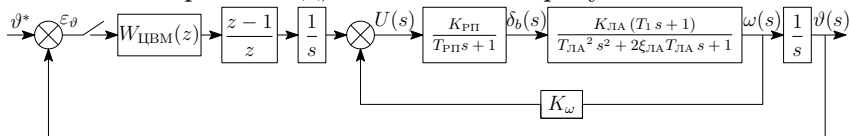


Рис. 3.26. Дискретно непрерывная система автоматического управления короткопериодическим движением летательного аппарата

Математическая постановка задачи сводится к синтезу передаточной функции цифровой вычислительной машины так, чтобы переходный процесс в замкнутой системе был конечной минимальной длительности.

Данная задача решается в два этапа. На первом этапе необходимо построить дискретную передаточную функцию разомкнутой системы, а на втором синтезировать передаточную функцию цифровой вычислительной машины.

Построение дискретной передаточной функции. Пусть заданы параметры неизменной части, соответствующие лабораторной работе №2

$$K_{ЛА} = 1.359, \quad T_{ЛА} = 0.38, \quad \xi_{ЛА} = 0.602;$$

$$T_1 = 0.829, \quad K_{\omega} = 1.4.$$

1. Приводим непрерывную часть системы к эквивалентному одноконтурному виду используя правила соединения дина-

мических звеньев

$$\begin{aligned} W_{\text{НП}}(s) &= \frac{1}{s^2} \frac{K_{\text{РП}} K_{\text{ЛА}} (T_1 s + 1)}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + K_{\text{РП}} K_{\text{ЛА}} K_{\omega} + 1} = \\ &= \frac{1}{s^2} \frac{1.1266 + 1.359}{0.01155 s^3 + 0.181 s^2 + 2.1148 s + 2.9026}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где обозначено

$$a_3 = T_{\text{ЛА}}^2 T_{\text{РП}},$$

$$a_2 = T_{\text{ЛА}} (T_{\text{ЛА}} + 2 T_{\text{РП}} \xi_{\text{ЛА}}),$$

$$a_1 = T_{\text{РП}} + 2 T_{\text{ЛА}} \xi_{\text{ЛА}} + K_{\text{ЛА}} K_{\text{РП}} T_1 K_{\omega}.$$

2. Пусть частота дискретизации равна $T = 0.1 \text{ с}^{-1}$. Выполним переход от оператора Лапласа к z -преобразованию. Очевидно, передаточная функция непрерывной части (3.15) имеет двухкратный корень $s = 0$, по этому описанный выше алгоритм следует несколько уточнить.

Разложим передаточную функцию непрерывной части на простые дроби

$$\begin{aligned} W_{\text{НП}}(s) &= \frac{0.053193s + 0.12587}{s^2 + 14.108s + 161.06} + \frac{0.047015}{s} - \\ &- \frac{0.10021}{s + 1.5601} + \frac{0.46819}{s^2}. \end{aligned}$$

Как можно заметить первые три слагаемых не имеют n -кратных корней, а четвёртое имеет двухкратный корень, запишем

$$\begin{aligned} W_{\text{НП}}(s) &= W_1(s) + W_2(s) = \\ &= \frac{-0.4682s^2 - 7.3359s + 11.8136}{s^4 + 15.6684s^3 + 183.0657s^2 + 251.2638s} + \frac{0.4682}{s^2}. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим передаточную функцию $W_1(s)$

– Её характеристический полином имеет корни

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -1.5601, \quad s_{3,4} = -7.0541 \pm j10.5496.$$

– Производная характеристического полинома по s имеет

вид

$$A'_s(s) = 4s^3 + 47.0052s^2 + 366.1314s + 251.2638.$$

– Дискретная передаточная функция примет вид

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \frac{z}{z - e^{s_i T}} = \\ &= \frac{0.04702z}{z - 1} - \frac{0.1002z}{z - 0.8555} + \frac{(0.02659 - j0.01181)z}{z - 0.2436 + j0.4296} + \\ &+ \frac{(0.02659 + j0.01181)z}{z - 0.2436 - j0.4296} = \\ &= \frac{-0.03591z^3 + 0.04619z^2 - 0.00514z}{z^4 - 2.3428z^3 + 2.0036z^2 - 0.8695z + 0.2087}. \end{aligned}$$

4. Рассмотрим передаточную функцию $W_2(s)$. Её характеристический полином имеет двухкратный корень $s_1 = s_2 = 0$.

