Закон изменения и сохранения энергии

1. Работа силы

Элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{r}$ точки М приложения силы называется скалярное произведение $\vec{F}$:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}dt. \qquad (1)$$

Так как скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, то

$$\delta A = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = FdS\cos\alpha = F_\tau dS\,, \qquad (2)$$

где $dS = \left|d\vec{r}\right|$ - путь точки M за малое время dt; α - угол между силой $\vec{F}$ и элементарным перемещением $d\vec{r}$ (или скоростью $\vec{v}$) точки M; $F_\tau = F\cos\alpha$ – проекция силы $\vec{F}$ на направление $d\vec{r}$ (или $\vec{v}$), F_τ иногда называют касательной силой.

Из (2) следует, что если $\alpha < \pi/2$, то $\delta A > 0$, если $\alpha > \pi/2$, то $A < 0$ и при $\alpha = \pi/2$ $\delta A = 0$.

Работа A_{12}, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном перемещении точки ее приложения M из положения 1 в положение 2, равна сумме элементарных работ (1) на всех малых участках траектории точки M от 1 до 2. Эта сумма приводится к интегралу:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_2} F_\tau dS\,, \qquad (3)$$

где S – дуговая координата точки M, отсчитываемая вдоль ее траектории; S_1 и S_2 – значения S точках 1 и 2; $\Delta S = S_2 - S_1$ – длина траектории между точками 1 и 2, т. е. путь точки M от начального положения 1 до конечного положения 2. В математике этот интеграл называется криволинейным интегралом. Если зависимость $F_\tau(S)$ задана графически (рис. 1), то элементарная работа (2) $\delta A = F_\tau dS$ численно равна площади заштрихованной площадки. Работа A_{12} численно равна площади криволинейной трапеции $S_1 12 S_2$.

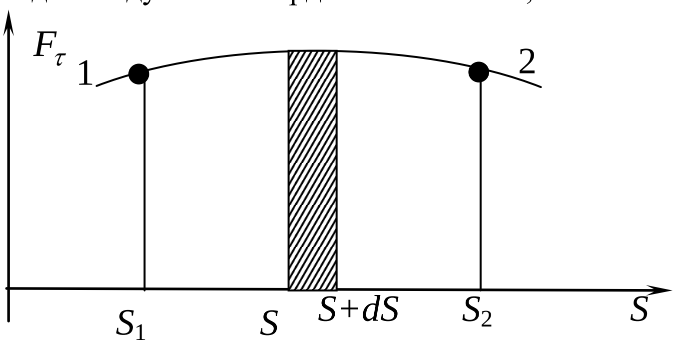

Рис. 1

Единицей работы в СИ служит работа, совершаемая на пути в один метр с силой в один ньютон, действующей в направлении перемещения. Эта единица называется джоулем (Дж), т.е. 1 Дж = 1 Н·1 м. Заметим, что в джоулях измеряется также энергия , количество теплоты.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,. \qquad (4)$$

Единицей мощности в СИ является ватт (Вт) – это такая мощность, при которой за одну секунду совершается работа, равная одному джоулю, т. е. 1 Вт = 1 Дж/1с. Заметим, что 1 кВт = 10^3 Вт, 1 МВт = 10^6 Вт, 1 ГВт = 10^9 Вт (приставка М читается как «мега», а приставка Г – как «гига»). В технике иногда применяется единица мощности, именуемая лошадиной силой (л. с.) и равная 736 Вт.

2. Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, встречающиеся в механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные*.

Сила, действующая на материальную точку, называется консервативной (потенциальной), если работа этой силы зависит только от начального и конечного положений точки. Работа консервативной силы не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения материальной точки по траектории (см. рис. 2):

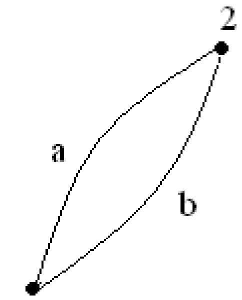

Рис. 2

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения точки вдоль малого участка на противоположное вызывает изменение знака элементарной работы $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$, следовательно, $A_{2b1} = -A_{1b2}$. Поэтому работа консервативной силы вдоль замкнутой траектории 1a2b1 равна нулю:

$$A_{1a2b1} = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0.$$

Точки 1и 2, а также участки замкнутой траектории 1a2 и 2b1 можно выбирать совершенно произвольно. Таким образом, **работа консервативной силы по произвольной замкнутой траектории L точки ее приложения равна нулю:**

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0 \text{ или } \oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0. \qquad (5)$$

В этой формуле кружок на знаке интеграла показывает, что интегрирование производится по замкнутой траектории. Часто замкнутую траекторию L называют замкнутым контуром L (рис. 3). Обычно задаются направлением обхода контура L по ходу часовой стрелки. Направление элементарного вектора перемещения $d\vec{l} = d\vec{r}$ совпадает с направлением обхода контура L. В этом случае формула (5) утверждает: циркуляция вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L равна нулю.

