Кинематика поступательного и вращательного движения

Введение

Механика, как раздел физики, изучает механическое движение материальных тел. **Механическим движением называется процесс изменения взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.**

Механическое движение можно рассматривать с разных точек зрения:

1) с геометрической, т.е. изучать внешнюю сторону различных видов движения, не рассматривая причины, которые обусловливают эти движения;

2) с причинно-следственной, т.е. изучать движение с точки зрения тех взаимодействий, которые его обусловливают или изменяют.

Разделы механики, изучающие движение тел с указанных точек зрения, называются соответственно кинематикой и динамикой. Особо рассматриваются условия равновесия тел (статика, которая является частью динамики).

Понятие «механическое движение» неприменимо к одному, отдельному телу. О движении данного тела имеет смысл говорить лишь тогда, когда есть возможность определять его положение относительно другого тела или других тел. Поэтому, приступая к изучению движения какого-либо тела, мы должны сначала условиться, по отношению к какому телу это движение будем рассматривать. **Тело или система тел, по отношению к которым определяется положение других тел, называется телом отсчета.**

Для определения положения какой-либо точки в пространстве и аналитического описания ее движения с выбранным телом отсчета связывают координатную систему. Наиболее удобной и часто употребляемой является прямоугольная (декартова) система координат, в которой положение материальной точки M однозначно определяется координатами x, y, z (см. рис. 1).

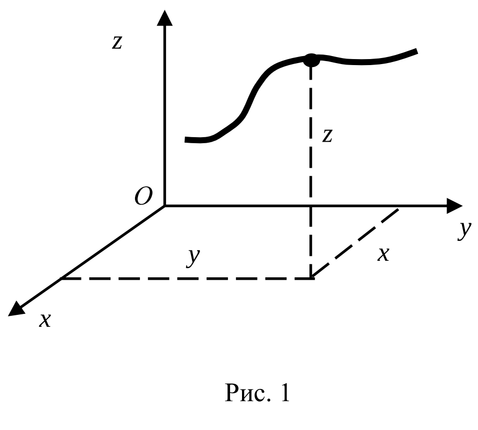

Рис. 1

Движение происходит как в пространстве, так и во времени. Поэтому для описания движения необходим также отсчет времени. Это делается с помощью часов.

Тело отсчета, связанная с ним система координат и часы называются системой отсчета.

Любое движущееся тело обладает размерами, строением и внутренним состоянием. Однако при изучении механического движения с пространственно-временной точки зрения можно отвлечься от внутреннего строения тела, а зачастую также от его размеров и формы. Такое, возможно, если все точки тела движутся одинаково, либо если размеры тела малы по сравнению с размерами области пространства, в котором рассматривается движение тела. В этом случае для описания движения тела можно использовать **модель материальной точки**.

Материальная точка (МТ) – это тело, формой и размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в разных задачах может рассматриваться и как материальная точка, и как протяженный объект. Так, движущийся вокруг Земли искусственный спутник можно рассматривать как материальную точку при определении траектории его движения и как протяженное тело определенной формы при расчете затрат энергии на преодоление сопротивления атмосферы при выведении его на орбиту.

В механике важным понятием является понятие **механической системы**. **Механическая система это есть совокупность произвольного числа материальных точек**. Любое тело протяженных размеров можно рассматривать как механическую систему, поскольку его можно всегда разбить на материальные точки или частицы, из которых оно состоит.

Движение реальных тел происходит в условиях их взаимодействий, которые могут сопровождаться изменением размеров и формы, т.е. деформацией. Чаще всего деформации настолько незначительны, что при описании движения тела ими можно пренебречь. В этих случаях можно ввести **модель абсолютно твердого тела**.

Абсолютно твердое тело – это тело (или механическая система), в котором расстояние между двумя любыми точками неизменно во времени.

Кинематика – раздел механики, в котором исследуются характеристики и закономерности различных типов механического движения тел безотносительно к тем причинам, которые обеспечивают данное движение.

