Электрическое поле в вакууме.

1. Введение

Взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами осуществляется посредством электромагнитного поля, которое представляет собой совокупность двух взаимосвязанных силовых полей - электрического и магнитного. Раздел физической науки, в котором изучаются законы электромагнитного поля, называется *электродинамикой*.

Характерной особенностью электрического поля является то, что оно действует как на неподвижные, так и на движущиеся заряженные тела. Характерная особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся заряженные частицы (сила Лоренца, сила Ампера).

Электрическое поле неподвижных заряженных тел, осуществляющее взаимодействие между ними, называется *электростатическим полем*. Соответственно теория такого поля рассматривается в разделе электродинамики, называемом *электростатикой*. Силы, действующие на заряженные частицы со стороны электростатического поля, называются электростатическими силами.

Для того чтобы количественно охарактеризовать способность тел вступать в электрическое взаимодействие, в электродинамике введено понятие электрического заряда. *Электрический заряд* – это физическая величина, характеризующая свойство тел или частиц вступать в электрическое взаимодействие. Это понятие в электродинамике является основным, первичным (подобно точке в геометрии, алгоритму в информатике).

В природе существуют два рода электрических зарядов - положительные и отрицательные. Разноименно заряженные тела притягиваются, а одноименно заряженные отталкиваются друг от друга.

Опытным путем установлено, что электрический заряд обладает свойством дискретности, т.е. заряд q любого тела состоит из целого числа N *элементарных зарядов*, приближенно равных $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$ ($q = \pm Ne$). Носителями элементарного отрицательного и положительного зарядов являются соответственно электрон (масса покоя $9{,}11 \cdot 10^{-31}\ кг$) и протон (масса покоя $1{,}67 \cdot 10^{-27}\ кг$). Электроны и протоны входят в состав всех атомов и молекул. Элементарный заряд впервые был измерен Р.Э. Милликеном в 1909 г.

Система тел или частиц называется *электрически изолированной* или *замкнутой*, если между нею и внешними телами отсутствует обмен электрическими зарядами. В результате обобщения опытных данных был установлен фундаментальный закон природы – *закон сохранения электрического заряда*: алгебраическая сумма электрических зарядов любой электрически замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы, т.е.

$$\sum_{i-1}^{n} q_i = const,$$

где n – количество зарядов в системе.

Существующие в природе вещества можно разделить на две большие группы, отличающиеся друг от друга по своим электрическим качествам. Одни из них называются *проводниками*, а другие *диэлектриками* или *изоляторами*.

В атомах проводников (например, металлов) некоторые электроны слабо связаны с ядрами и поэтому могут легко покидать атомы. Такие электроны называются свободными. Свободные электроны постоянно перемещаются и находятся в беспорядочном движении внутри проводника. В процессе этого движения электроны сталкиваются с атомами, в результате чего ими выбиваются новые свободные электроны; места вылетевших электронов занимают электроны, вызвавшие это явление и т.д. Таким образом, проводниками называются вещества, по которым могут перемещаться свободные электрические заряды (электроны, положительные и отрицательные ионы). Хорошими проводниками электричества являются металлы, уголь, водные растворы солей и кислот.

Диэлектрики – вещества, в которых практически отсутствуют свободные электрические заряды. К ним относятся стекло, фарфор, резина, различные масла, некоторые виды пластмасс.

Во многих задачах электродинамики пользуются моделью точечного электрического заряда. *Точечный электрический заряд* – это заряженное тело, размерами и формой которого можно пренебречь в рассматриваемой задаче. Например, изучая электростатическое взаимодействие двух заряженных тел, их можно считать точечными зарядами, если размеры этих тел рамного меньше расстояния между ними.

Единица электрического заряда в СИ – *кулон* (Кл): 1 Кл – это электрический заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А.

2. Закон Кулона Основной закон электростатики

Закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов экспериментально установлен в 1785 г. французским физиком Ш. Кулоном с помощью крутильных весов. Поэтому силы электростатического взаимодействия часто называют кулоновскими силами. Этот закон формулируется следующим образом: *сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна произведению модулей этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой.*

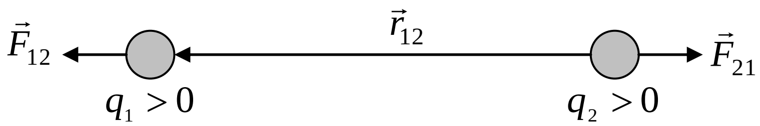
Закон Кулона в векторной форме записывается в виде

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

или

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r},$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2; $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1; $r = |\vec{r}_{12}|$; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц физических величин. На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, т.е. взаимодействие электрических точечных зарядов подчиняется третьему закону Ньютона (см рисунок).