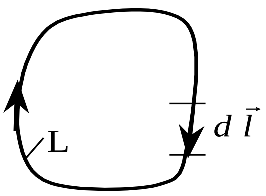

Рис. 3

Следует отметить, что силы тяготения и упругости являются консервативными, а силы трения неконсервативными. В самом деле, поскольку сила трения направлена в сторону, противоположную перемещению или скорости, то работа сил трения по замкнутому пути всегда отрицательна и, следовательно, не равна нулю.

3. Потенциальная энергия

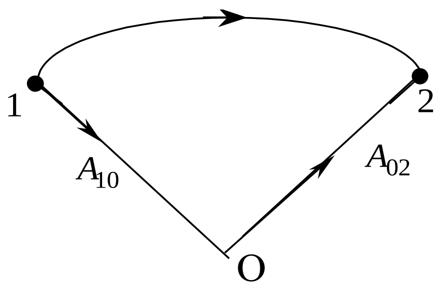

Рис.4

Если на материальную точку действует консервативная сила, то можно ввести скалярную функцию координат точки $U(\vec{r})$, называемую *потенциальной энергией*.

Потенциальную энергию определим следующим образом

$$U(\vec{r}) = A_{i0} + C, \qquad (6)$$

где C – произвольная постоянная, а A_{i0} – работа консервативной силы при перемещении материальной точки из положения $\vec{r}_i$ в фиксированное положение $\vec{r}_0$.

Образуем разность значений потенциальной энергии для точек 1 и 2 (см. рис. 4) и воспользуемся тем, что $A_{20} = -A_{02}$

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = (A_{10} + C) - (A_{20} + C) = A_{10} - A_{20} = A_{01} + A_{02}.$$

Правая часть, полученного соотношения, дает работу, совершаемую на пути из точки 1 в точку 2, проходящем через точку O; Вследствие независимости работы от формы пути такая же работа А совершается на любом другом пути, т.е.

$$A_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \tag{7}$$

Следовательно, работа консервативных сил равна разности значений функции U в начальной и конечной точках пути, т.е. убыли потенциальной энергии.

Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. Однако, это не имеет существенного значения, поскольку во все физические соотношения входит либо разность значений потенциальной энергии, либо ее производная по координатам.

4. Потенциальная энергия системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из многих материальных точек. Если задано положение каждой материальной точки, то этим определено и положение всей системы или ее конфигурация. Если силы, действующие на материальные точки системы, зависят только от конфигурации системы (т.е. только от координат материальных точек) и сумма работ этих сил при перемещении системы из одного положения в другое не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы называются консервативными. В этом случае для системы материальных точек также можно ввести понятие потенциальной энергии системы, обладающей свойством (7):

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{8}$$

где A_{12} - полная работа консервативных сил, действующих на материальные точки системы при переходе ее из конфигурации 1 в конфигурацию 2; U_1 и U_2 - значения потенциальной энергии системы в этих конфигурациях.

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и его потенциальной энергией определяется по следующим формулам:

$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right] \tag{9}$$

или

$$\vec{F} = -grad\,U, \tag{10}$$

где $grad\,U$ – называется градиентом скалярной функции U; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей. Операцию взятия градиента часто записывают символически в виде

$$grad = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{11}$$

подразумевая что $grad$ является оператором, который действует на скалярные функции, зависящие от координат. Для оператора $grad$ также используется обозначение

$$\nabla \equiv grad.$$

При этом часто формулу (9) записывают также в виде $\vec{F} = -\nabla U$.

5. Примеры

Потенциальная энергия растянутой пружины. Обозначим через x растяжение пружины, т.е. разность длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях.

При возвращении пружины из деформированного состояния в недеформированное сила $\vec{F}$ совершает работу.

$$A = \int_x^0 F dx = -k\int_x^0 x dx = \frac{kx^2}{2}. \tag{12}$$

Таким образом, потенциальная энергия упруго деформированной пружины

$$U = kx^2/2. \tag{13}$$

Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. На рис. 5 изображены две материальные точки массы m_1 и m_2. Положение их характеризуется радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно. Элементарная работа, совершаемая силами гравитационного притяжения этих точек $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = \vec{F}_{12} d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} d\vec{r}_2$, где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй, а $\vec{F}_{21}$– сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой; согласно 3-му закону Ньютона $\vec{F}_{12}$=-$\vec{F}_{21}$; $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ – элементарные перемещения материальных точек. С учетом этого $\delta A = \vec{F}_{21} d\vec{r}_2 - \vec{F}_{21} d\vec{r}_1 = \vec{F}_{21} d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_{21} d\vec{r}$, где $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Учитывая, что $\vec{F}_{21}$ и $d\vec{r}$ противоположно направлены и что величина $F_{21} = Gm_1 m_2 / r^2$, находим $\delta A = \vec{F}_{21} d\vec{r} = F_{21} dr \cos\pi = -Gm_1 m_2 dr / r^2$.

