УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основные понятия теории устойчивости

В процессе функционирования система подвергается различного рода возмущающим воздействиям, которые вызывают отклонения её от положения равновесия или заданного движения.

Система автоматического управления называется устойчивой, если после прекращения действия возмущений, вызвавших её отклонение от положения равновесия, она возвращается в это положение равновесия или заданного движения.

Следовательно, **только устойчивая система является работоспособной**.

Пусть САУ описывается системой нелинейных стационарных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = Y_k(y_1, y_2, ..., y_n, t), \quad k = 1, 2, ...n, \tag{2.1}$$

где y_k переменные состояния системы; Y_k известные функции, определённые в некоторой фиксированной области G пространства переменных y_k при любом $t > 0$.

В этом пространстве уравнения (2.1) определяют компоненты Y_k вектора скорости движения некоторой точки M, **называемой изображающей точкой**. С физической точки зрения уравнения (2.1) следует рассматривать как математическую форму записи тех физических законов, которым подчиняется система автоматического управления. Область G определения функций Y_k является той частью пространства состояний, на которую распространяется действие указанных физических законов.

Пусть величины $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ обозначают начальные значения переменных состояния. Каждой системе начальных значений соответствует единственное решение:

$$y_k = y_k(y_{10}, ..., y_{n0}), \quad k = 1, 2, ..., n \tag{2.2}$$

уравнений (2.1), определённое для любых $t \geq t_0$. Допустим, что среди всех движений нас интересует то, которое описывается заданными функциями времени:

$$y_k(t) = y_k^*(t), \quad k = 1, 2, ...n. \tag{2.3}$$

В частном случае, когда система стационарна и функции Y_k явно не зависят от времени, тогда движения (2.3) являются установившимися. Им отвечают так называемые очевидные решения

$$y_k^* = const, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{2.4}$$

служащие корнями уравнений:

$$Y_k(y_1, ..., y_n) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

В дальнейшем будем говорить об устойчивости движения системы, имеющей решение (2.3), рассматривая её установившееся движение (2.4) как частный случай. Введём в рассмотрение отклонения от заданного движения

$$x_k = y_k - y_k^*, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.5}$$

Подставив выражения для y_k, полученные из (2.5) в исходную систему уравнений, получим:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, ..., x_k, t), \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{2.6}$$

где $X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t) = Y_k(x_1 + y_1^*, ..., x_n + y_n^*, t)$.

Уравнения (2.6) записаны относительно отклонений, появившихся в результате каких-либо возмущений и, по терминологии Ляпунова, называются **уравнениями возмущённого движения**.

Формула (2.5) определяет преобразование переноса начала координат в точку с координатами y_k^* и поэтому, если решение системы (2.1) сходится к значениям y_k^*, то решение системы (2.6) сходится к нулю. Уравнения

$$x_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{2.7}$$

называются **уравнениями невозмущённого движения.**

При $t = t_0$ переменные x_k принимают свои начальные значения x_{k_0}, которые называются **возмущениями.** Каждой заданной системе таких возмущений соответствует единственное решение:

$$x_k = x_k(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, t), \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.8}$$

Эти решения представляют собой **возмущённое движение системы.**

Изучим поведение разностей (2.5) при $t > t_0$. Рассмотрим для этого уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = R^2, \tag{2.9}$$

которое определяет в $n-$мерном пространстве квадрат расстояния изображающей точки M от начала координат. Возмущённое движение при $t > t_0$ может протекать следующим образом:

1. изображающая точка M всё более удаляется от начала координат, а величина R неограниченно возрастает (кривая 1 на рис.2.1);
2. изображающая точка M остаётся внутри некоторой окрестности начала координат, так что величина R всё время имеет ограниченное значение, не превосходящее наперёд заданное малое положительное число ε, т.е. $R < \varepsilon$ (кривая 2 на рис.2.1);
3. изображающая точка M с течением времени возвращается в начало координат, т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} R = 0$ (кривая 3 на рис.2.1).

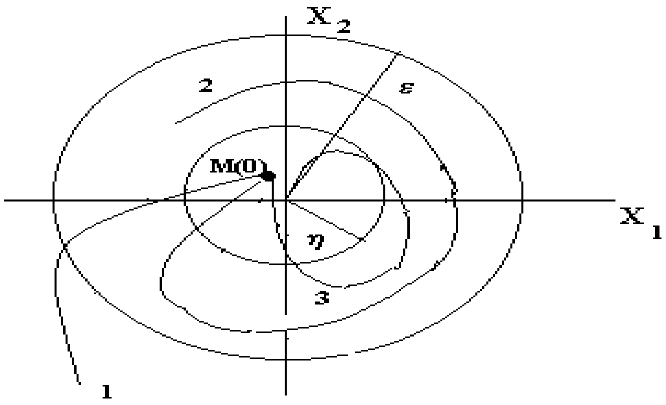

Рис. 2.1. Виды движения изображающей точки

Равновесное состояние $x_k = 0$ можно считать устойчивым, если система, получив начальное возмущение, в дальнейшем продолжает оставаться в **ближайшей окрестности** равновесного состояния или возвращается в него. Следует дать конкретное толкование понятию “ближайшая окрестность” и основоположник теории устойчивости А. М. Ляпунов дал следующее определение устойчивости.

Невозмущённое движение называется устойчивым по отношению к величинам x_k если при всяком произвольно заданном положительном числе ε, как бы мало оно ни было, найдётся другое такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, при котором для возмущений x_{k_0} удовлетворяющих условиям:

$$\left|x_{k_0}\right| < \eta, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{2.10}$$

возмущённое движение будет удовлетворять неравенствам:

$$\left|x_k(t)\right| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{2.11}$$

при любом $t > t_0$. Неравенства (2.10) ограничивают область допустимых начальных отклонений.

Если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ невозможно найти $\eta(\varepsilon)$, при котором удовлетворяются неравенства (2.11), то система неустойчива.

Если система устойчива и её движение таково, что $\lim\limits_{t\to\infty} R = 0$, **то эта система асимптотически устойчива.**

Отсюда следует, что на рис. 2.1 кривая 1 соответствует неустойчивой системе, кривая 2 - устойчивой системе, а кривая 3-асимптотически устойчивой системе.

А. М. Ляпунов разработал различные методы оценки устойчивости САУ. Прямой, или так называемый второй метод Ляпунова, применим для исследования всех классов систем и основан на использовании специальных функций Ляпунова. Мы уже говорили, что значительное число систем допускают линеаризацию по методу малого отклонения и Ляпунов впервые доказал допустимость суждения об устойчивости в малом, т.е. при малых отклонениях, исходной нелинейной системы по уравнениям первого приближения, полученным в результате линеаризации.

Исследуем устойчивость системы по уравнениям первого приближения.

Любое линейное дифференциальное уравнение имеет решение вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} + x_m(t), \tag{2.12}$$

где λ_i – корни характеристического уравнения, $x_m(t)$ – частное решение, определяющее требуемое движение системы. Отклонение от заданного движения запишется в виде

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_m(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}.$$

Отсюда следует, что если все корни характеристического уравнения отрицательны (имеют отрицательную вещественную часть), то $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$ и линейная система асимптотически устойчива. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, имеющий положительную вещественную часть, то $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \infty$ и линейная система неустойчива. Можно ли по корням характеристического уравнения линеаризованной системы оценить устойчивость исходной нелинейной системы при малых отклонениях? А. М. Ляпунов доказал следующие теоремы об устойчивости в малом.

