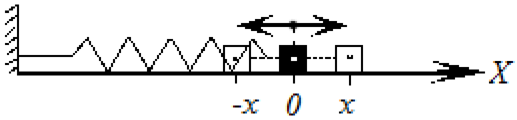
Механические колебания

1. Общие сведения о гармонических колебаниях

Изучим простейшую колебательную систему – тело (грузик) массы *m*, прикрепленное к пружине и скользящее без трения по горизонтальному столу (см. рисунок ниже). Такая система называется **пружинным маятником.**



Рассмотрим движение грузика пружинного маятника под действием приложенной силы. Отклонение обозначим через *x*, и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. В этом случае пружина действует на груз с упругой силой *F*, пропорциональной смещению x и направленной в сторону обратную смещению. В проекции силы на ось *Ox* мы имеем

$$F_x = -kx,$$

где k - коэффициент пропорциональности, называемый также жесткостью пружины. Под действием этой силы маятник начнет совершать колебания.

В физике встречаются силы иного происхождения, чем упругие, которые обнаруживают такую же закономерность, т. е. оказываются равными $F_x = -kx$, где k – постоянная положительная величина, x –одна из координат системы. Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть **квазиупругими.**

Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, под действием квазиупругой силы, называется классическим осциллятором. Таким образом, пружинный маятник является классическим осциллятором.

Промежуток времени, по истечению которого движение повторится, называется периодом колебания и обозначается T, $[T]$ = с.

Частота колебаний есть число полных колебаний за 1 с: $\nu = 1/T$**.** Частота измеряется в Гц. 1 Гц - это одно колебание за 1 с. В технике частоты измеряются также в килогерцах (1 кГц = 10^3 Гц), мегагерцах (1 Мгц = 10^6 Гц), гигагерцах (1ГГц = 10^9 Гц).

Выведем уравнение колебаний пружинного маятника. Напишем 2-й закон Ньютона в проекции на ось *Ox*: $F_x = ma_x$, где F_x определяется выражением $F_x = -kx$, а проекция ускорения есть $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$. В итоге получаем $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}\,.$$

Данное уравнение является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Оно называется **дифференциальным уравнением свободных гармонических колебаний.** Его решением будет функция:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta),$$

где A - амплитуда колебаний, т. е. наибольшее отклонение колеблющегося грузика от положения равновесия; оно задается начальными условиями при однократном приложении силы.

Поскольку значения как cos так и sin через 2π радиан повторяются, то можно найти связь между периодом T_0 и ω_0: $\omega_0(t+T) + \theta = \omega_0 t + \theta + 2\pi$, откуда

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu$$

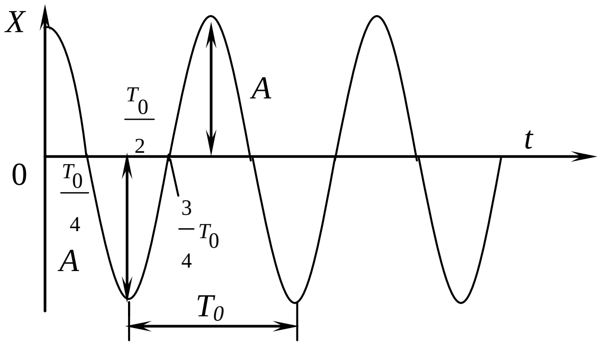
Величина ω_0 - называется собственной круговой частотой. Она равна числу полных колебаний за 2π секунд. Для вращательного движения круговая частота и величина угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$ совпадают.

Выражение $\omega_0 t + \theta$ называют фазой колебания. Она определяет смещение в данный момент времени *t*; θ – начальная фаза. Она характеризует смещение в начальный момент времени $t = 0$ и определяется начальными условиями, как и амплитуда *A*.

Пусть $\theta = 0$, тогда

$$x = A\cos(\omega_0 t) = A\cos\frac{2\pi}{T_0}t = A\cos(2\pi\nu_0 t).$$

График этого уравнения приведен на рисунке ниже:



Из уравнений выше следует, что период колебания $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ не зависит от амплитуды колебаний *A*. Скорость

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta)$$

пропорциональна амплитуде и круговой частоте, и отличается по фазе от смещения x на $\pi/2$. Максимальная скорость $v_м = A\omega_0$. Ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \theta) = -\omega_0^2 x$$

пропорционально A и ω_0^2, и по направлению совпадает с направлением силы $\vec{F}$, а по фазе отличается от скорости V на $\pi/2$, и от смещения x – на π. Максимальное ускорение $a_м = A\omega_0^2$.

