Закон изменения и сохранения момента импульса

1. Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Пусть O – какая-либо точка, неподвижная в некоторой инерциальной системе отсчета. Будем называть ее полюсом и для определенности считать, что она есть начало некоторой декартовой системы координат. Пусть имеется материальная точка, которую мы обозначим через A и предположим, что на эту материальную точку действует сила $\vec{F}$. Обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор материальной точки, проведенный из точки O (Рис. 1) .

Моментом силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку, относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M = rF\sin\alpha = Fl, \tag{1}$$

α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; направление $\vec{M}$ выбирается так, чтобы последовательность векторов $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$ образовывала правовинтовую систему, т. е. если смотреть вдоль вектора $\vec{M}$, то поворот по кратчайшему пути от первого сомножителя в (1) ко второму осуществлялся по часовой стрелке, таким образом $\vec{M}$ совпадает с направлением поступательного движения правого буравчика (правого винта), рукоятка которого вращается от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ по наикратчайшему пути.

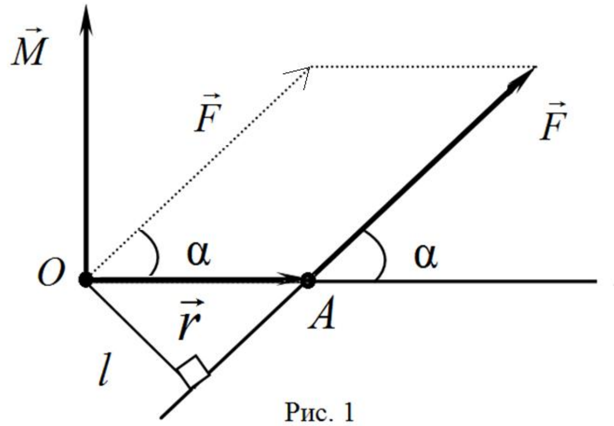


Рис. 1

Пусть имеются несколько материальных точек, нумеруемых индексом $i = 1,2,...,n$. Пусть $\vec{r}_i$- радиус-вектор материальной точки с номером i и на каждую такую точку действует сила $\vec{F}_i$. **Моментом $\vec{M}$ сил относительно точки O, действующим на такую систему материальных точек называется векторная сумма моментов сил, действующих на каждую материальную точку:**

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \tag{2}$$

Рассмотрим две материальные точки – 1 и 2 и предположим, что они действуют друг на друга силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые в соответствие с 3 законом Ньютона равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Поскольку эти силы действуют внутри системы материальных точек, то они являются *внутренними* силами. Вычислим момент этих сил:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1,$$

Поскольку равные и противоположно направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ действуют вдоль одной и той же прямой, то они коллинеарны с вектором $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, и поэтому момент пары таких сил равен нулю:

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = 0.$$

Мы приходим к важному выводу: **момент внутренних сил, действующих на любую систему материальных точек всегда равен нулю.**

Моментом импульса материальной точки относительно точки *O* называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{3}$$

Для системы n материальных точек **моментом импульса относительно точки *O* называется векторная сумма моментов импульсов этих точек относительно того же начала:**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \tag{4}$$

2. Закон изменения момента импульса.

Предположим, что точка O неподвижна. В случае одной материальной точки, дифференцируя (3), получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

При неподвижной точке O вектор скорости $\vec{v}$, равный $d\vec{r}/dt$, параллелен $\vec{p} = m\vec{v}$ вектору импульса и поэтому $(d\vec{r}/dt) \times \vec{p} = 0$. Кроме того по 2 закону Ньютона

$d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Таким образом $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$,

или

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{5}$$

Уравнение (5) есть **закон изменения момента импульса для одной материальной точк**и. Распространим его на систему материальных точек, для чего запишем уравнение (5) для каждой материальной точки механической системы, понимая под M момент всех действующих на нее сил, как внутренних так и внешних. Затем сложим все эти уравнения. Внутренние силы входят в систему попарно так, что $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ где $\vec{F}_{ik}$ – сила воздействия k-й материальной точки на i-ю. Кроме того, эти силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$, действуют вдоль одной и той же прямой. Момент таких двух сил, а значит и моменты всех внутренних сил равны нулю. В результате опять получается закон изменения момента импульса вида (5) но уже для системы материальных точек, в котором $\vec{L}$ определяется выражением (4), а $\vec{M}$ – выражением (2) для внешних сил, т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой ***закон изменения момента импульса механической системы,*** который формулируется следующим образом: **скорость изменения полного момента импульса механической системы равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему**.