Теорема 1. Если вещественные части α_k всех корней $\alpha_k \pm j\beta_k$ характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущённое движение исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво независимо от не учитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка малости.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдётся хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение исходной нелинейной системы неустойчиво независимо от не учитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка малости.

Критические случаи, когда нельзя судить об устойчивости по уравнениям первого приближения, возникают, если среди всех корней имеется группа корней, вещественная часть которых равна нулю, а остальные имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим рисунок.

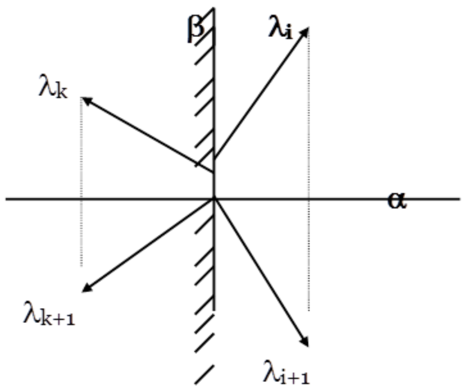

Рис. 2.2. Расположение корней системы на комплексной плоскости

Корни характеристического уравнения, имеющие отрицательные вещественные части расположены в левой полуплоскости и называются устойчивыми корнями (полюсами) системы. Корни с положительными вещественными частями расположены в правой полуплоскости и являются неустойчивыми полюсами системы. С этой точки зрения мнимая ось является границей устойчивости и штрихуется слева.

Представляет интерес часто встречающийся случай, когда характеристический полином системы имеет один нулевой корень, а остальные корни лежат в левой полуплоскости. Это соответствует уравнению системы, в котором равен нулю свободный член a_n:

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s) X(s) = B(s) G(s).$$

Вынеся за скобки оператор s, получим

$$(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) s X(s) = B(s) G(s).$$

Так как оператор Лапласа при нулевых начальных условиях является символом дифференцирования, то можно сделать вывод, что последнее уравнение записано относительно скорости регулируемой величины. Характеристическое уравнение

$$(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = 0$$

по условию имеет только устойчивые корни и, следовательно, система устойчива относительно скорости регулируемой величины. По отношению к самой регулируемой величине система нейтральна и её значение после окончания процесса регулирования произвольно и зависит от начальных условий. Такие системы называются **нейтрально устойчивыми.**

Оценка устойчивости непосредственно по корням характеристического уравнения возможна, но малопригодна в инженерной и научной практике, так как знание численных значений корней не несёт информации о путях стабилизации системы, если она неустойчива или имеет малые запасы устойчивости. Поэтому для целей анализа устойчивости разработаны специальные критерии, позволяющие исследовать вопросы устойчивости без определения корней характеристического уравнения. Рассмотрим необходимые условия устойчивости.

Характеристическое уравнение системы после определения его корней может быть представлено в виде

$$a_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n) = 0$$

Если система устойчива и все её корни имеют отрицательные вещественные части, то после раскрытия скобок в последнем выражении получим характеристическое уравнение системы

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты $a_i, i = 1, 2, \ldots n,$ будут строго больше нуля.

Для устойчивости системы необходимо, но недостаточно, чтобы все коэффициенты её характеристического уравнения были строго больше нуля.

Понятие недостаточности означает, что если какой-либо коэффициент характеристического уравнения системы меньше нуля или равен нулю, то система неустойчива, но положительность всех коэффициентов ещё не означает, что система устойчива. Нужны дополнительные исследования.

Алгебраический критерии устойчивости Гурвица

Для оценки устойчивости по этому критерию необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица по следующим правилам:

1. по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов;
2. столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, а вверх – по возрастающим индексам;
3. места коэффициентов, индексы которых больше n или меньше нуля заполняются нулями.

Для примера составим определитель Гурвица, для системы 5-го порядка. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0,$$

где все коэффициенты строго больше нуля. Получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части и система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители определителя Гурвица были строго больше нуля.

Для устойчивости системы 5-го порядка необходимо выполнение условий

$$a_k > 0,\ k = 0,1,2,\ldots 5;$$
$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$
$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0;$$
$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 - a_2 a_5 \Delta_2 + a_0 a_5 \left(a_1 a_4 - a_0 a_5\right) > 0;$$
$$\Delta_5 = a_5 \Delta_4 > 0.$$

Так как при выполнении необходимого условия устойчивости всегда $a_n > 0$, то об устойчивости системы можно судить по определителям до Δ_{n-1} включительно. Доказано, что если $\Delta_{n-1} = 0$, то система находится на колебательной границе устойчивости, т.е. имеет пару чисто мнимых корней. Из условия $\Delta_{n-1} = 0$ можно определить критические значения параметров системы, при которых она выходит на границу устойчивости.

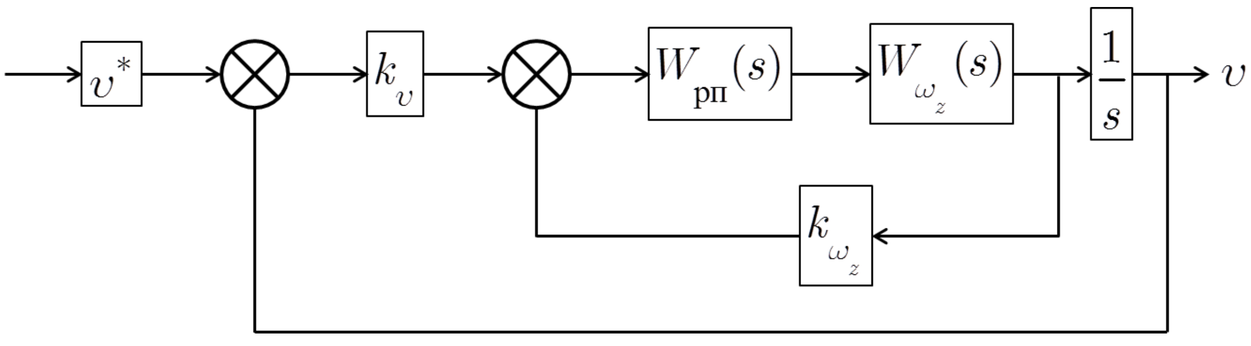

Рис. 2.3. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа

На схеме (рис. 2.3) обозначено:

– k_υ – передаточное число (коэффициент передачи) автопилота по углу тангажа;

– $W_{\text{рп}}(s) = \dfrac{1}{T_{\text{рп}}s+1}$ – передаточная функция рулевого привода;

– $W_{\omega_z}(s) = \dfrac{k_c(T_1 s+1)}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}$ – передаточная функция самолёта по угловой скорости тангажа ω_z;

– k_{ω_z} – передаточное число автопилота по угловой скорости тангажа.

Для передаточной функции разомкнутой системы можно записать:

$$W(s) = \frac{k_\upsilon k_c W_{\text{рп}}(s) W_{\omega z}(s)}{s(1+k_{\omega z} W_{\text{рп}}(s) W_{\omega z}(s)} = \frac{k_\upsilon k_c (T_1 s+1)}{s(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)},$$

где $a_0 = T^2 T_{\text{рп}}$; $a_1 = 2TT_{\text{рп}}\zeta + T^2$; $a_2 = T_{\text{рп}} + 2T\zeta + k_{\omega z} k_c T_1$; $a_3 = 1 + k_{\omega z} k_c$.