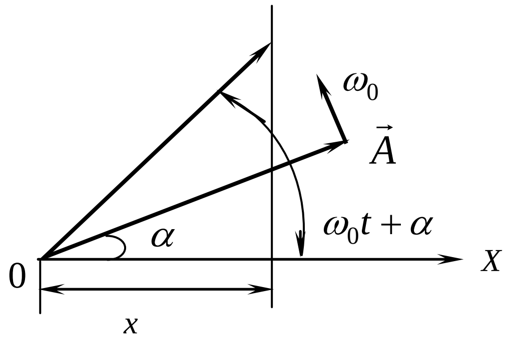
Простейшее периодическое колебание, при котором смещение изменяется со временем по закону косинуса или синуса, называется гармоническим колебанием.

2. Векторная диаграмма гармонического колебания

Гармоническое колебание

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

можно представить в виде проекции вектора $\vec{A}$, вращающегося против хода часовой стрелки с угловой скоростью, равной круговой частоте ω_0. Из рисунка



следует, что проекция вектора $\vec{A}$ на направление OX будет $x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$.

3. Комплексная форма представления гармонических колебаний

Как известно, комплексное число z представимо в форме

$$z = x + iy,$$

где x и y есть действительные числа, которые называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z (это обозначают как $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$), а число i называется мнимой единицей и оно записывается в форме:

$$i = \sqrt{-1}.$$

В теории комплексных чисел доказывается, так называемая, формула Эйлера, которая имеет вид:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

для любого действительного числа α.

Поэтому функцию, описывающую гармоническое колебание $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ можно описать, введя другую комплексную функцию

$$z = A\exp[i(\omega_0 t + \alpha)].$$

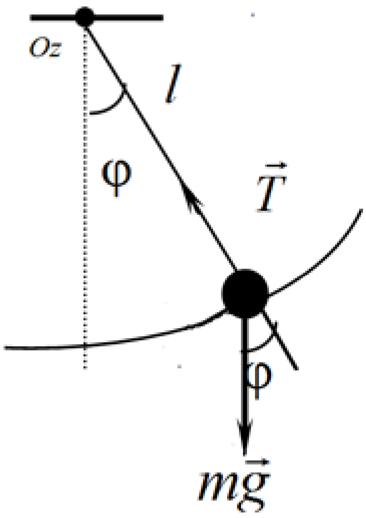
При этом вещественная часть этой функции представляет собой смещение x при гармоническом колебании $\operatorname{Re} z$

$$x = \mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

4. Математический маятник

Математический маятник - это материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити в поле силы тяжести.

Хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити (см. рисунок ниже).



При движении маятника шарик массой m совершает вращательное движение относительно оси Oz по окружности, радиуса l. Пусть φ угол отклонения шарика от положения равновесия (на рисунке угол отсчитываемый вправо считается положительным, а влево – отрицательным). На шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции нити $\vec{T}$. Сила тяжести к создает момент относительно оси вращения Oz, проекция которого на ось Oz равна

$$M_z = -mgl\sin\varphi,$$

а момент силы $\vec{T}$ относительно оси Oz равен нулю. Согласно основному закону динамики вращательного движения

$$J_z\varepsilon_z = M_z,$$

где ε_z есть проекция вектора углового ускорения на ось Oz, J_z есть момент инерции шарика. Поскольку шарик можно считать материальной точкой, то

$$J_z = ml^2.$$

Кроме того

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

и мы имеем

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

или

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi.$$

Для малых φ можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$ и тогда

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi.$$

Деля правую и левую части этого уравнения на l, получим:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Решением его для малых φ будет:

$$\varphi = \varphi_m\cos(\omega_0 t + \alpha) = \varphi_m\cos[(2\pi/T_0)t + \alpha],$$