Из всех видов движения выделяют **поступательное** движение и **вращательное** движение. Эти движения являются наиболее универсальными, так как любое движение можно разложить на поступательную и вращательную составляющие.

1. Кинематика поступательного движения

Поступательным называется такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается в пространстве, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают совершенно одинаковые траектории, имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения. Поэтому **при описании поступательного движения твердого тела удобно использование модель материальной точки (МТ)**.

Кинематическими характеристиками движения МТ являются путь, перемещение, линейная скорость и линейное ускорение.

Траекторией МТ называют линию, описываемую ею в пространстве при движении. В зависимости от формы траектории различают движение прямолинейное и криволинейное (частным случаем криволинейного движения является движение по окружности).

Форма траектории зависит от системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Если МТ движется относительно выбранной системы отсчета (см. рис. 1.1), то координаты x, y, z с течением времени изменяются:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \qquad (1.1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ есть некоторые функции от времени.

Длиной пути s МТ называют сумму длин всех участков траектории, пройденных точкой за рассматриваемый промежуток времени. Длина пути – положительная величина и описывается уравнением

$$s = s(t)\ . \qquad (1.2)$$

Пусть МТ в данной системе отсчета движется по некоторой криволинейной траектории АВ (рис. 1.1) так, что в момент времени t она занимает положение А, в момент времени $t+\Delta t$ - положение В. **Длина участка траектории Δs представляет собой путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.**

Положение МТ (см. рис.1.1) относительно системы отсчета можно задать не только с помощью трех ее декартовых координат x, y, z, но также с помощью одной векторной величины $\vec{r}$ – радиуса-вектора МТ, проведенного в эту точку из начала O системы координат. Конец вектора $\vec{r}$ описывает в пространстве траекторию движения точки (рис. 1.1). **Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения (точка A) в конечное (точка B), называется вектором перемещения МТ за время $\Delta t = t_2 - t_1$.**

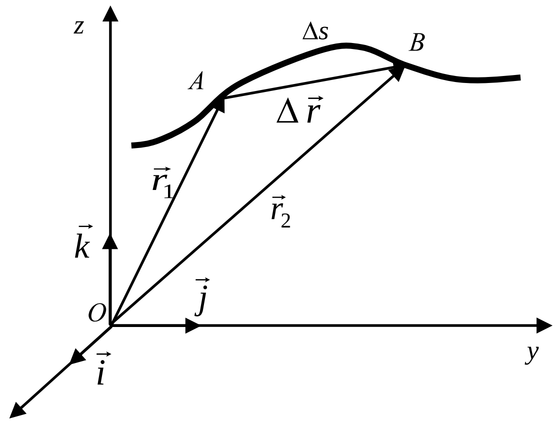

Рис. 1.1

Замечание: векторные величины в тексте и на рисунках обозначены буквами со стрелкой вверху, а модули этих векторов – теми же буквами, но без стрелки.

Численные значения модуля Δr вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и длины участка траектории Δs совпадают только в случае прямолинейного движения. В случае же криволинейного движения они совпадают только в пределе $\Delta t \to 0$, т.е. для бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ за бесконечно малое время dt мы имеем

$$|d\vec{r}| = ds.$$

Радиус-вектор в координатной форме может быть представлен следующим образом:

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\,, \qquad (1.3)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты единичных векторов вдоль координатных осей x, y, z (см. рис. 1.1). Аналогичным образом может быть представлен вектор перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\,\vec{r} = \Delta\,x\cdot\vec{i} + \Delta\,y\cdot\vec{j} + \Delta\,z\cdot\vec{k}\ , \qquad (1.4)$$

Абсолютные значения (модуль) радиус-вектора и вектора перемещения определяется выражением

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ , \quad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ . \qquad (1.5)$$

Для характеристики движения МТ вводят векторную физическую величину – скорость, определяющую как быстроту, так и направление движения в данный момент времени.