Передаточная функция замкнутой системы примет вид:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{k_\upsilon k_c (T_1 s+1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4},$$

где $d_0 = a_0$; $d_1 = a_1$; $d_2 = a_2$; $d_3 = a_3 + k_\upsilon k_c T_1$; $d_4 = k_\upsilon k_c$.

Составим определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Оценим устойчивость системы для следующих значений параметров:

$k_\upsilon = 5$; $k_{\omega z} = 1,2$; $k_c = 0,9$; $T_1 = 1,8$; $T = 0,12$; $\zeta = 0,1.$.

При этих значениях для коэффициентов характеристического уравнения получим

$$d_0 = a_0 = 0.00115; \quad d_1 = a_1 = 0.0163; \quad d_2 = a_2 = 2.048; \quad a_3 = 2.08;$$
$$d_3 = 10,18; \qquad d_4 = 4,5.$$

Следовательно, все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы положительны и

$$\Delta_2 = d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0.021675 > 0;$$
$$\Delta_3 = d_3 \Delta_2 - d_1^2 d_4 = 0.21945 > 0;$$
$$\Delta_4 = d_4 \Delta_3 = 0.98755 > 0.$$

Условия устойчивости выполнены и система при избранных параметрах устойчива.

Определим критическое значение передаточного числа по углу тангажа, для чего приравняем третий диагональный определитель к нулю и сделаем преобразования.

$$d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_1^2 d_4 = 0.$$

Отсюда

$$d_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} d_3 + \frac{d_1^2}{d_0} d_4 = 0.$$

В последнем выражении только d_3 и d_4 являются функциями коэффициента k_υ и подставив их в него, получим квадратное уравнение относительно этого коэффициента

$$(k_c T_1)^2 k_\upsilon^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_\upsilon + (a_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0.$$

Решив это уравнение, получим критическое значение передаточного числа по углу тангажа $(k_\upsilon)_{\text{кр}} = 16,56.$ Система устойчива, если $k_\upsilon < 16,56.$

Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости используются в графоаналитическом виде и отличаются большой наглядностью при проведении расчётов. В основе всех частотных методов лежит принцип аргумента.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы

$$D(s) = d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \ldots + d_{n-1} s + d_n = 0.$$

Если $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots n -$ корни этого уравнения, то

$$D(s) = d_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n).$$

Каждому корню на комплексной плоскости соответствует определенная точка, и геометрически на этой плоскости каждый корень можно изобразить в виде вектора с модулем $|\lambda_i|$, проведённого из начала координат (рис.2.4). Сделаем замену $s = j\omega$ и получим

$$D(j\omega) = d_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)...(j\omega - \lambda_n).$$

В соответствии с правилом вычитания векторов получим, что конец каждого элементарного вектора $j\omega - \lambda_i$ находиться на мнимой оси.

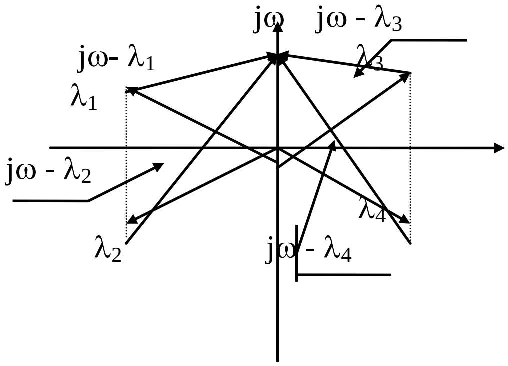

Рис. 2.4. К определению принципа аргумента

Аргумент вектора $D(j\omega)$ равен сумме аргументов элементарных векторов:

$$\arg \vec{D}(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \arg(j\omega - \lambda_i). \qquad (2.13)$$

Направление вращения вектора $j\omega - \lambda_i$ против часовой стрелки при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ принято считать положительным, а по часовой стрелке- отрицательным. Предположим, что характеристическое уравнение имеет m корней в правой полуплоскости и $n - m$ корней в левой полуплоскости. При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ каждый вектор $j\omega - \lambda_i$, начало которого лежит в левой полуплоскости повернётся на угол $+\pi$, а каждый вектор, начало которого лежит в правой полуплоскости - на угол $-\pi$. Изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при этом будет

$$\Delta \underset{-\infty \le \omega \le +\infty}{\arg} D(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi. \quad (2.14)$$

Это выражение и определяет принцип аргумента.

Изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом $(n - m)$ корней уравнения $D(s) = 0$ лежащих в левой

полуплоскости, и числом m корней этого уравнения, лежащих в правой полуплоскости, умноженной на π.

Критерий устойчивости Михайлова

Из (2.14) следует, что если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т.е. $m = 0$ то

$$\underset{-\infty \le \omega \le +\infty}{\Delta \arg} \; D(j\omega) = n\pi. \tag{2.15}$$

Отсюда следует первая формулировка критерия Михайлова.

Система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты от $-\infty$ до $+\infty$ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ будет равно $n\pi$, где n – порядок характеристического уравнения.

Вектор $D(j\omega)$ можно представить в виде

$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$

Вещественная составляющая этого выражения является чётной функцией, а мнимая - нечётной функцией частоты, т.е. $U(-\omega) = U(\omega); V(-\omega) = -V(\omega)$ и $D(-j\omega) = U(\omega) \; - jV(\omega).$

Отсюда следует, что кривая Михайлова симметрична относительно вещественной оси и при её построении можно ограничиться диапазоном частот от 0 до $+\infty$. Изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при этом уменьшится в два раза и формулировка критерия Михайлова будет следующей.

Система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты от 0 до $+\infty$, вектор $D(j\omega)$ повернётся на угол $\frac{\pi n}{2}$ или, что то же самое, если кривая Михайлова при том же изменении частоты, начиная с положительной вещественной полуоси, обходит последовательно в положительном направлении n квадрантов и заканчивается в n-ом квадранте (рис. 2.5).

Если хотя бы один квадрант пропущен (рис.2.6), то система неустойчива.

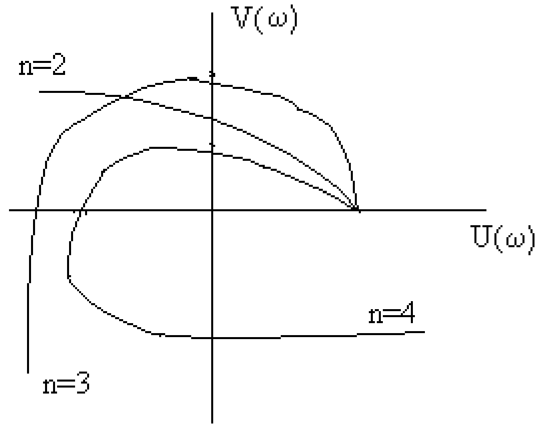

Рис. 2.5. Кривые Михайлова для устойчивых САУ

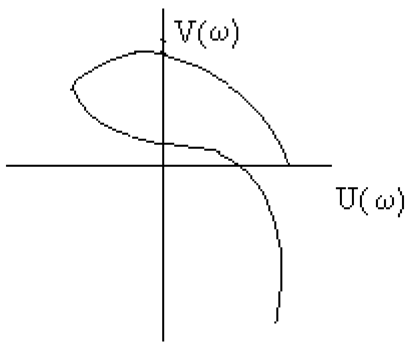

Рис. 2.6. Кривая Михайлова для неустойчивой САУ

Наблюдая за поведением кривой Михайлова для устойчивой САУ, можно заметить, что при её прохождении через n квадрантов корни уравнений $(-1;\ j_0)$ и $V(\omega)=0$ чередуются между собой, т.е. между двумя корнями уравнения $V(\omega)=0$ лежит один корень уравнения $U(\omega)=0$.