где

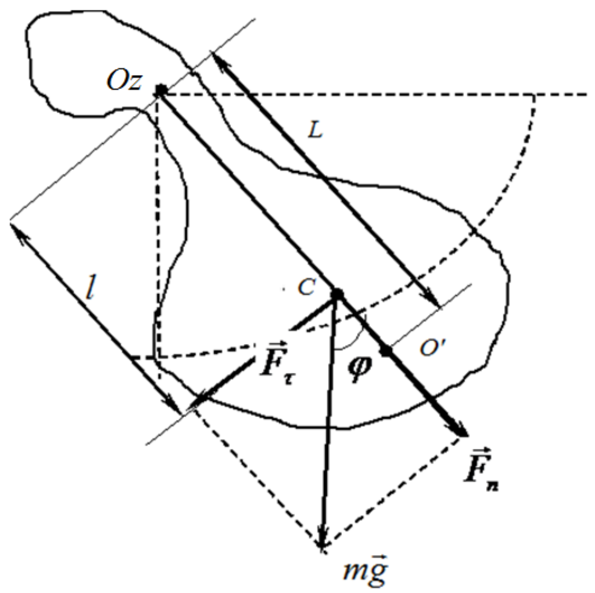
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Таким образом, период колебаний математического маятника T_0, не зависит от его массы и амплитуды колебаний.

5. Физический маятник

Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс *C* тела.

На маятник, отклоненный на малый угол φ (см. рисунок) действует момент силы $M_z = -mgl\sin\varphi$, который сообщает угловое ускорение $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$. Согласно основному закону динамики вращательного движения



$$J_z\varepsilon_z = M_z,$$

где ε_z есть проекция вектора углового ускорения тела на ось Oz, J_z есть момент инерции тела. Поскольку

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

то, обозначив $J_z = J$ имеем

$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0\sin\varphi = 0$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\,.$$

Для малых φ можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$ и тогда

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi.$$

Деля правую и левую части этого уравнения на *l*, получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0\,.$$

Решение этого уравнения есть

$$\varphi = \varphi_m\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Период колебания

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = \sqrt{\frac{L}{g}}\,,$$

где $L = \dfrac{J}{ml}$ - **приведенная длина физического маятника, то есть длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом**

колебания данного физического маятника. При этом точка O', расположенная на расстоянии L от точки O (см. рисунок), через которую проходит ось подвеса физического маятника, называется его **центром качаний**. Периоды колебаний относительно точек O и O' совпадают.

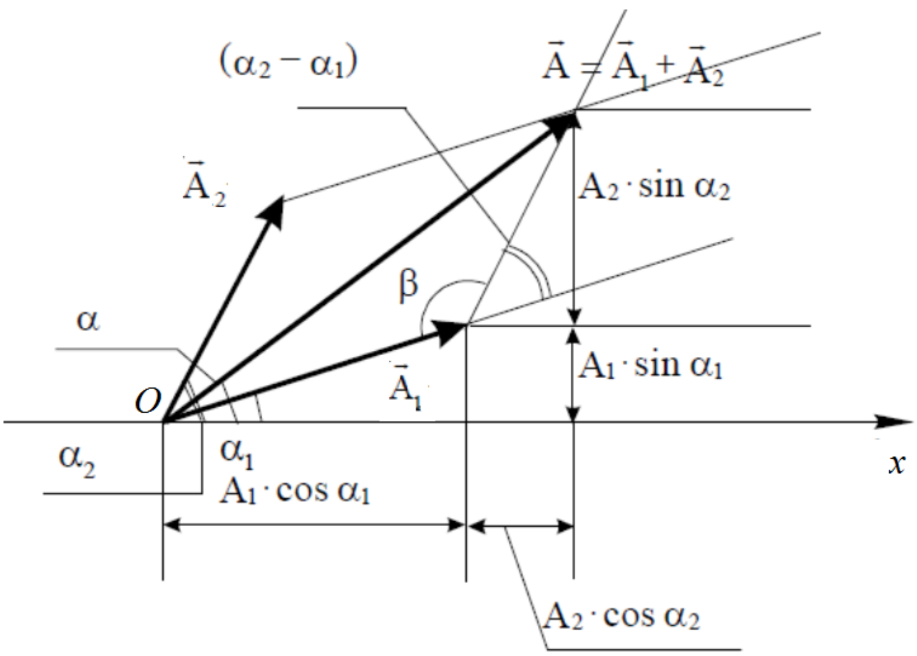
6. Сложение колебаний

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты.