Представим её в виде

$$W_2(s, \alpha) = \frac{0.4682}{s(s + \alpha)}, \alpha \rightarrow 0.$$

Передаточная функция $W_2(s, \alpha)$ не имеет n -кратных полюсов и к ней можно применить преобразование (3.14)

– Её характеристический полином имеет корни $s_1 = 0$, $s_2 = -\alpha$.

– Производная характеристического полинома по s имеет вид $A'_s(s, \alpha) = 2s + \alpha$.

– Дискретная передаточная функция $W_2(z, \alpha)$ примет вид

$$W_2(z, \alpha) = \frac{0.4682z}{\alpha(z - 1)} - \frac{0.4682z}{\alpha(1 - e^{-0.1\alpha})} = \frac{0.4682(e^{-0.1\alpha} - 1)z}{\alpha(z - 1)(e^{-0.1\alpha} - z)}.$$

– Устремим параметр α к нулю, получим передаточную функцию

$$W_2(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{0.4682(e^{-0.1\alpha} - 1)z}{\alpha(z - 1)(e^{-0.1\alpha} - z)} = \frac{0.4682z}{(z - 1)^2}$$

5. Дискретная передаточная функция непрерывной части, с

учётom экстраполятора нулевого порядка, примет вид

$$\begin{aligned}
 W_{\text{НП}}(z) &= \frac{P(z)}{Q(z)} = \\
 &= \frac{1.09 \cdot 10^{-3}(z + 2.4546)(z + 0.1951)(z - 0.8863)}{(z^2 - 0.4872z + 0.2439)(z - 0.8555)(z - 1)} = \\
 &= K \frac{(z + b_1)(z + b_2)(z + b_3)}{(z^2 + a_1z + a_2)(z - a_3)(z - 1)}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Коэффициенты модели (3.16) для вариантов лабораторной работы №2 (см. таблицу 3.2) приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5. Коэффициенты дискретной передаточной функции (3.16) непрерывной части комбинированной системы

№	K	b_1	b_2	b_3	a_1	a_2	a_3
1	0.01037	2.56953	0.18907	-0.93551	-0.79242	0.25271	0.88232
2	0.01703	2.34270	0.19937	-0.91109	-0.26543	0.23596	0.87686
3	0.05906	1.53408	0.24443	-0.78627	0.64913	0.18747	0.69503
4	0.01103	2.62509	0.18955	-0.94528	-0.91020	0.26892	0.87493
5	0.04073	1.10826	0.37701	-0.82799	0.97527	0.24652	0.72183
6	0.03705	1.53328	0.26022	-0.82681	0.73048	0.22017	0.69290
7	0.01841	2.25525	0.21526	-0.95198	0.01536	0.25783	0.92156
8	0.02725	1.97155	0.24812	-0.94218	0.52351	0.29882	0.81825
9	0.02887	1.71626	0.27652	-0.95350	0.77330	0.27906	0.86985
10	0.01200	2.40191	0.21293	-0.97296	-0.20799	0.29390	0.89878
11	0.01459	2.58141	0.20201	-0.97355	-0.70250	0.33565	0.79903
12	0.00171	2.76209	0.18765	-0.95727	-1.82638	0.83840	0.30484
13	0.00183	2.75255	0.18777	-0.95161	-1.78614	0.80101	0.31564
14	0.00190	2.73275	0.18849	-0.95219	-1.13960	0.27784	0.90640
15	0.00219	2.71704	0.18852	-0.94458	-1.09550	0.27250	0.90766
16	0.00230	2.71858	0.18812	-0.94221	-1.11310	0.27393	0.89740
17	0.00243	2.71069	0.18792	-0.93941	-1.09610	0.27092	0.89780
18	0.00250	2.71339	0.18780	-0.93287	-1.10960	0.27291	0.88546
19	0.00732	2.66901	0.19068	-0.91914	-0.97942	0.27918	0.85539
20	0.00759	2.65254	0.19138	-0.91458	-0.92586	0.27544	0.85996
21	0.01192	2.50097	0.19630	-0.89304	-0.55558	0.25793	0.85289
22	0.01249	2.48801	0.19689	-0.88864	-0.52513	0.25706	0.84920
23	0.01302	2.49263	0.19593	-0.88345	-0.54756	0.25618	0.84103
24	0.01717	2.33448	0.20365	-0.87049	-0.20821	0.24730	0.83032
25	0.01091	2.45466	0.19514	-0.88636	-0.48725	0.24394	0.85555