Система автоматического управления устойчива, если корни уравнений $U(\omega)=0$ и $V(\omega)=0$ вещественные и перемежаются между собой.

Система может находиться на границе устойчивости и этому соответствуют два случая:

1. характеристическое уравнение системы имеет один нулевой корень, что будет при $a_n = 0$, кривая ***Михайлова*** при этом выходит из начала координат;
2. характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm j\omega_k$ и $D(j\omega_k) = U(\omega_k) + jV(j\omega_k) = 0$, что может быть только если одновременно $U(\omega_k) = 0$ и $V(\omega_k) = 0$. Это означает, что кривая Михайлова проходит через начало координат.

Используя критерий Михайлова, можно определить критические значения параметров системы, при которых она находиться на границе устойчивости, в частности критический коэффициент усиления. Для этого нужно решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega, k) = 0 \\ V(\omega, k) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Пример. Используя критерий Михайлова, оценить устойчивость системы стабилизации угла тангажа самолета и определить критическое значение передаточного числа k_v.

Характеристическое уравнение замкнутой системы было получено выше и имеет вид

$$d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4 = 0.$$

Сделаем замену $s = j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части

$$U(\omega) = d_0\omega^4 - d_2\omega^2 + d_4.$$
$$V(\omega) = -d_1\omega^3 + d_3\omega.$$

Построенная при заданных ранее параметрах системы кривая Михайлова имеет вид, показанный на рис.2.7.

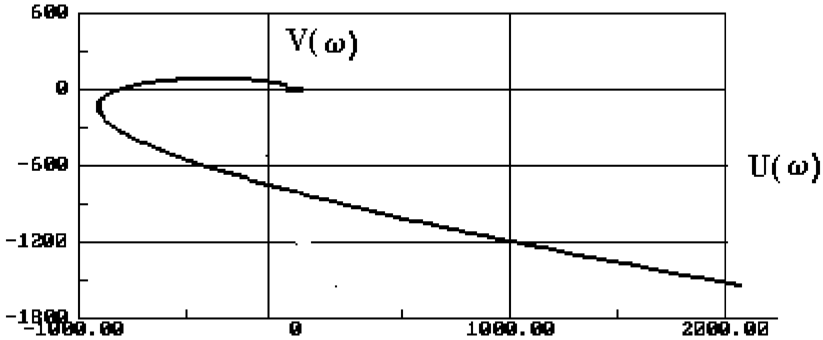

Рис. 2.7. Кривая Михайлова для системы стабилизации угла тангажа

Кривая начинается на вещественной положительной полуоси, проходит последовательно 4 квадранта и заканчивается в 4-м квадранте. Следовательно, при данных параметрах исследуемая система устойчива.

Для определения критического значения передаточного числа по углу тангажа составим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} U(\omega,k_v) &= d_0\omega^4 - d_2\omega^2 + k_c k_v = 0 \\ V(\omega,k_v) &= -d_1\omega^3 + (a_3 + k_v k_c T_1)\omega = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения системы определяем частоту и подставив выражение для неё в первое уравнение, после преобразований получим квадратное уравнение

$$(k_c T_1)^2 k_v^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_v + (a_3 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0$$

относительно искомого значения передаточного числа

Полученное уравнение абсолютно идентично полученному при решении задачи по критерию Гурвица и результат таким же

$$(k_v)_{\text{кр}} = 16.56.$$

Построение кривой \ Михайлова для систем высокого порядка может быть связано с громоздкими вычислениями и графическими построениями. В этих случаях можно более просто оценить устойчивость по корням уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$. Определим корни этих уравнений и расположим их на числовой оси

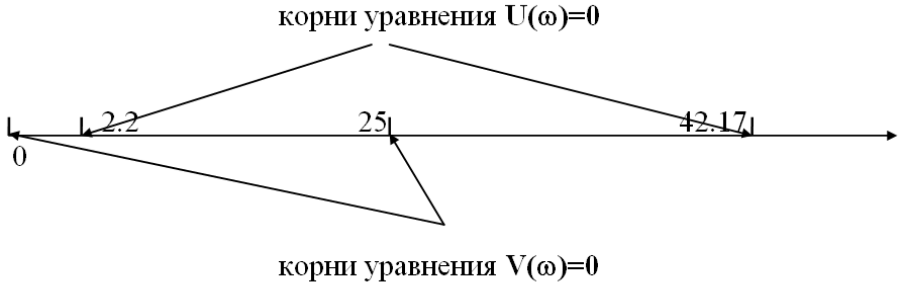

Рис. 2.8. Расположение корней на числовой оси

Корни вещественные и перемежаются между собой. Система стабилизации угла тангажа устойчива.

Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости **замкнутой системы по виду АФЧХ разомкнутой системы.**

Пусть передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы имеют вид: $W(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)};\quad \Phi(s)=\dfrac{W(s)}{1+W(s)}=\dfrac{B(s)}{A(s)+B(s)}.$

Введём функцию

$$N(s)=1+W(s)=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}=\frac{D(s)}{A(s)}, \tag{2.17}$$

где $D(s)$ – характеристический полином замкнутой системы. Перейдя к частотным представлениям, получим

$$\bar{N}(j\omega)=\frac{\bar{D}(j\omega)}{\bar{A}(j\omega)}. \tag{2.18}$$

Вектор $\bar{N}(j\omega)$ называется вектором Найквиста. Очевидно, что числитель и знаменатель этого вектора имеют один и тот же порядок n. При использовании критерия Найквиста следует различать два случая.

1). ***<u>Разомкнутая система устойчива</u>*** и её характеристическое уравнение $\bar{A}(s)$ имеет все корни в левой полуплоскости. Тогда при изменении частоты от 0 до ∞

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta}\arg\bar{A}(j\omega)=n\frac{\pi}{2}. \tag{2.19}$$

Изменение аргумента вектора $\bar{D}(j\omega)$ в общем случае равно

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta} \arg \bar{D}(j\omega) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}, \tag{2.20}$$

где $m-$ число корней уравнения $D(s)=0$, лежащих в правой полуплоскости.

Изменение аргумента вектора Найквиста будет

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta} \arg \bar{N}(j\omega) = (n-2m)\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}. \tag{2.21}$$

Если замкнутая система устойчива, то $m=0$ и

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta} \arg \bar{N}(j\omega) = 0.$$

Так как при $\omega \to \infty$, $W(j\omega) \to 0$, то $N(j\omega) \to 1$. Рассмотрим рисунок 2.9а, на котором показана кривая Найквиста, которую описывает вектор Найквиста при изменении частоты от 0 до ∞. Нетрудно убедиться, что вектор Найквиста опишет угол, равный нулю только в случае, если его годограф не охватывает начало координат. Перенесём начало координат в точку с координатами $(1;\ j_0)$ (рис.2.9б). Можно убедиться, что изменение аргумента вектора Найквиста будет равно нулю если АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы не охватывает **критическую точку с координатами** $(-1;\ j_0)$.