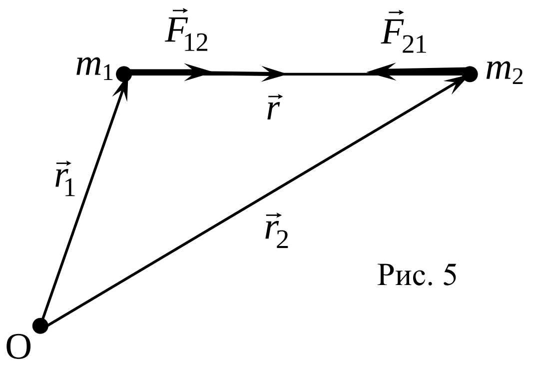

Рис. 5

Полная работа

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = -Gm_1 m_2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = G\frac{m_1 m_2}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} = G\frac{m_1 m_2}{R_2} - G\frac{m_1 m_2}{R_1}\ , \tag{14}$$

где R_1 и R_2 – начальное и конечное расстояние между материальными точками. Эта работа равна изменению потенциальной энергии $A = U_1 - U_2$. Учитывая (14), находим, что потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{R} \quad \text{или} \quad U = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{15}$$

где R или r – расстояние между материальными точками.

Потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести Земли. Формула (15) справедлива также для однородных сферических тел; в этом случае r – расстояние между центрами масс таких тел. В частности, потенциальная энергия тела массы m, находящегося в поле гравитации Земли, масса которой M,

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{16}$$

Изменение потенциальной энергии тела массы m, поднятого с поверхности Земли ($r = R$, где R – радиус Земли) на высоту h ($r = R + h$), согласно (16), равно:

$$\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{GMmh}{(R+r)R}. \tag{17}$$

Если $h<<R$, то в знаменателе формулы (17) можно пренебречь слагаемым h и она перейдет в известную формулу

$$\Delta U = G\frac{Mmh}{R^2} = mgh \quad \text{или} \quad U = mgh, \tag{18}$$

если потенциальную энергию на поверхности Земли принять равной нулю, где $G\dfrac{M}{R^2} = g$ – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Таким образом, формула (18) была получена в предположении, что сила тяжести (и ускорение силы тяжести) не изменяются с высотой h, т.е.

поле силы тяжести Земли однородно. Поэтому формула (18) является приближенной формулой, в отличие от строгой формулы (16).

6. Кинетическая энергия и закон ее изменения

Напишем уравнение движения материальной точки (частицы) массы *m*, движущейся под действием сил, результирующая которых равна $\vec{F}$: $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$.

Умножим скалярно правую и левую часть этого равенства на элементарное перемещение точки $d\vec{r}=\vec{V}dt$, тогда

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt=\vec{F}d\vec{r}\,. \qquad (19)$$

Так как $\vec{v}\cdot\vec{v}=v^2$, то легко показать, что $\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}=\frac{1}{2}\frac{d\left(v^2\right)}{dt}$. Используя последнее равенство и то обстоятельство, что масса материальной точки постоянная величина, преобразуем (1) к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt=\vec{F}d\vec{r}\,.$$

Проинтегрировав части этого равенства вдоль траектории частицы от точки 1 до точки 2, имеем:

$$\int_1^2\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}\,.$$

Согласно определению первообразной и формуле (4.3) для работы переменной силы, получим соотношение:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=A_{12}\,.$$

Величина

$$E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{p^2}{2m} \qquad (20)$$

называется кинетической энергией материальной точки.

Таким образом, мы приходим к формуле

$$A_{12}=E_{k2}-E_{k1}, \qquad (21)$$

из которой следует, **что работа результирующей всех сил, действующих на материальную точку, расходуется на приращение кинетической энергии этой частицы**. Это есть *закон изменения кинетической энергии материальной точки.*

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить:

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2}\,.$$

Напишем соотношение (3) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получим формулу, аналогичную (3), но для системы материальных точек.

$$A_{12}=E_{k2}-E_{k1}, \qquad (22)$$

где E_{k1} и E_{k2} – кинетические энергии системы, а под A_{12} необходимо понимать сумму работ всех сил, действующих на материальные точки системы.