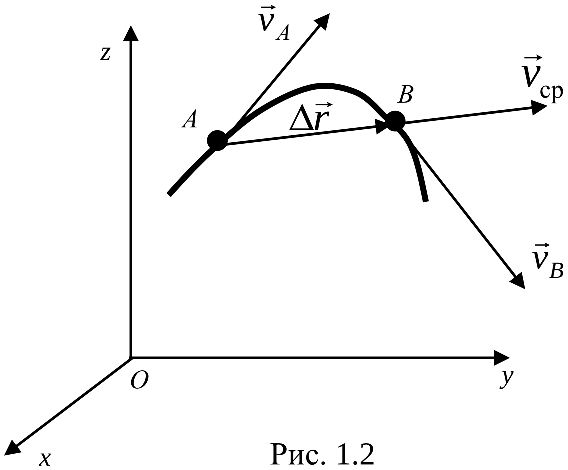

Рис. 1.2

Пусть МТ движется по криволинейной траектории *AB* (см. рис. 1.2) так, что в момент времени t она находится в точке *A*, а в момент времени $t + \Delta t$ – в точке *B*. Величину $\Delta\vec{r}$ будем называть приращением радиуса-вектора. Тогда **вектором средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ точки в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называют отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиуса-вектора точки за этот интервал времени к его величине** Δt:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ . \qquad (1.6)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$ (рис.1.2). Если в выражении (1.6) перейти к пределу, устремляя Δt к нулю, то получим выражение для мгновенной скорости МТ в момент времени t прохождения ее через точку *A* траектории. Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории в соответствующей точке

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ . \qquad (1.7)$$

Таким образом, **мгновенная скорость (или просто – скорость) есть векторная величина, равная производной по времени от радиуса-вектора движущейся МТ**. С учетом формулы $|d\vec{r}| = ds$ модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\ , \qquad (1.8)$$

или, вводя единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к траектории в данной точке, запишем вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}\ . \tag{1.9}$$

В координатной форме вектор $\vec{v}$ можно записать, воспользовавшись (1.4) и (1.7), следующим образом:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}\ , \tag{1.10}$$

где

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ ,\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\ ,\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\ .$$

Модуль мгновенной скорости равен

$$v = \left|\vec{v}\ \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.11}$$

В процессе движения вектор скорости может изменяться как по величине, так и по направлению. Для описания быстроты изменения скорости движения вводится понятие ускорения. Пусть за время t движущаяся точка переместилась из положения А в положение В (рис.1.3) и вектор ее скорости $\vec{v}$ изменился на $\Delta\vec{v}$. Перенесем вектор $\vec{v}_B$ из точки B в точку A.

Средним ускорением в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называют вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\ . \tag{1.12}$$

Очевидно, что направление вектора $\vec{a}_{\text{ср}}$ совпадает по направлению с вектором изменения скорости $\Delta\vec{v}$ (см. рис. 1.3).

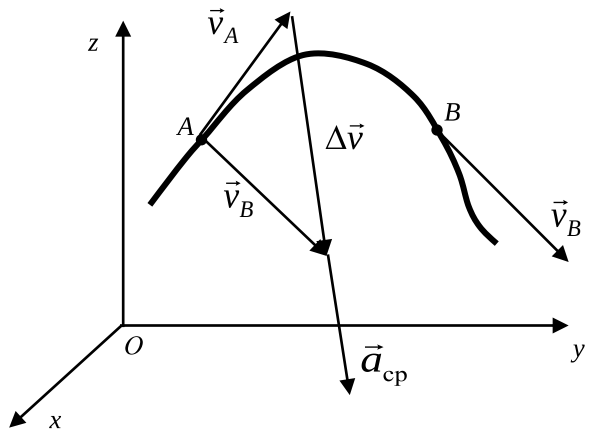

Рис. 1.3

Мгновенным ускорением (или просто ускорением) точки в момент времени t называют векторную величину $\vec{a}$, равную пределу, к которому стремится среднее ускорение этой точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ при неограниченном уменьшении Δt:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}\ , \tag{1.13}$$

т.е. ускорение в любой момент времени определяется производной от вектора скорости по времени. Направление мгновенного ускорения совпадает с направлением приращения скорости $d\vec{v}$ за бесконечно малый промежуток времени dt (см. рис. 1.3) .