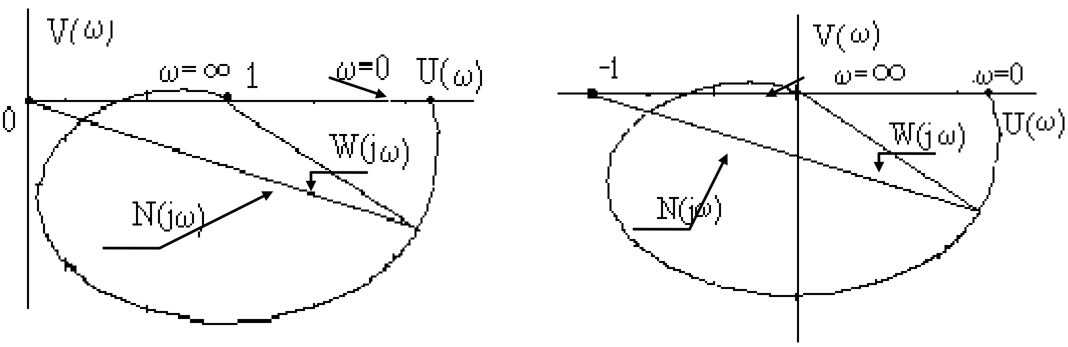

Рис. 2.9. К определению критерия Найквиста

Критерий Найквиста для рассматриваемого случая формулируется следующим образом.

Система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если АФЧХ $W(j\omega)$ **разомкнутой**

системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает критическую точку с координатами $(-1;\ j_0)$.

Особенности возникают, если разомкнутая система нейтрально-устойчива, т.е.

$$W(s) = \frac{B(s)}{sA_1(s)},$$

где полином $A_1(s)$ имеет все корни в левой полуплоскости. При $\omega = 0$ АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega) = \infty$ и проследить поведение кривой АФЧХ в окрестности этой точки невозможно. При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ наблюдается движение корней вдоль мнимой оси снизу вверх и при $\omega = 0$ происходит бесконечный разрыв. При этом движении обойдём нулевой корень (рис. 2.10) по полуокружности бесконечно малого радиуса ρ так, чтобы этот корень остался слева, т.е. искусственно отнесём его к левой полуплоскости.

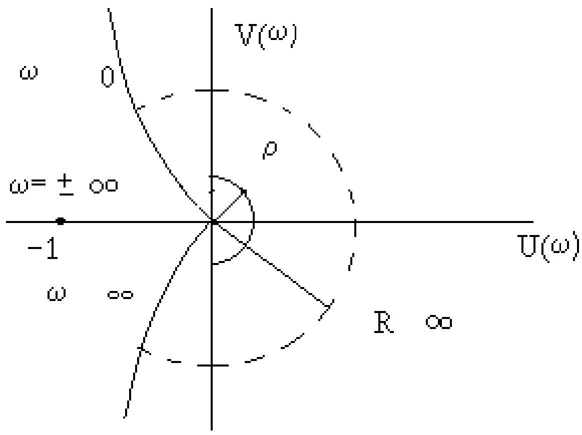

Рис. 2.10. Годограф Найквиста для нейтрально - устойчивой САУ

При движении по этой полуокружности в положительном направлении независимая переменная изменяется по закону

$$s = \rho e^{j\varphi(\omega)},$$

где фаза $\varphi(\omega)$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Подставив это выражение в передаточную функцию вместо множителя s в знаменателе, получим

$$W(s)=\frac{K(s)}{\rho}e^{-j\varphi(\omega)}=R(s)e^{-j\varphi(\omega)},$$

где $R\to\infty$ при $\rho\to 0$, а фаза $\varphi(\omega)$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в окрестности нулевого корня годограф $W(j\omega)$ представляет собой часть окружности бесконечно большого радиуса, движение по которой происходит при увеличении частоты в отрицательном направлении.

Для оценки устойчивости замкнутой системы, если разомкнутая система нейтрально устойчива, необходимо АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы дополнить дугой бесконечно большого радиуса, начиная с меньших частот, в отрицательном направлении и для полученной замкнутой кривой воспользоваться критерием Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии.

2). ***Разомкнутая система неустойчива***. В этом случае

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta}A(j\omega)=(n-2p)\frac{\pi}{2},$$

где $p-$ число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости. Если замкнутая система устойчива, т.е. $m=0$ то

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta}\bar{N}(j\omega)=n\frac{\pi}{2}-(n-2p)\frac{\pi}{2}=2\pi\frac{p}{2}, \tag{2.22}$$

т.е. АФЧХ разомкнутой системы охватывает критическую точку $(-1;\, j_0)$ в положительном направлении ровно $\frac{p}{2}$ раз.

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ охватывает критическую точку $(-1;\, j_0)$ в положительном направлении ровно $\frac{p}{2}$ раз, где $p-$ число правых полюсов разомкнутой системы.

Определение числа охватов критической точки - непростая задача, особенно в случае систем высокого порядка. Поэтому в практических приложениях нашла применение другая формулировка критерия Найквиста для рассматриваемого случая.

Переход годографа $W(j\omega)$ через отрезок вещественной полуоси $(-\infty,-1)$, т.е. левее критической точки при увеличении частоты сверху вниз считается положительным, а снизу вверх - отрицательным.

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы равна $\frac{p}{2}$.

$$P^{+}-P^{-}=\frac{p}{2}, \tag{2.23}$$

где P^{+} – число положительных переходов, P^{-} – число отрицательных переходов.

Например, передаточная функция ракеты-носителя “Авангард” имеет два неустойчивых полюса и её АФЧХ показана на рис. 2.11.

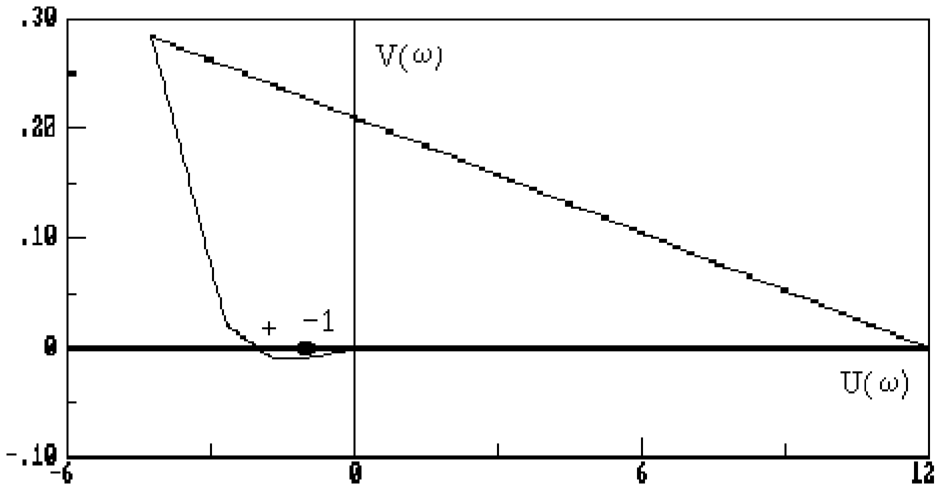

Рис. 2.11. АФЧХ ракеты «Авангард»

Очевидно, что для данной ракеты, как объекта управления, $P^{+}=1$, а $P^{-}=0$ и $P^{+}-P^{-}=1=\frac{p}{2}$. Замкнутая система будет устойчивой.