Синтез передаточной функции цифровой вычислительной машины выполняют по алгоритму

1. Выполним факторизацию дискретной передаточной функции, представим её в виде

$$W(z) = \frac{P^+(z)P^-(z)}{Q^+(z)Q^-(z)},$$

где полиномы $P^+(z)$ и $Q^+(z)$ содержат все корни внутри круга единичного радиуса, а полиномы $P^-(z)$ и $Q^-(z)$ вне его.

В нашем случае получим

$$P^+(z) = 1.1031 \cdot 10^{-3}(z + 0.1895)(z - 0.9453),$$

$$Q^+(z) = (z - 0.8749)(z - 0.4551 + j0.2486) \times \\ \times (z - 0.4551 - j0.2486),$$

$$P^-(z) = z + 2.6251,$$

$$Q^-(z) = z - 1.$$

2. Задаётся вид характеристического полинома замкнутой системы, соответствующий конечной минимальной длительности переходного процесса

$$A(z) = z^l,$$

где l — целое положительное число. Так как наличествует требование минимальной длительности переходного процесса, то

$$l_{\min} = \|P^-(z)\| + \|Q^-(z)\|,$$

где знак $\|\cdot\|$ означает степень полинома.

В нашем случае $l_{\min} = 2$ и полином замкнутой системы примет вид $A(z) = z^2$.

3. Передаточная функция цифровой вычислительной машины

$W_{\text{ЦВМ}}(z)$ имеет вид

$$W_{\text{ЦВМ}}(z) = \frac{Q^+(z) M(z)}{P^+(z) N(z)}$$

и определяется решением полиномиального уравнения

$$P^-(z)M(z) + Q^-(z)N(z) = A(z),$$

где степени искомых полиномов $M(z)$ и $N(z)$ определяют из условий

$$\|N(z)\| \geq \|P^-(z)\|, \|M(z)\| \geq \|Q^-(z)\| - 1,$$

где знак равенства соответствует $l_{\min}$.

В нашем случае степень полинома $N(z)$ и $M(z)$ первая и нулевая соответственно, и в общем случае они примут вид

$$N(z) = n_1 z + n_0,$$

$$M(z) = m_0.$$

Полиномиальное уравнение примет вид

$$(z + 2.6251)m_0 + (z - 1)(n_1 z + n_0) = z^2,$$

которое раскроем в виде системы, для чего приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой части

$$n_1 = 1,$$

$$m_0 + n_0 - n_1 = 0,$$

$$2.6251m_0 - n_0 = 0.$$

Из системы найдём $N(z) = z + 0.7261$, а $M(z) = 0.2739$, таким образом передаточная функция цифровой вычислительной машины примет вид

$$W_{\text{ЦВМ}}(s) = \frac{0.2739}{z + 0.7261}.$$

4. Передаточная функция разомкнутой и замкнутой системы примет вид

$$W_{\text{РАЗ}} = \frac{25.069(z - 0.8749)(z^2 - 0.9102z + 0.2689)}{(z + 0.7241)(z + 0.1895)(z - 0.9452)},$$

$$W_{\text{ЗАМ}} = \frac{0.2785(z + 2.625)}{z^2}.$$
(3.17)