Пусть материальная точка совершает одновременно два гармонических колебания в одном направлении по оси Ox. Пусть x_1 – смещение точки, вызванное первым колебанием и x_2 – смещение, вызванное вторым колебанием и $x = x_1 + x_2$ суммарное смещение точки. При этом

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_1),$$
$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

Представим оба колебания геометрически с помощью векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ (см. рисунок)



Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\vec{A}$. Легко видеть, что проекция этого вектора на ось X равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2$$

Следовательно, вектор $\vec{A}$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0, как и так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой A и начальной фазой α. Из построения видно, что по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Далее из рисунка видно (из прямоугольного треугольника)

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}.$$

При этом:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Проанализируем выражение для амплитуды. Если разность фаз обоих колебаний $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме A_1 и A_2. Если разность фаз $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ равна + π или - π, т. е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна разности A_1 и A_2.

7. Затухающие колебания

Рассмотри снова пружинный маятник. Предположим, что на материальную точку, закрепленной на конце невесомой пружины действует наряду с силой упругости также сила вязкого трения со стороны среды, пропорциональная скорости точки и направленная против скорости.

Пусть материальная точка движется по оси Ox. Тогда в проекции на ось Ox силы, действующие на точку равны

$$F_{упр,x} = -kx$$

$$F_{сопр,x} = -rv_x$$

где r – коэффициент вязкого трения. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox

$$ma_x = F_{сопр,x} + F_{упр,x}$$

Учитывая, что

$$a_x = \ddot{x},\ v_x = \dot{x},$$

запишем второй закон Ньютона в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},$$

или:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Тогда

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Последнее уравнение называется **дифференциальным уравнением затухающих гармонических колебаний**. Величина $\beta = \frac{r}{2m}$ называется **коэффициентом затухания**.

Для произвольных колебательных систем дифференциальное уравнение затухающих гармонических колебаний имеет вид:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 .$$

Здесь ξ – координата (для пружинного маятника) или угол (для математического маятника). Решение этого уравнения есть

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha),$$

где

$$A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

– циклическая частота *затухающих* колебаний.

Период затухающих колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Затухающие колебания – это пример квазипериодического процесса, так как в каждом периоде амплитуда уменьшается по закону (рисунок):

.

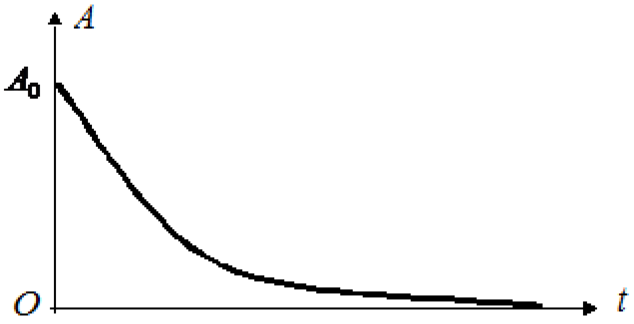


Рисунок. График зависимости амплитуды A затухающих колебаний от времени t

Пусть $\beta < \omega_0$. Тогда график зависимости $\xi(t)$ имеет вид

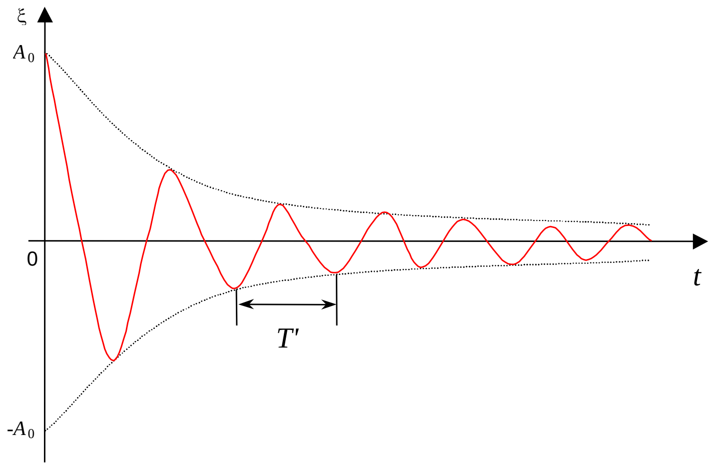


Рисунок. График затухающих колебаний

При $\beta = \omega_0$ – период колебаний обращается в бесконечность, то есть движение перестает быть периодическим.

