Закон изменения и сохранения импульса. Закон движения центра масс. Движение тела с переменной массой

1. Закон изменения и сохранения импульса.

Импульсом материальной точки называется произведение массы этой точки на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Если масса материальной точки не изменяется с течением времени и на нее действуют силы, сумму которых мы обозначим через $\vec{F}$, то второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ для этой материальной точки можно выразить через ее импульс. Поскольку

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

то второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать в виде уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} ,$$

которое по сути является законом изменения импульса материальной точки.

Мы выведем закон изменения импульса для произвольной механической системы.

Механической системой считается любая совокупность материальных тел, механическое движение которых нас интересует. Поскольку любое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, то механическую систему всегда можно рассматривать как систему материальных точек, движение которых мы изучаем. Таким образом, **механическая система есть произвольная совокупность материальных точек.**

Тела системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, подразделяются на **внутренние силы** и **внешние силы**.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек (рис. 1). Предположим, что на материальные точки действуют внутренние и внешние силы. Пусть $\vec{f}_{ik}$ - внутренняя сила, действующая на материальную точку с номером i со стороны материальной точки с номером k. Обозначим также через $\vec{F}_i$ внешнюю силу, которая действует на материальную точку с номером i. Запишем уравнения движения для каждой из материальных точек:

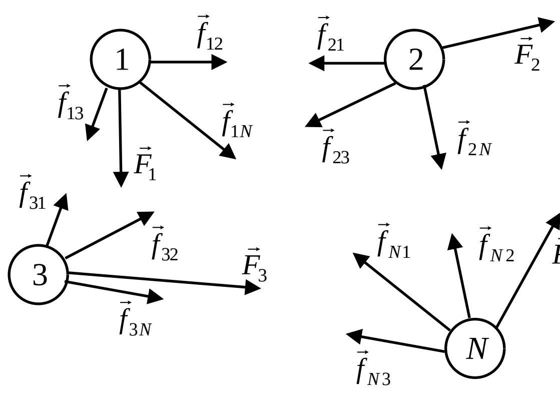

Рис. 1

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1k} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1 = \sum_{k=2}^{N} \vec{f}_{1k} + \vec{F}_1 ;$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2k} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2 = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq 2)}}^{N} \vec{f}_{1k} + \vec{F}_2 ;$$

....

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{ik} + \ldots + \vec{f}_{iN} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{N} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i ;$$

....

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{Nk} + \ldots + \vec{f}_{N,N-1} + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^{N-1} \vec{f}_{Nk} + \vec{F}_N .$$

Сложим эти N уравнений. Вследствие того, что $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0$, $\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} = 0$, … (согласно третьему закону Ньютона) и т.д., справа останутся только внешние силы. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \qquad (1)$$

Сумму импульсов частиц, стоящую под знаком производной в левой части, назовем **полным импульсом системы.** Обозначив его $\vec{P}$, получим

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i . \qquad (2)$$

Запишем соотношение (1) в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

Сумму внешних сил можно обозначить как

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}^{\text{внеш}} .$$

Тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} . \qquad (3)$$

Уравнение (3) выражает закон изменения импульса механической системы: **скорость изменения полного импульса механической системы равна сумме всех внешних сил, действующих на систему.**

Из уравнения (3) следует, что **если сумма внешних сил $\vec{F}^{\text{внеш}}$, действующих на систему равна нулю, то**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (4)$$

то полный импульс механической системы остается постоянным *(закон сохранения импульса для механической системы)*. Иначе говоря, импульс системы тел может быть изменен только за счет действия внешних сил.

Частным случаем равенства нулю суммы внешних сил, действующих на систему является **замкнутость** системы. **Система называется замкнутой, если на нее не действуют какие-либо внешние силы**, т.е. для любой точки системы, нумеруемой индексом i, выполнено условие $\vec{F}_i = 0$. Заметим, что равенство нулю суммы внешних сил $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$ еще не означает замкнутость системы.

Заметим также, что в случае, **когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление равна нулю, сохраняется составляющая импульса в этом направлении.** Например, если $F_x^{\text{внеш}} = 0$, то из (3) следует, что $\frac{dP_x}{dt} = 0$ и $P_x = const$.

2. Закон движение центра масс.

При движении механической системы удобно пользоваться понятием *центра масс* системы.