Теперь необходимо выполнить моделирование переходного процесса в дискретной системе. Для получения изображения переходного процесса умножим z – изображение переходного функции замкнутой системы (второе выражение (3.17)) на z – изображение единичной ступенчатой функции, получим

$$H(z) = \frac{0.2785(z + 2.625)}{z(z - 1)}. \quad (3.18)$$

Для получения оригинала (3.18) следует воспользоваться

формулой

$$h(iT) = \sum_{m=1}^m \frac{A(z_m)}{B'_z(z_m)} z_m^{i-1}. \quad (3.19)$$

Здесь z_m – корни характеристического уравнения изображения переходного процесса, B'_z – производная характеристического полинома по z . Данная формула справедлива только для $i \geq 1$, для $i = 0$ можно записать

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z). \quad (3.20)$$

В нашем случае получим

1. Производная $B'_z(z) = 2z - 1$.
2. Корни характеристического полинома $z_1 = 0$, $z_2 = 1$.
3. Значение оригинала в начальный момент времени, согласно (3.20), составит³

$$h(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.2785(z + 2.625)}{z(z - 1)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.2785}{2z - 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0}{2z} = 0.$$

4. Получим оригинал

$$H(iT) = h(0) - 0.7241 \cdot 0^{i-1} + 1^{i-1}, \quad (3.21)$$

где $i \geq 1$.

Нетрудно заметить, что последовательность (3.21) сходится за два такта или 0.2 секунды, что может быть неприемлемым с точки зрения быстроты.

Построим цифровую вычислительную машину, обеспечивающую переходный процесс **конечной неминимальной длительности**. Дискретная передаточная функция неизменной части имеет вид (3.16), а вид характеристического полинома замкнутой системы примем

$$A(z) = (z - \beta)^l.$$

Так как по прежнему наличествует требование конечной длительности, то $l = 2$, а число $\beta > 0$ может быть выбрано произ-

³использовано правило Бернулли – Лопиталья

вольно, например, $\beta = 0.1$.

В этом случае получим полиномиальное уравнение

$$(z + 2.6251)m_0 + (z - 1)(n_1z + n_0) = (z - 0.1)^2,$$

которое после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z превратится в систему линейных алгебраических уравнений

$$n_1 = 1,$$

$$m_0 + n_0 - n_1 = -0.2,$$

$$2.6251m_0 - n_0 = 0.01,$$

которая имеет решение $n_1 = 1$, $n_0 = 0.5765$, $m_0 = 0.2334$.

Передающая функция замкнутой системы в этом случае примет вид

$$W_{\text{ЗАМ}}(z) = \frac{0.2234(z + 2.6251)}{(z - 0.1)^2}.$$

Изображение переходного процесса в данном случае примет вид

$$H(z) = \frac{0.2234(z + 2.6251)}{(z - 0.1)^2} \frac{z}{z - 1}, \quad (3.22)$$

очевидно оно имеет двухкратный корень $z = 0.1$, следовательно, применение преобразования (3.19) приведёт к делению на нуль.

Искусственно «разделим» двухкратные корни до вида

$$H(z) = \frac{0.2234(z + 2.6251)}{(z - 0.1 - \alpha)(z - 0.1 + \alpha)} \frac{z}{z - 1}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Теперь формально корни характеристического полинома различны и можно применить преобразование (3.19), получим

$$\begin{aligned} h(iT) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{0.36}{0.36 - \alpha^2} + \frac{0.0993(\alpha + 0.4)^n(\alpha + 3.025)}{2\alpha^2 - 1.2\alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.0993(0.4 - \alpha)^n(\alpha + 3.025)}{2\alpha^2 + 1.2\alpha} \right], \\ &= 1 - (1 - 1.2517n)e^{-0.9163n}, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

На рисунке 3.27 показан переходный процесс в системе для случая минимальной конечной (красная линия) и конечной неми-

нимальной длительности для различных значений β .