Если мы выбираем прямоугольную систему координат с началом, совпадающим с полюсом *O*, то можем спроектировать уравнение (3) на координатные оси и тогда получим закон изменения момента импульса, записанный в координатах:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{\text{внеш}\,x}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_{\text{внеш}\,y}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_{\text{внеш}\,z}. \qquad (7)$$

Моментом силы, действующей на механическую систему, относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента силы относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси.

Соответственно, ***моментом импульса механической системы относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента импульса относительно любой точки на данной оси.***

Вычислим проекцию момента силы на ось Oz. Сделаем рисунок.

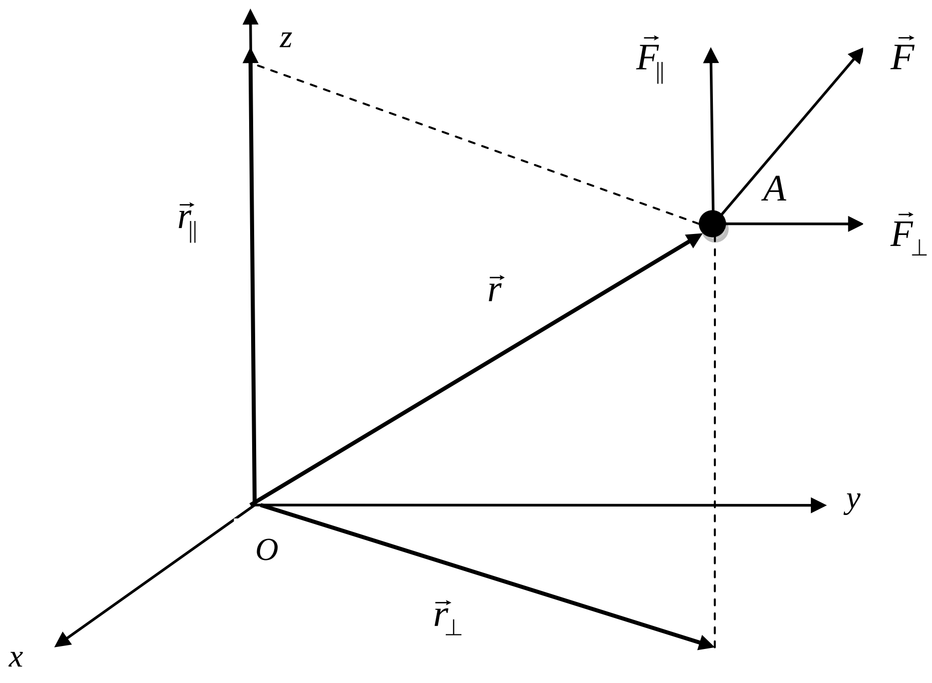


Рис. 2

Воспользуемся тем, что любой вектор можно представить в виде суммы взаимно перпендикулярных векторов. Представим:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel},$$

где $\vec{F}_{\perp}$ - составляющая вектора силы, перпендикулярная оси Oz, а $\vec{F}_{\parallel}$ - составляющая вектора силы, параллельная оси Oz (см. рисунок 2).
Точно также представим радиус-вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel},$$

где $\vec{r}_{\perp}$ - составляющая вектора $\vec{r}$, перпендикулярная оси Oz, а $\vec{r}_{\parallel}$ - составляющая вектора $\vec{r}$, параллельная оси Oz.