Пусть $\vec{r}_k$ – радиус-вектор, задающий положение *k*-ой материальной точки системы. Преобразуем выражение (2)

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

для импульса системы точек:

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} (m_k \vec{r}_k) = M\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N}(m_k \vec{r}_k)}{M}\right),$$

где $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ есть масса всех материальных точек.

Точку *С*, положение которой задается уравнением

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N}(m_k \vec{r}_k)}{M}\ , \qquad (5)$$

будем называть **центром масс** (или **центром инерции**) системы. Центр масс имеет смысл точки приложения всех действующих на систему массовых сил.

Координаты центра масс определяются следующим образом:

$$X_c = \frac{1}{M}\sum_k (m_k x_k),$$

$$Y_c = \frac{1}{M}\sum_k (m_k y_k),$$

$$Z_c = \frac{1}{M}\sum_k (m_k z_k).$$

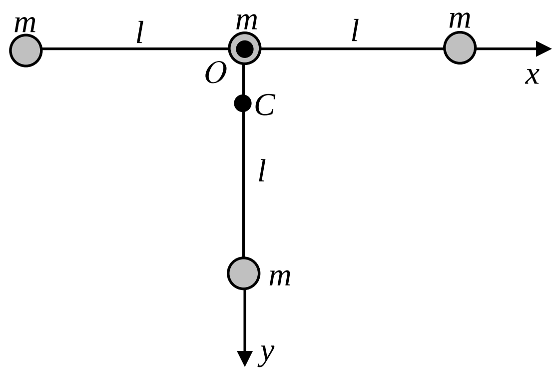

Рис. 2

Например, для изображенной на рис. 2 системы центр масс имеет координаты:

$$X_c = \frac{m\cdot(-l) + m\cdot l + m\cdot 0 + m\cdot 0}{4m} = 0;$$

$$Y_c = \frac{m\cdot 0 + m\cdot 0 + m\cdot 0 + m\cdot l}{4m} = \frac{ml}{4m} = \frac{l}{4}.$$

Продифференцировав по времени выражение (5), получим формулу для вычисления скорости $\vec{V}_c$ центра масс

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_k m_k \vec{v}_k}{\sum_k m_k}. \tag{6}$$

Выразим полный импульс системы через $\vec{V}_c$. Из формулы (6) следует

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{P}}{M},$$

откуда

$$\vec{P} = M\vec{V}_c \quad . \tag{7}$$

Подставляя в уравнение (3) выражение для импульса (7) системы материальных точек, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_c\right) = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

или

$$M\vec{A}_c = \vec{F}^{\text{внеш}} \tag{8}$$

где $\vec{F}^{\text{внеш}}$ – суммарная внешняя сила, действующая на систему материальных точек, $\vec{A}_c = d\vec{V}_c/dt$ – ускорение центра масс. Уравнение (8) называется ***законом движения центра масс механической системы.***

3. Движение тела с переменной массой

Основной закон динамики поступательного движения (второй закон Ньютона), записанный в виде $m\vec{a} = \vec{F}$ предполагает постоянство массы движущегося тела. Тем не менее, масса тела может меняться в процессе движения за счет присоединения или отделения частиц (сматывание рулона бумаги или ткани, движение поливальной машины, самолета, ракеты и т.д.). Наиболее ярко этот эффект проявляется в реактивной технике. В этом случае система состоит из тела ракеты и вытекающего из его сопла газообразного продукта сгорания (рис. 3). Масса ракеты непрерывно уменьшается по мере расхода горючего топлива.

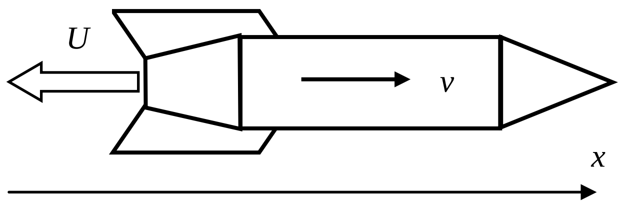

Рис. 3

Выберем неподвижную систему отсчета, связанную с Землей. Направим координатную ось *Ox* по направлению движения ракеты. Пусть m и $\vec{v}$ – масса ракеты и ее скорость относительно Земли в момент времени t, dm' – масса продукта сгорания, выброшенного из ракеты за время dt, а $m–dm'$ и $\vec{v} + d\vec{v}$ – масса ракеты и ее скорость относительно Земли в момент времени $t+dt$.