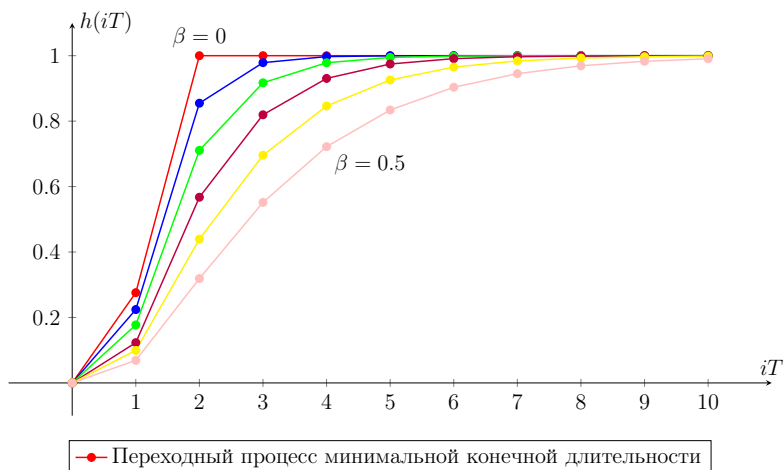


Рис. 3.27. Примеры переходных процессов в дискретной системе

Порядок выполнения работы За основу следует взять модель объекта управления из лабораторной работы №2, для которого в таблице 3.5 приведены коэффициенты дискретной передаточной функции непрерывной части. Далее необходимо синтезировать передаточную функцию цифровой вычислительной машины, обеспечивающей переходный процесс минимальной конечной длительности и неминимальной конечной длительности, получить передаточную функцию замкнутой системы, для которой необходимо получить оригинал и построить график переходного процесса в цифровой системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие содержит некоторые сведения о среде динамического моделирования технических систем SinInTech, необходимые для моделирования переходных процессов и анализа систем автоматического управления.

В первой главе рассмотрены математические модели возмущённого движения летательного аппарата, которые, в конечном итоге, записаны в виде передаточных функций летательного аппарата, последние могут быть использованы для последующего проектирования и оптимизации систем автоматического управления летательного аппарата.

Во второй главе изложены сведения об основных палитрах и базовых функциях среды динамического моделирования технических систем SinInTech, таких как единичное ступенчатое воздействие, физически реализуемые типовые динамические звенья – усилитель, интегрирующее звено, апериодическое звено первого порядка, звено второго порядка, звено чистого запаздывания, блоки реализующие типовые нелинейные элементы систем, а также блоки анализа систем автоматического управления – блок построения годографа Михайлова, кривой Найквиста, блоки построения частотных характеристик систем автоматического управления.

В третьей главе изложены методические рекомендации к выполнению лабораторных и/или практических работ по дисциплине теория автоматического управления. Рассматриваются задачи моделирования переходных процессов в динамических системах, задачи расчёта показателей устойчивости систем автоматического управления, задачи моделирования нелинейных и цифровых систем управления.

Более подробное изложение рассматриваемых вопросов по части использования среды динамического моделирование технических систем SinInTech для решения прикладных задач можно найти в справочной системе SimInTech, а теоретические вопросы изложены в многочисленной литературе по теории автоматического управления [1 – 6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский, В. А., Попов, Е. П. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб., Профессия, 2007. – 752 с.
2. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д. П. Ким – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 312 с.
3. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д. П. Ким – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 440 с.
4. Гусев, А. Н., Ишков С. А. Основы теории автоматического управления: Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т Самара, 2005. – 164 с.
5. Аэромеханика самолета: Динамика полета: Учебник для авиационных вузов / А. Ф. Бочкарев, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов и др.; Под ред. А. Ф. Бочкарева и В. В. Андреевского. 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.
6. Управление ориентацией космических аппаратов. Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь, М.: Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 600 с.
7. Карташов Б. А., Шабаетов Е. А., Козлов О. С., Щекатуров А. М. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: Практикум по моделированию систем автоматического регулирования. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 424 с.

Учебное издание

Филиппов Григорий Александрович
Ишков Сергей Алексеевич
Фадеенков Павел Васильевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
В СРЕДЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ SIMINTech**

практикум

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Компьютерная вёрстка Г.А. Филиппов в пакете L^AT_EX

Подписано в печать XX.XX.2023. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.

Тираж 120 экз. (1 з-д 1-25). Заказ № XXX. Арт. –XX(YYY)/2025.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.