Запасы устойчивости

Устойчивость замкнутой САУ зависит от расположения годографа АФЧХ разомкнутой системы относительно критической точки. Чем ближе эта кривая проходит от критической точки, тем ближе замкнутая САУ к границе устойчивости. Для устойчивых систем удаление АФЧХ разомкнутой системы от критической точки принято оценивать запасами устойчивости по фазе и по модулю.

Допустим, что АФЧХ некоторой разомкнутой системы имеет вид, показанный на рис. 2.12.

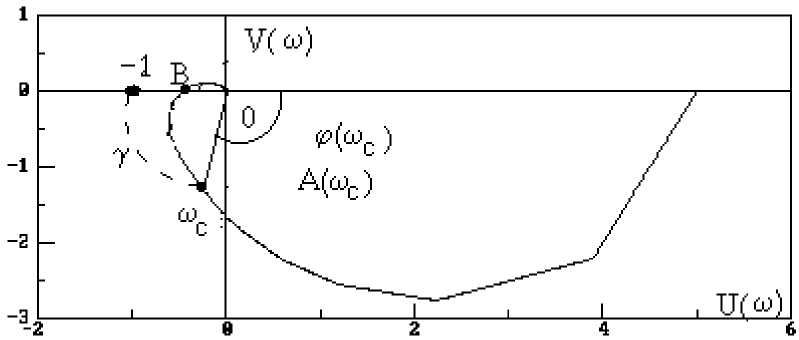

Рис. 2.12. АФЧХ разомкнутой системы

Угол γ, образуемый прямой, проходящей через точку пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса, что соответствует частоте среза системы, и отрицательной вещественной полуосью называется запасом устойчивости системы по фазе.

$$\gamma = 180^0 - |\varphi(\omega_c)|. \tag{2.24}$$

Запасом устойчивости по модулю называется величина

$$h = \frac{1}{OB} = \frac{1}{A(\omega_\pi)},$$

где $A(\omega_\pi)$ значение АФЧХ при частоте $\omega = \omega_\pi$, при которой она пересекает вещественную ось.

Для всех систем должны выполняться требования:

$\gamma \geq 24^0; \quad h \geq 2.$

Так как АФЧХ графически строится в определённом масштабе, то для вычисления запаса устойчивости по модулю можно просто измерить длины отрезков, соответствующих единице и ОВ, и разделить результат первого измерения на второй. Если увеличивать коэффициент усиления системы, то точка B будет смещаться влево и при $OB = -1$ коэффициент усиления примет критическое значение. Поэтому запас устойчивости по модулю можно определить и по формуле

$$h = \frac{k_{\text{кр}}}{k}.$$

<u>Пример.</u> Используя критерий Найквиста оценить устойчивость замкнутой системы стабилизации угла тангажа и определить её запасы устойчивости.

Передаточная функция разомкнутой системы была получена ранее и имеет вид

$$W(s) = \frac{k_\upsilon k_c (T_1 s + 1)}{s(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}.$$

Численные значения коэффициентов заданы или вычислены ранее. Сделаем замену $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k_\upsilon k_c (1 + jT_1\omega)}{j\omega((-a_1\omega^2 + a_3) + j(-a_0\omega^3 + a_2\omega))}$$
$$= \frac{k_\upsilon k_c (1 + jT_1\omega)\left[(a_0\omega^4 - a_2\omega^2) - j(a_3\omega - a_1\omega^2)\right]}{(a_0\omega^4 - a_2\omega^2)^2 + (a_3\omega - a_1\omega^3)^2}.$$

После преобразований получим

$$U(\omega) = \frac{k_\upsilon k_c ((a_0 - a_1 T_1)\omega^4 + (a_3 T_1 - a_2)\omega^2)}{\left(a_0\omega^4 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_3\omega - a_1\omega^3\right)^2},$$

$$V(\omega) = \frac{k_\upsilon k_c (a_0 T_1 \omega^5 + (a_1 - a_2 T_1)\omega^3 - a_3\omega)}{\left(a_0\omega^4 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_3\omega - a_1\omega^3\right)^2}.$$

Изменяя частоту от 0 до ∞ построим кривую АФЧХ - рис. 2.13. Проведя дугу окружности единичного радиуса, определим, что запас устойчивости по фазе $\gamma = 110°$. Для рассматриваемого примера получим, что $h = 3,3$.

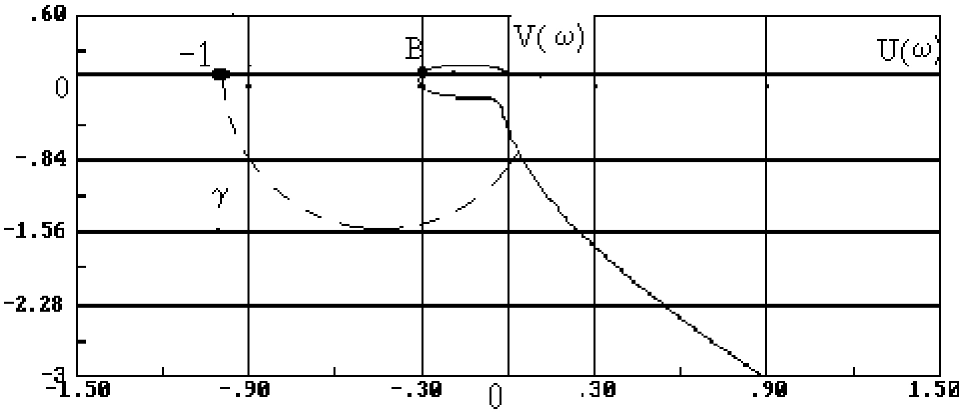

Рис. 2.13. АФЧХ системы стабилизации угла тангажа

Полученные запасы устойчивости удовлетворяют выше указанным требованиям.

Оценка устойчивости по ЛЧХ

АФЧХ разомкнутой системы подразделяются на два типа:

1. АФЧХ первого рода, все точки, пересечения которых с вещественной осью расположены справа от критической точки (кривая 1, рис. 2.14);
2. АФЧХ второго рода, точки, пересечения которых с вещественной осью расположены как справа, так и слева от критической точки (кривая 2, рис. 2.14).

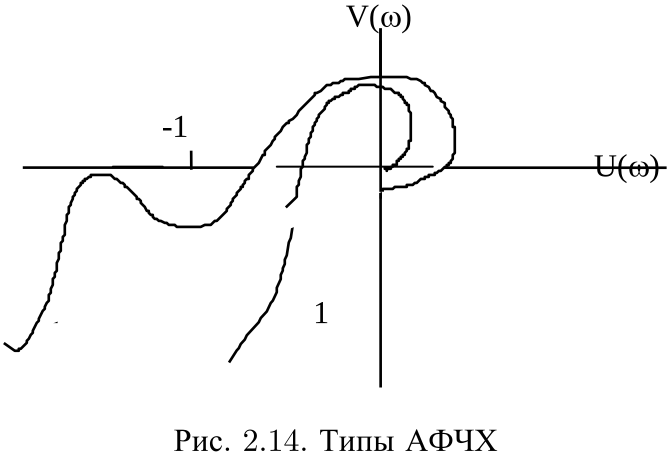

Рис. 2.14. Типы АФЧХ

В системах первого рода увеличение коэффициента усиления ведёт к сдвигу ветви кривой влево и приближению её к критической точке. Запасы устойчивости при этом уменьшаются и при $k = k_{\text{кр}}$ система попадает на границу устойчивости. Уменьшение коэффициента усиления стабилизирует систему.