При $\beta > \omega_0$ колебательная система, выведенная из положения равновесия, возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. При этом если при *t = 0* скорость колебаний $\upsilon_0 = 0$, то движение изображается кривой 1 на рисунке. Если при *t = 0* скорость колебаний отлична от нуля, то движение изображается кривой 2 на рисунке:

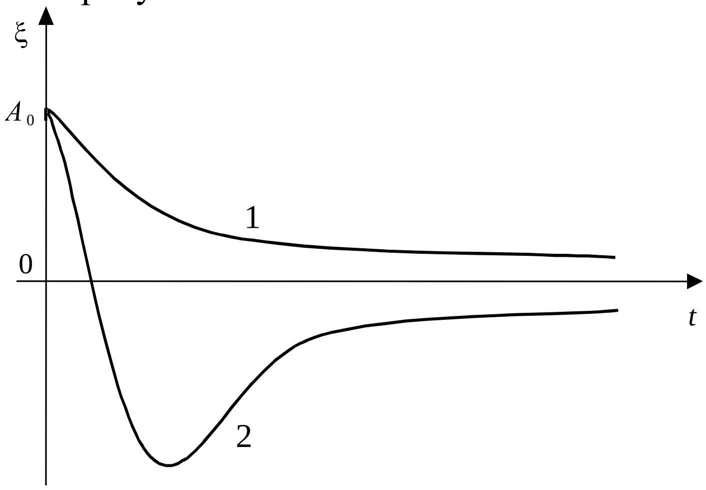


Рисунок. Графики апериодического режима затухающих колебаний

Затухающие колебания характеризуются следующими параметрами.

1. *Коэффициент затухания* β *и время релаксации.* Если за некоторое время τ_p амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз, то

$$\frac{A(0)}{A(\tau_e)} = e, \text{ или } \frac{A(0)}{A(0)\cdot e^{-\beta\cdot\tau_e}} = e .$$

Тогда $e = e^{\beta\cdot\tau_p}$, а, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{\tau_p},$$

где величина τ_p называется *временем релаксации.*

2. *Логарифмический декремент затухания λ.* Логарифмический декремент равен натуральному логарифму отношения амплитуд соседних колебаний, то есть отличающихся на один период *T*:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A(0)\exp(-\beta t)}{A(0)\exp(-\beta(t+T))} = \beta\cdot T$$

$$\lambda = \beta\cdot T = \frac{T}{\tau_p} = \frac{1}{N_e}.$$

Здесь N_e - число колебаний, в течение которых амплитуда убывает в *e* раз:

$$N_e = \frac{\tau_p}{T}$$

Физический смысл логарифмического декремента λ – величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз.

3. *Добротность Q.* Добротность определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

8. Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются колебания, происходящие под действием внешней переменной (периодической) силы, работа которой компенсирует потери энергии на преодоление трения (в механических колебательных системах).

Рассмотрим снова пружинный маятник. В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a},$$

$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F} = m\vec{a},$$

где

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cdot \cos\omega t$$

– внешняя периодическая сила, действующая на пружинный маятник в направлении оси Ox. В проекции на ось Ox

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cdot \cos\omega t,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos\omega t.$$

Вводя обозначения (как и в предыдущем параграфе) $\beta = \frac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ мы получаем ***дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний:***

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = f_0 \cdot \cos\omega t,$$

где

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

– приведенная сила.

Найдем решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний. Будем искать решение в виде

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)],$$

где $A(\omega)$ – амплитуда вынужденных колебаний, $\psi(\omega)$ – начальная фаза вынужденных колебаний. $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$ зависят от ω и являются неизвестными величинами и нам их предстоит найти. Подставим $x(t)$ в исходное дифференциальное уравнение и получим:

$$-A\omega^2\cos(\omega t-\psi)-2\beta A\omega\sin(\omega t-\psi)+\omega_0^2 A\cos(\omega t-\psi)=f_0\cos\omega t\ .$$

Перепишем последнее уравнение в виде:

$$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos(\omega t-\psi)+2\beta A\omega\cos\left(\omega t-\psi+\frac{\pi}{2}\right)=f_0\cos\omega t$$

Данная формула говорит нам о том, что в результате сложения двух гармонических колебаний $A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos(\omega t-\psi)$ и $2\beta A\omega\cos\left(\omega t-\psi+\frac{\pi}{2}\right)$ получается колебание $f_0\cos\omega t$. Тогда, согласно формулам сложения колебаний

$$f_0=A(\omega)\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\cdot\omega^2}$$

$$\mathrm{tg}0=\frac{A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin(-\psi)+2\beta A\omega\sin\left(-\psi+\frac{\pi}{2}\right)}{A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos(-\psi)+2\beta A\omega\cos\left(-\psi+\frac{\pi}{2}\right)}\ .$$

Из первого уравнения получаем

$$A(\omega)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\cdot\omega^2}}$$

Из второго уравнения имеем

$$0=\frac{-\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin(\psi)+2\beta\omega\cos(\psi)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos(\psi)-2\beta\omega\sin(-\psi)}\ ,$$

или

$$-\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin(\psi)+2\beta\omega\cos(\psi)=0,$$

откуда

$$\psi(\omega)=\arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\ .$$

9. Явление резонанса

Резонансом называют явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторому ее значению, называемому резонансной частотой $\omega_{рез}$.