Так как $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\ , \tag{1.14}$$

т.е. ускорение равно второй производной от радиуса-вектора по времени.

Принимая во внимание (1.10), вектор $\vec{a}$ можно записать в координатной форме

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\quad , \tag{1.15}$$

где $\quad a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$.

При этом модуль ускорения равен

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.16}$$

Вектор ускорения описывает изменение величины и направления скорости. Эти изменения можно характеризовать раздельно, введя две составляющие вектора ускорения – **тангенциальное** ускорение и **нормальное** ускорение. **Тангенциальное ускорение описывает изменение величины скорости, а нормальное ускорение – изменение направления скорости.**

Так как скорость является векторной величиной, то она может изменяться как по величине (модулю), так и по направлению. Пусть $\vec{a}$ есть вектор ускорения материальной точки, $\vec{v}$ есть вектор ее скорости и $\vec{\tau}$ есть единичный вектор, направленный по касательной к материальной точке в данном ее положении в сторону движения точки. Тогда, поскольку

$$\vec{v} = v\vec{\tau}\ ,$$

то можно записать

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}.$$

Обозначая $\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\dfrac{dv}{dt}$, $\vec{a}_n = v\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$, мы можем записать

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\ . \tag{1.17}$$

Векторная величина $\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\dfrac{dv}{dt}$ называется тангенциальным ускорением материальной точки и как видно из ее определения, она направлена по касательной к материальной точки.

Векторная величина $\vec{a}_n = v\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ называется нормальным ускорением материальной точки. Можно показать, что данную величину можно представить в виде

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} \tag{1.18}$$

где R – радиус кривизны траектории, а $\vec{n}$ есть единичный вектор, перпендикулярный касательной к траектории материальной точки. Модули нормального и тангенциального ускорения есть

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \tag{1.19}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.20}$$

Таким образом, тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ – вектор, характеризующий изменение скорости по величине, направленный по касательной к траектории и численно равный $\frac{dv}{dt}$; нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – вектор, характеризующий изменение скорости по направлению и направленный по радиусу к центру кривизны траектории. Оно численно равно $\frac{v^2}{R}$.

Учитывая (1.17), (1.19) и (1.20), и то, что векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, можно записать формулу для модуля полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{1.21}$$

Поскольку нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны, а тангенциальное – по касательной к траектории, то полное ускорение всегда обращено внутрь траектории.

Проанализируем некоторые частные случаи движения:

а) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$. При этом $\vec{a} = 0$ и движение **равномерное и прямолинейное.**

б) $a_\tau = \mathrm{const}$, $a_n = 0$. Если $a_\tau = \frac{dv}{dt} = const$, то за равные промежутки времени модуль скорости изменяется на одинаковую величину, значит, движение равноускоренное. При $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ траектория движения представляет собой прямую линию. **Таким образом, в данном случае МТ совершает прямолинейное равноускоренное движение.**

в) $a_\tau = 0$, $a_n = const$. Если $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, то $v = const$ и движение равномерное. При $a_n = \frac{v^2}{R} = const$, $R = const$ траектория движения – окружность. **Значит, в данном случае МТ совершает равномерное движение по**

окружности;

г) $a_\tau = 0$, $a_n = f(t)$. Если a_n является функцией времени, то движение криволинейное. Так как $a_\tau = 0$, то движение равномерное. **Таким образом, в данном случае МТ совершает равномерное криволинейное движение;**

д) $a_\tau = f_1(t)$, $a_n = f_2(t)$. Если и тангенциальное, и нормальное составляющие ускорения являются функциями времени, значит, **движение неравномерное криволинейное.**

2. Вращательное движение

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором все точки тела движутся по окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Ось вращения перпендикулярна плоскостям, в которых лежат эти окружности. Она может проходить сквозь тело или лежать за его пределами. Если ось вращения проходит сквозь тело, то те точки тела, которые лежат на этой оси, во время движения тела остаются в покое.