В системах второго рода переход системы на границу устойчивости может происходить как при увеличении коэффициента усиления, так и при его уменьшении. Из критерия Найквиста следует, что замкнутая система, имеющая в разомкнутом состоянии АФЧХ 1-го рода устойчива, если всем точкам АФЧХ, вплоть до точки пересечения её с окружностью единичного радиуса ($\omega = \omega_c$), соответствуют значения фазы $\varphi(\omega_c)$, большие, чем $-\pi$, т.е. должно выполняться неравенство $\omega_c < \omega_\pi$. Этому определению легко дать интерпретацию на языке ЛЧХ.

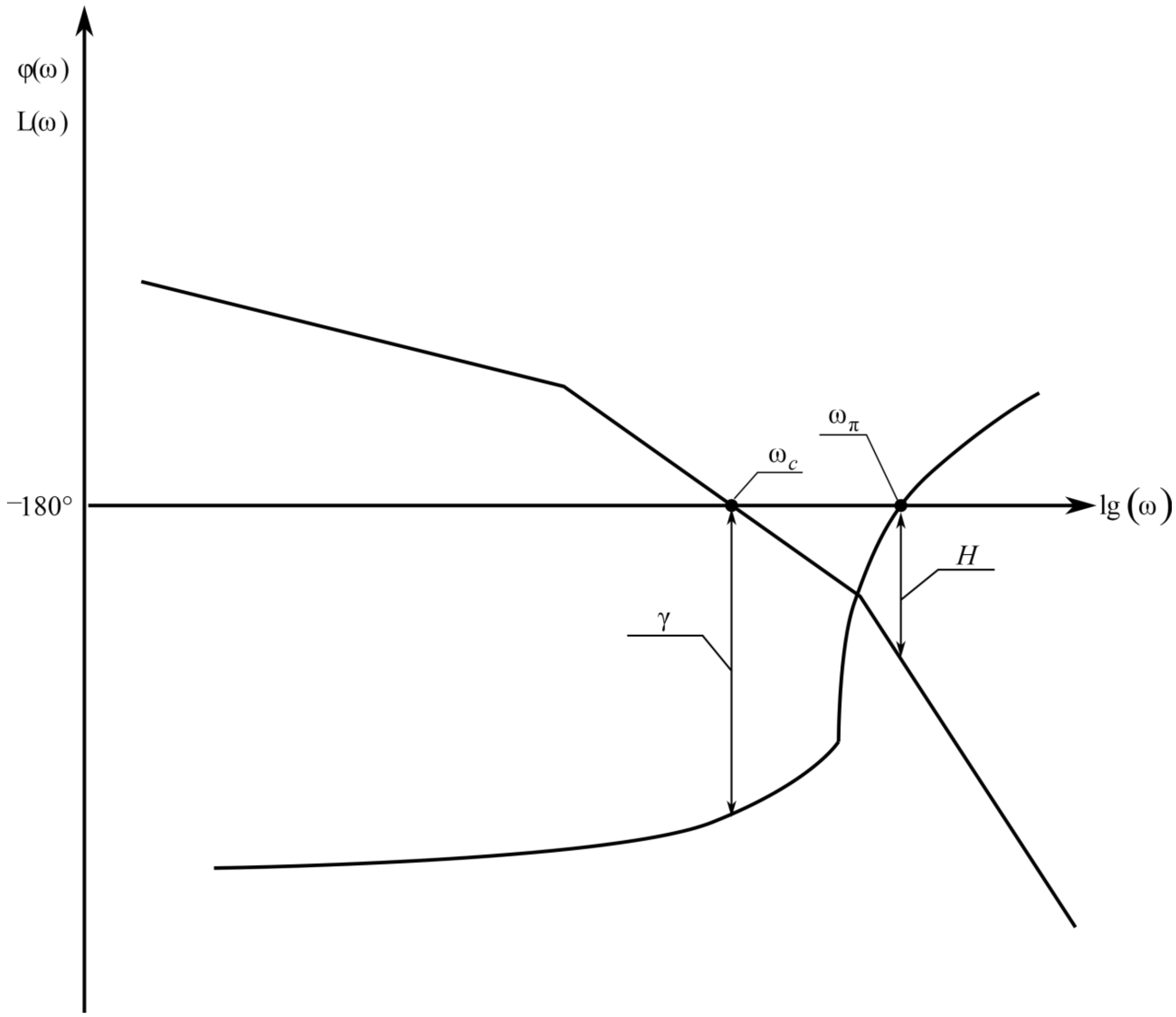

Рис. 2.15. ЛЧХ систем первого рода

Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧХ первого рода, была устойчивой и в замкнутом состоянии, необходимо и до-

статочно, чтобы при всех частотах, при которых ЛАХ положительна, значения фазовой характеристики были больше, чем $-\pi$, т.е. $\omega_c < \omega_\pi$.

По ЛЧХ легко определяются и запасы устойчивости, причём запас устойчивости по усилению в логарифмическом масштабе должен удовлетворять условию $|H| > 6$ дб что соответствует значениям $h > 2$.

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

Показатели качества САУ

Количественные оценки качества, так называемые прямые показатели качества, определяются по кривой переходного процесса (рис.2.16).

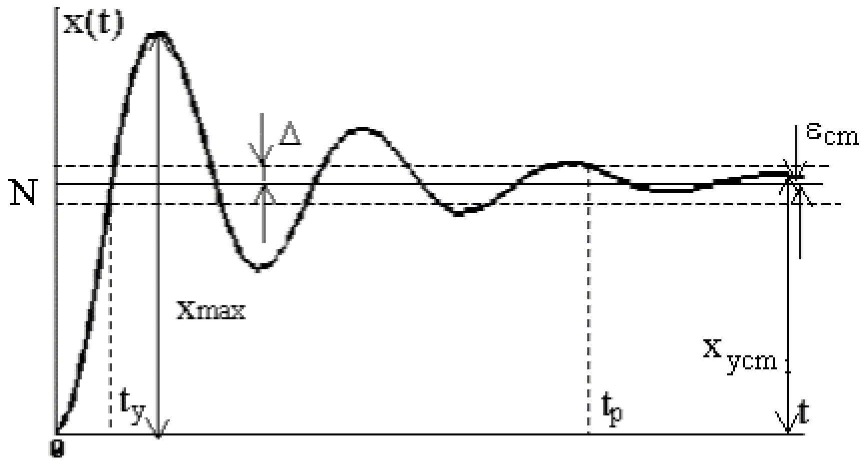

Рис. 2.16. Переходная функция и показатели качества

Используются следующие прямые показатели качества:

1. **величина перерегулирования** σ

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x_{уст}}{x_{уст}} \cdot 100\%, \tag{2.25}$$

которая характеризует максимальное отклонение регулируемой величины от ее установившегося значения, которое может быть определено в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала

$$x_{уст} = x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s).$$

2. **время переходного процесса** или **время регулирования** $t_{\text{р}}$ – наименьшее значение времени, после которого имеет место неравенство

$$\left|x(t)-x(\infty)\right| \le \Delta, \tag{2.26}$$

где $\Delta -$ заданная величина, обычно лежащая в пределах $\Delta = 0,02-0,05$.

3 **статическая ошибка** $\varepsilon_{\text{ст}}$ – величина отклонения установившегося значения регулируемой величины $x(\infty)$ от требуемого значения N:

$$\varepsilon_{cm} = N - x(\infty) \tag{2.27}$$

или $\varepsilon_{cm} = \lim\limits_{s\to 0} sE(s)$, где $E(s)$ изображение ошибки.