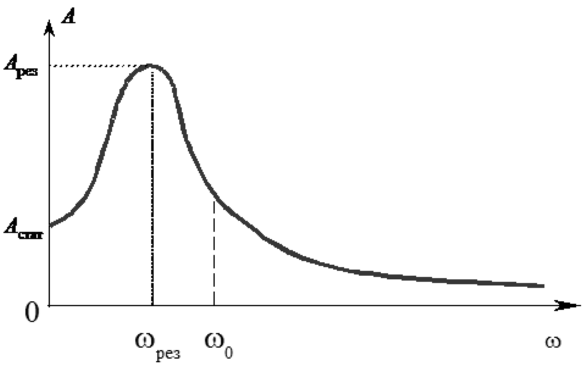


График функции *A = A(ω)* – (резонансная кривая) представлен на рисунке. Найдем частоту $\omega=\omega_{рез}$, при которой функция *A(ω)* достигает максимума. Максимум функции

$$A(\omega)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\cdot\omega^2}}$$

отвечает минимуму подкоренного выражения

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\cdot\omega^2 .$$

Вычисляя производную от последнего выражения по переменной ω и приравнивая ее к нулю получаем

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\cdot\omega^2\right)=-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\beta^2\cdot\omega=-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2-2\beta^2\right)=0 .$$

Отсюда

$$\omega_0^2-\omega^2-2\beta^2=0$$

или

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} .$$

Таким образом, частота, при которой наступает резонанс, (резонансная частота) равна

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} ,$$

Если $\omega\to 0$, то

$$A=\frac{f_0}{\omega_0^2}=\frac{F_0}{m\omega_0^2}=\frac{F_0}{k}=A_{стат} ,$$

здесь $A_{\text{стат}}$ – статическая амплитуда.

При $\omega\to\infty$ амплитуда вынужденных колебаний $A\to 0$.

При достижении резонансной частоты

$$\omega\to\omega_{\text{рез}}$$

амплитуда стремится к резонансной величине

$$A_{\text{рез}}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} ,$$

здесь $A_{\text{рез}}$ – резонансная амплитуда.

Семейство резонансных кривых при различных коэффициентах затухания представлено на рисунке ниже.

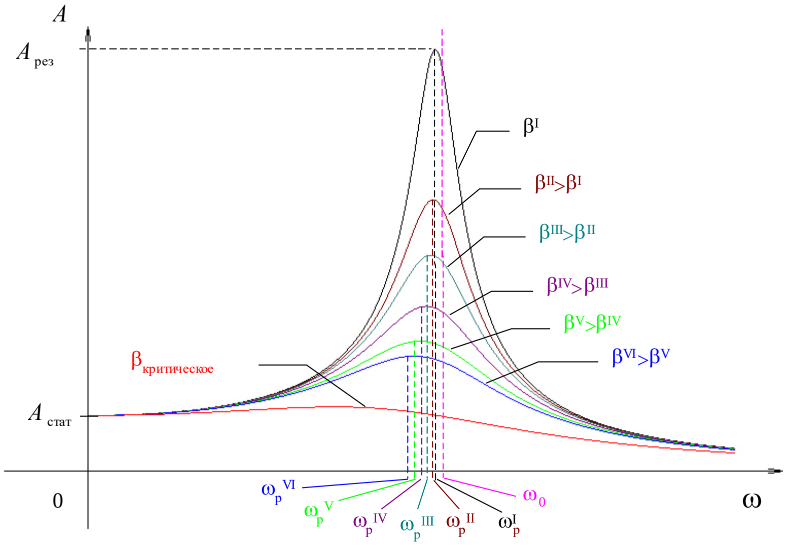


Рисунок. Амплитудно-частотные характеристики при различных коэффициентах затухания