Формула (22) представляет собой *закон изменения кинетической энергии механической системы* (системы материальных точек): **работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.**

7. Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим механическую систему (систему материальных точек), на которую действуют как консервативные так и неконсервативные силы. Найдем работу, которую совершают эти силы при перемещении системы из одной конфигурации в другую. Работа консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы U :

$$A_{12,\text{конс}} = U_1 - U_2 .$$

Работу неконсервативных сил обозначим посредством *A**. Согласно (22) суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической энергии системы E_k, следовательно, $A_{12} = A_{12,\text{конс}} + A_{12}^* = U_1 - U_2 + A_{12}^* = E_{k2} - E_{k1}$ или

$$\left(E_{k2} + U_2\right) - \left(E_{k1} + U_1\right)) = A_{12}^* .$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии представляет собой полную механическую энергию *E* системы:

$$E = E_к + U . \tag{23}$$

Таким образом

$$E_2 - E_1 = A_{12}^* . \tag{24}$$

Формула (24) выражает *закон изменения полной механической энергии*: **изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил, действующих на систему.**

Очевидно, что если неконсервативные силы в системе отсутствуют, т.е. $A_{12}^* = 0$, то ее полная механическая энергия остается постоянной (сохраняется) т.е. *E* = *const.* Это утверждение называют *законом сохранения механической энергии*. Он утверждает***:*** **полная механическая энергия системы материальных точек, находящихся под действием консервативных сил остается постоянной.**

В такой системе могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. При наличии неконсервативных сил (например, сил трения и сил сопротивления) механическая энергия системы не сохраняется, она уменьшается, что приводит к ее нагреванию. Такой процесс называется диссипацией (рассеянием) энергии. Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными.

8. Применение законов сохранения к соударениям тел

Рассмотрим применение законов сохранения механической энергии и импульса к расчету абсолютно упругого центрального удара двух тел.

Абсолютно упругим называют такой удар, в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии.

Пусть два абсолютно упругих шара с массами m_1 и m_2 до удара движутся поступательно со скоростями v_1 и v_2, направленными в одну и ту же сторону вдоль линии их центров, причем $v_1 > v_2$. Нужно найти скорости шаров u_1 и u_2 после соударения (рис. 6).

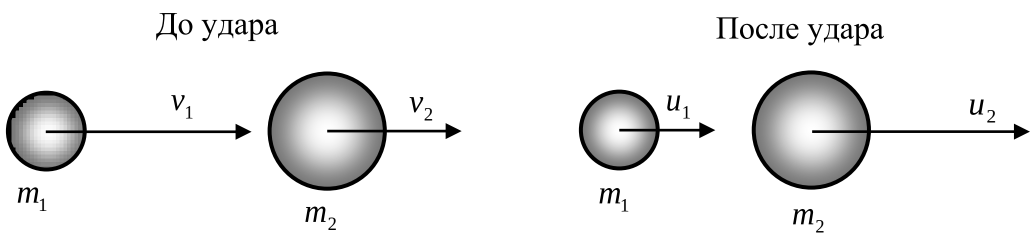

Рис. 6

В процессе удара систему соударяющихся тел можно считать замкнутой. При абсолютно упругом ударе она, кроме того, консервативна. Следовательно, для решения этой задачи можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и импульса. Перед ударом и после его завершения соударяющиеся тела не деформированы, т.е. потенциальную энергию системы в этих двух состояниях можно считать одинаковой и равной нулю. Тогда из закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \ . \tag{25}$$

По закону сохранения импульса

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \ . \tag{26}$$

При *прямом центральном ударе* векторы скоростей шаров до и после удара направлены вдоль одной прямой – линии удара. Поэтому из (26) следует, что

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 , \tag{27}$$

где v_1, v_2 , u_1 и u_2 – проекции векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ на ось координат, параллельную линии удара. Совместное решение уравнений (25) и (27) дает

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} , \qquad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \ . \tag{28}$$

В формулах (28) скорости v_1 и v_2 могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки в зависимости от направлений векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2 = m$). Тогда из выражения (28) следует, что

$$u_1 = v_2 , \ \ u_2 = v_1 ,$$

т.е. при ударе шары обмениваются скоростями.

2. Масса второго шара во много раз больше массы первого ($m_2 >> m_1$). Тогда

$$u_1 \approx 2 v_2 - v_1 , \quad u_2 \approx v_2 .$$

Если при этом второй шар до удара был неподвижен ($v_2 = 0$), то

$$u_1 = -v_1 , \qquad u_2 = 0 ,$$

т.е. первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону со скоростью $u_1 = -v_1$.

При *абсолютно неупругом ударе* потенциальная энергия деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон сохранения механической энергии не соблюдается. Из выражения (28), положив $u_1 = u_2 = u$, найдем скорость движения шаров после абсолютно неупругого удара:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$