4 **время установления** $t_{\text{у}}$ промежуток времени, по истечении которого регулируемая величина первый раз достигает установившегося значения.

Для определения качества системы могут использоваться и другие показатели, соответствующие решаемой задаче, например, число колебаний регулируемой величины за время регулирования, частота и период колебаний и т.д.

Во всех случаях необходимо построить переходную функцию.

Коэффициенты ошибок

Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях, может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки определяется выражением

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s)G(s).$$

Разложим передаточную функцию системы по ошибке в степенной ряд в окрестности точки $s=0$. Отметим, что при $s \to 0, t \to \infty$ и именно поэтому мы говорим о точности в установившемся режиме.

$$\Phi_\varepsilon(s) = C_0 + C_1 s + \frac{C}{2!}s^2 + \ldots + \frac{C_i}{i!}s^i + \ldots. \tag{2.28}$$

Обозначим: $K_i = \dfrac{C_i}{i!}$ и получим

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(s) &= K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + \ldots + K_i s^i + \ldots,\\ E(s) &= (K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + \ldots + K_i s^i + \ldots)G(s).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Учитывая, что оператор s, умноженный на изображение самой величины, является символом дифференцирования, можно для оригиналов записать

$$\varepsilon(t) = K_0 g(t) + K_1 \dot{g}(t) + K_2 g^{(2)}(t) + \ldots + K_i g^{(i)}(t) + \ldots. \tag{2.30}$$

Выражение (2.30) определяет зависимость ошибки регулирования от различных составляющих входного воздействия и коэффициенты K_i получили название коэффициентов ошибок:

$K_0 -$ коэффициент ошибки по положению;

$K_1 -$ коэффициент ошибки по скорости;

$K_2 -$ коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Из (2.30) следует, что

$$K_i(s) = \frac{1}{s^i}\left\{\varepsilon(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m\right\}.$$

Численные значения коэффициентов ошибок определяются из этого выражения при $s \to 0$.

$$K_i = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^i}\left\{\Phi_\varepsilon(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m\right\}. \tag{2.31}$$

Очевидно, что $K_0 = \Phi_\varepsilon(0)$.

Входное воздействие можно представить в виде степенного ряда

$$g(t) = g_0 + g_1 t + \frac{g_2}{2}t^2 + \ldots + \frac{g_m}{m!}t^m,$$

где $g_0 -$ постоянная величина, характеризующая начальное значение, $g_1 = const -$ скорость изменения входного воздействия, $g_2 = const -$ ускорение и т.д. Тогда

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + g_1\frac{1}{s^2} + \frac{g_2}{2}\frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{g_m}{m!}\frac{1}{s^{m+1}}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^{\nu} A(s)},$$

где ν – порядок астатизма системы. Для передаточной функции замкнутой системы по ошибке получим

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^{\nu} A(s)}{s^{\nu} A(s) + B(s)}.$$

Изображение ошибки запишется в виде

$$E(s) = \frac{s^{\nu} A(s)}{s^{\nu} A(s) + B(s)} \left(\frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \frac{g_2}{2!} \frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{g_m}{m!} \frac{1}{s^{m+1}} \right).$$

Отсюда следует, что если порядок астатизма больше порядка старшей производной воздействия, т.е. $\nu > m$ то ошибка в установившемся режиме будет равна нулю. Если $\nu = m$ то установившаяся ошибка будет равна постоянной величине, называемой статической ошибкой. И если $\nu < m$ то при $t \to \infty$ и $\varepsilon \to \infty$. В отношении коэффициентов ошибок последнее выражение позволяет сделать следующие выводы.

1. Если система статическая, т.е. $\nu = 0$ то существуют все составляющие ошибки и все коэффициенты ошибок не равны нулю, т.к. $K_0 = \Phi_{\varepsilon}(0) \neq 0$.
2. Система с астатизмом 1-го порядка, $\nu = 1$, не имеет ошибки по положению и $K_0 = 0$.
3. Система с астатизмом 2-го порядка, $\nu = 2$, не имеет ошибок по положению и по скорости и $K_0 = 0, K_1 = 0$

Этот список можно продолжить. Таким образом, повышение порядка астатизма повышает точность системы в установившемся режиме. Но повышение порядка астатизма снижает запасы устойчивости, т.к. введение интегрирующих звеньев увеличивает фазовое запаздывание (снижает частоту ω_{π}). Поэтому на практике порядок астатизма выше второго не применяют, а чаще всего ограничиваются астатизмом первого порядка, используя для повышения точности другие способы.

Интегральные оценки качества

Интегральные оценки характеризуют качество протекания переходных процессов. Наибольшее распространение получили две интегральные оценки

$$J_0 = \int_0^\infty \left[x(t) - x(\infty)\right]^2 dt = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt, \tag{2.32}$$

$$J_1 = \int_0^\infty \left\{\left[x(t) - x(\infty)\right]^2 + \tau^2 (\frac{dx}{dt})^2 \right\} dt = \int_0^\infty \left[\varepsilon^2(t) + \tau^2 \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right)^2\right] dt. \tag{2.33}$$

Интеграл (2.32) определяет площадь под кривой квадрата динамической ошибки. Чем меньше этот интеграл, тем быстрее затухает переходный процесс и, следовательно, интеграл J_0 служит мерой быстродействия системы. В ряде случаев система, удовлетворяющая условию минимума J_0, имеет значительную колебательность переходного процесса. Для уменьшения колебательности можно попробовать воспользоваться оценкой J_1. Представим этот интеграл в виде

$$J_1 = \int_0^\infty \left[\varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right]^2 dt - \int_0^\infty 2\tau\varepsilon(t)\frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt =$$
$$= \int_0^\infty \left[\varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right]^2 dt - \tau\varepsilon^2(t)\Big|_0^\infty .$$

Последний член в полученном выражении является постоянной величиной и, если считать, что при $t \to \infty$ ошибка $\varepsilon(t) \to 0$, то он равен $\tau\varepsilon^2(0)$. Минимальное значение интеграл J_1 будет иметь, если подынтегральное выражение будет равно нулю, т.е.

$$\tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) = 0. \tag{2.34}$$

Решение этого дифференциального уравнения будет

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{2.35}$$

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия начальное значение ошибки $\varepsilon(0) = 1$ и можно рекомендовать следующую методику выбора величины постоянной времени τ.

1. выберем из каких – либо соображений время регулирования $t_{\text{р}}$ и величину Δ, по уровню которой выбирается это время, т.е. $\varepsilon(t_{\text{р}}) = e^{-\frac{t_{\text{р}}}{\tau}} = \Delta$;

2. определим логарифм натуральный от полученного выражения $-\frac{t_p}{\tau} = \ln(\Delta)$.

Отсюда получим $\tau = -\frac{t_{\text{р}}}{\ln \Delta}$.

Недостатками интегральных оценок являются невозможность получения прямых показателей качества и высокая сложность вычислительных процедур. Достоинство – это возможность выразить интегральные оценки как функции параметров системы и, воспользовавшись известными методами поиска экстремума, определить значения этих параметров, дающие минимум избранной оценке. Именно это и послужило развитию аналитических методов синтеза систем автоматического управления, основанных на минимизации квадратичных интегральных оценок.