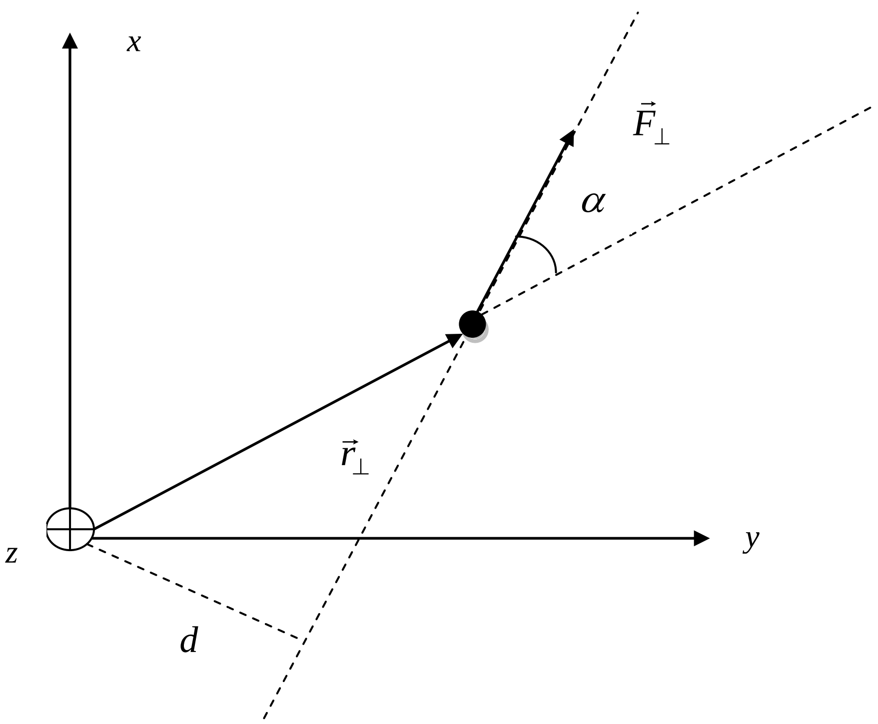
Вычислим момент силы:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}\right) \times \left(\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}\right) = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel}$$

Очевидно, что $\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel} = 0$, векторы $\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}$ и $\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp}$ перпендикулярны оси Oz, а вектор $\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}$ параллелен оси Oz. Таким образом, в проекцию M_z вектора $\vec{M}$ на ось Oz даст вклад только вектор $\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}$, при этом

$$\left|M_z\right| = \left|\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}\right|.$$

Вычислим $\left|M_z\right| = \left|\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}\right|$. Сделаем рисунок (вид в направлении оси Oz)



$$\left|M_z\right| = \left|\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}\right| = \left|\vec{r}_{\perp}\right|\left|\vec{F}_{\perp}\right|\sin\alpha = \left|\vec{F}_{\perp}\right| d$$

Здесь d есть плечо силы $\vec{F}_{\perp}$ или расстояние от линии действия силы $\vec{F}_{\perp}$ до оси вращения.
Таким образом, ***проекция момента силы на координатную ось по модулю равна произведению модуля составляющей силы, перпендикулярной оси, на плечо этой составляющей силы.***

3. Закон сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$ и, следовательно, согласно уравнению (6) вектор $\vec{L}$ не изменяется со временем, т.е. $\vec{L} = const$. Отсюда вытекает закон сохранения момента импульса, который гласит, что **момент импульса системы материальных точек остается постоянным, если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю**.

В частном случае, если система замкнута, то на нее не действуют внешние силы. В этом случае сумма моментов внешних сил, действующих на систему, тривиально равна нулю. Таким образом, момент импульса замкнутой системы также сохраняется.

Отметим, что если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, отлична от нуля ($\vec{M}_{\text{внеш}} \neq 0$), но равна нулю одна из проекций $\vec{M}_{\text{внеш}}$ на некоторую ось (например, на ось *Oz,* т.е. $M_{\text{внеш}\, z} = 0$) , то сохраняется проекция момента импульса системы на эту ось (т.е. $L_z = const$), хотя величина $\vec{L}$ как вектор не сохраняется.

4. Движение в поле центральных сил

Если на материальную точку действует сила вида

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (8)$$

то говорят, что материальная точка находится в поле центральных сил, если начало координат совпадает с центром сил.

Примерами материальных точек в таком поле являются искусственные спутники Земли.

Для центральных сил векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$ параллельны, поэтому **момент $\vec{M}$ центральной силы $\vec{F}$ относительно центра сил *O* всегда равен нулю.** Следовательно, при движении в центральном поле момент импульса материальной точки остается постоянным.

Вектор $\vec{L}$ всегда ортогонален плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{V}$. Поэтому постоянство направления $\vec{L}$ свидетельствует о том, что движение материальной точки в поле центральных сил происходит в одной плоскости.

Центральные силы всегда являются консервативными, поэтому при движении материальной точки сохраняется и полная механическая энергия точки, т. е.

$$E = E_k + U = const. \qquad (9)$$

Для гравитационного центрального поля большой массы *M* имеем

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} < 0.$$

Можно показать, что в этом случае траекторией материальной точки является эллипс, один из фокусов которого совпадает с центром силы, т. е. с положением центра массы M. Можно также показать, что при

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = 0$$

траекторией частицы является парабола, а при

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} > 0$$

ее траекторией является гипербола.