Закон изменения импульса (3) можно записать в форме:

$$d\vec{P} = \vec{F}^{\text{внеш}} dt,$$

где $\vec{F}^{\text{внеш}}$ есть внешняя сила. В проекции на ось *Ox* имеем:

$$dP_x = F_x^{\text{внеш}} dt\,.$$

Изменение проекции импульса системы «топливо+ракета» есть

$$dP_x = P_x(t + dt) - P_x(t).$$

Найдем $P_x(t + dt)$ и $P_x(t)$:

$$P_x(t + dt) = (m - dm')(v_x + dv_x) + dm'(v_x + dv_x + U_x),$$

$$P_x(t) = mv_x,$$

где мы обозначили через $\vec{U}$ скорость выброса частиц относительно ракеты и $U_x = –U$ есть ее проекция на ось *Ox*, $v_x + dv_x + U_x$ – скорость продуктов сгорания относительно Земли. Поэтому

$$dP_x = (m - dm')(v_x + dv_x) + dm'(v_x + dv_x + U_x) - mv_x,$$

и

$$(m - dm')(v_x + dv_x) + dm'(v_x + dv_x + U_x) - mv_x = F_x^{\text{внеш}} dt$$

Раскрыв в последнем уравнении скобки и поделив на dt, получим

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x^{\text{внеш}} - U_x \frac{dm'}{dt}.$$

В этом уравнении dm' есть изменение массы выброшенного топлива. Очевидно, что изменение массы ракеты dm связано с dm' как

$$dm = -dm'.$$

Поэтому

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x^{\text{внеш}} + U_x\frac{dm}{dt}, \tag{9}$$

где мы обозначили через $dm = -dm'$ - изменение массы ракеты. Уравнение (9) впервые получено И. В. Мещерским (1897 г.), профессором Петербургского университета, и носит его имя (**уравнение Мещерского**).

Слагаемое $U_x\frac{dm}{dt}$ в уравнении (9) обусловлено переменностью массы тела, имеет размерность и физический смысл силы и называется *реактивной силой*:

$$F_{p,x} = U_x\frac{dm}{dt}. \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что реактивная сила, возникающая при отделении или присоединении частиц, зависит:

- от быстроты изменения массы тела *dm/dt* (в случае присоединения частиц масса тела увеличивается, в случае отделения частиц масса тела уменьшается);

- от величины и направления скорости $\vec{U}$, с которой частицы покидают тело или присоединяются к нему.

Уравнение Мещерского можно записать в векторном виде:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{U}\frac{dm}{dt}. \tag{9'}$$

В этой форме оно имеет вид второго закона Ньютона с добавленной реактивной силой $\vec{U}\frac{dm}{dt}$. Реактивная сила, действующая на тело, совпадает по направлению с направлением $\vec{U}$, если частицы присоединяются ($\frac{dm}{dt} > 0$), и противоположна этой относительной скорости, если частицы отделяются ($\frac{dm}{dt} < 0$).

Из уравнения (9) видно, что движение ракеты будет происходить и тогда, когда внешняя сила $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$, т.е. за счет только действия реактивной силы. Таким образом, ракета – единственный аппарат, способный приходить в движение и изменять его без опоры (без посредства внешней среды), а реактивный двигатель является единственно возможным двигателем космических снарядов и кораблей.

Пусть $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$. Обозначим через v и U модули векторов $\vec{v}$ и $\vec{U}$. Тогда $v_x = v$ $U_x = -U$ и уравнение (9) переходит в уравнение вида

$$m\frac{dv}{dt} = -U\frac{dm}{dt} \tag{11}$$

решая которое можно получить:

$$v = U\ln(m_0/m), \tag{12}$$

где m_0 - начальная стартовая масса ракеты (когда $v=0$). Используя уравнение (12) можно найти максимальную скорость ракеты:

$$v_{\max} = U \ln\left[m_0/\left(m_0 - m_{топл}\right)\right], \tag{13}$$

где $m_{топл}$ – масса топлива и окислителя. В действительности, максимальная скорость ракеты будет меньше. Формула (13) называется **формулой Циолковского**.