При вращательном движении абсолютно твердого тела нельзя пользоваться моделью материальной точки, ибо разные точки тела движутся по окружностям разного радиуса, т.е. их пути и скорости различны (рис. 2.1).

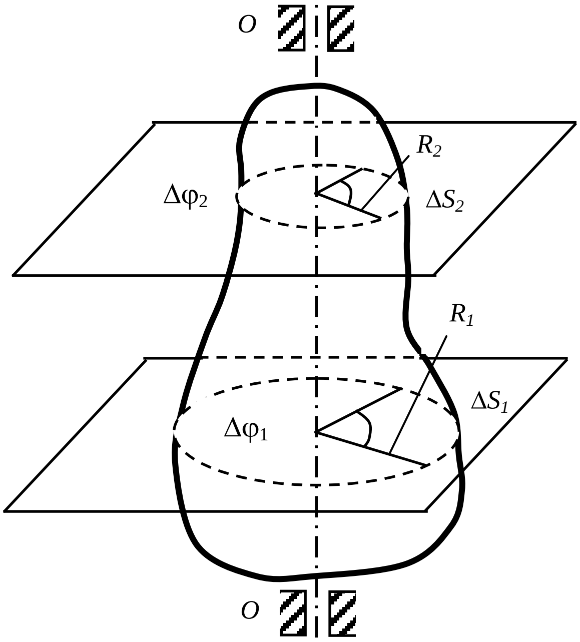

Рис. 2.1

В силу этой же причины вращение твердого тела (как целого) не может быть охарактеризовано линейным перемещением и линейной скоростью, как это было сделано в поступательном движении. Вместе с тем, нетрудно заметить, что радиусы-векторы, соединяющие все точки твердого тела с центрами описываемых ими окружностей, поворачиваются за один и тот же промежуток времени Δt на одинаковый угол $\Delta\varphi$ (см. рис. 2.2).

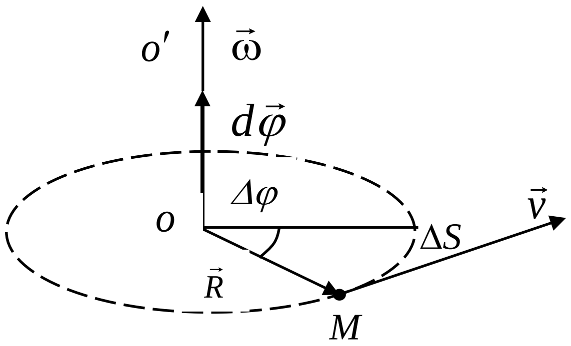

Рис. 2.2

Следовательно, все точки абсолютно твердого тела во вращательном движении проходят одинаковые угловые пути и имеют одинаковые угловую скорость и угловое ускорение. Поэтому в качестве кинематических характеристик вращательного движения тела должны быть выбраны вектор углового перемещения, угловая скорость и угловое ускорение.

При малых поворотах тела угол поворота можно рассматривать как векторную величину $d\vec{\varphi}$, численно равную модулю $d\varphi$, и направленную вдоль оси вращения $OO^{/}$ так, чтобы из конца вектора поворот тела был виден против часовой стрелки (правило буравчика) (см. рис. 2.3).

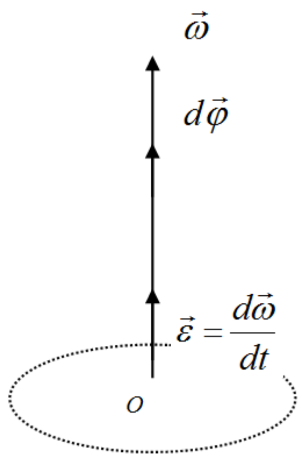

Рис. 2.3

Угловой скоростью тела называют вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота $\vec{\varphi}$ по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу буравчика, т.е. так же, как вектор угла поворота.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{2.1}$$

Угловая скорость характеризует направление и быстроту вращения тела как целого вокруг оси. Если $\vec{\omega}$ = const, то движение тела называют равномерным вращением вокруг неподвижной оси.

Скорость $\vec{v}$ произвольной точки *M* тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$, называют линейной скоростью этой точки. За время dt точка M проходит по дуге окружности радиуса R путь $ds = vdt = Rd\varphi$ так, что

$$v = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega \quad . \qquad (2.2)$$

Из рис. 2.2 видно, что вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно и к $\vec{\omega}$ и к радиусу-вектору $\vec{R}$ в ту же сторону, что и векторное произведение $\vec{R}\times\vec{\omega}$. Так как векторы $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$ взаимно перпендикулярны, то $\left|\vec{R}\times\vec{\omega}\right| = R\omega = v$. Следовательно,

$$\vec{v} = \vec{R}\times\vec{\omega}. \qquad (2.3)$$

Так как в случае вращения тела вокруг неподвижной оси за начало координат, из которого проводят радиусы-векторы $\vec{r}$ можно выбрать любую точку оси вращения, то выражение (2.3) можно переписать в виде:

$$\vec{v} = \vec{r}\times\vec{\omega} \qquad (2.4)$$

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие углового ускорения.

Угловым ускорением называют вектор $\vec{\varepsilon}$, характеризующий быстроту изменения угловой скорости со временем и численно равный первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.5)$$

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси изменение вектора $\vec{\omega}$ обусловлено только изменением его численного значения. При этом вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения (рис. 2.3).

Наряду с понятием угловой скорости пользуются понятиями периода и частоты вращения.

Периодом вращения T называют промежуток времени, в течение которого тело совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π.

Частотой вращения ν называют число оборотов, совершаемых телом за одну секунду.

Связь между ω, T и ν имеет вид

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad . \qquad (2.6)$$

Угол поворота в системе СИ измеряется в радианах (рад), угловая скорость – в радианах в секунду (рад/с), угловое ускорение – в радианах в секунду в квадрате (рад/с^2).

Выразим тангенциальное и нормальное ускорение произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, через угловую скорость и угловое ускорение тела:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon\,, \qquad (2.7)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2}R = 4\pi^2\nu^2 R. \qquad (2.8)$$

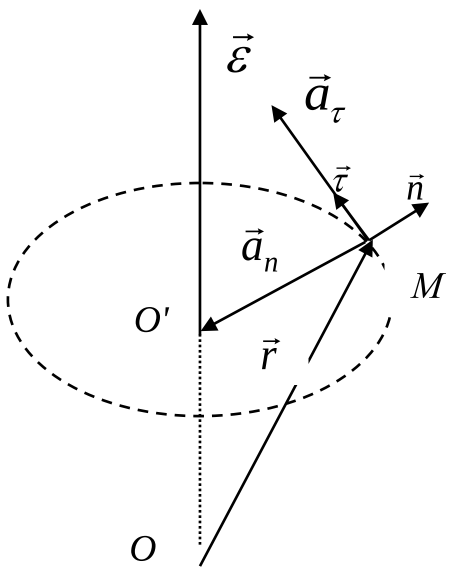

Рис. 2.4

В формулах (2.7), (2.8) R есть радиус вектор точки тела, перпендикулярный оси вращения. Из рис. 2.4 и уравнения (2.7) следует, что вектор $\vec{a}_\tau$ равен векторному произведению вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на радиус-вектор $\vec{r}$, соединяющий произвольную точку на оси вращения с точкой *M*:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,. \qquad (2.9)$$

Вектор $\vec{a}_n$ нормального ускорения направлен к оси вращения, т. е. в противоположную сторону от $\vec{r}$:

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\vec{n} = -\frac{v^2}{\vec{r}\cdot\vec{n}}\vec{n}\,. \qquad (2.10)$$