В скалярной форме закон Кулона имеет следующий вид:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

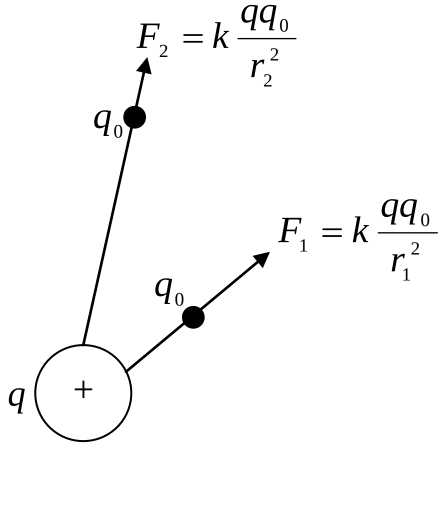
Коэффициент пропорциональности k в СИ равен

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Кл^2/(Н \cdot м^2)$, или $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$ – *электрическая постоянная*. Тогда $k = 9 \cdot 10^9 (Н \cdot м^2)/Кл^2$.

3. Электростатическое поле. Напряженность поля

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то между ними возникнет кулоновское взаимодействие. Следовательно, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует силовое поле, в данном случае электрическое поле, являющееся средой взаимодействия между зарядами. Так как рассматриваются неподвижные заряды, то поле, создаваемое ими, называется *электростатическим*.



Для обнаружения и исследования электростатического поля используется *пробный заряд* – такой точечный положительный заряд, который не искажает исследуемое поле, т.е. не вызывает в нем перераспределения зарядов (собственным полем пробного заряда пренебрегают). Если в поле, создаваемое зарядом q, в разных точках помещать пробный заряд q_0, то на него будет действовать сила $\vec{F}$, различная в этих точках поля и пропорциональная величине пробного заряда (см. рисунок). Однако отношение $\vec{F}/q_0$ не зависит от q_0 и характеризует электрическое поле в точке, куда помещен пробный заряд. Эта величина называется *напряженностью* и является *силовой характеристикой электростатического поля.*

Таким образом, *напряженность электростатического поля в данной точке есть векторная физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны поля на неподвижный единичный пробный заряд, помещенный в эту точку поля:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Как следует из этой формулы, напряженность поля точечного электрического заряда в вакууме

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

или в скалярной форме

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Электрическое поле называется *однородным*, если во всех его точках напряженность поля одинакова по модулю и направлению ($\vec{E} = const$, где $const$ в данном случае обозначает постоянный вектор).

Рассмотрим метод определения значения и направления вектора напряженности $\vec{E}$ в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, ..., q_n$,находящейся в вакууме. Очевидно, что результирующая сила $\vec{F}$, действующая со стороны поля на пробный заряд q_0, равна векторной сумме сил $\vec{F}_i$, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i.$$

Поскольку $\vec{F} = q_0\vec{E}$ и $\vec{F}_i = q_0\vec{E}_i$, где $\vec{E}$ напряженность результирующего поля, $\overline{E}_i$ – напряженность поля, создаваемого зарядом q_i. Поэтому получим:

$$q_0\vec{E} = q_0\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i,$$

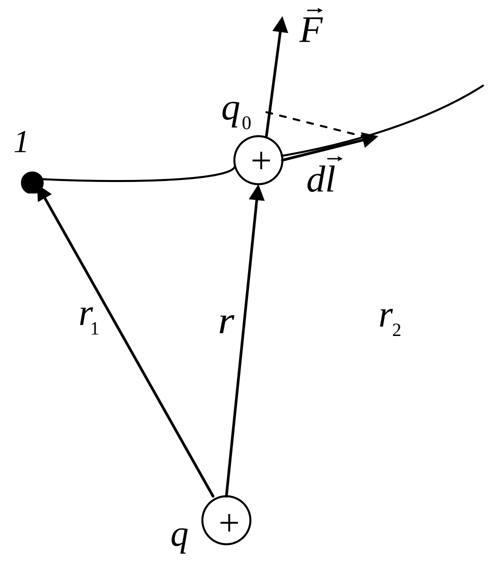
или

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i.$$

Последняя формула выражает *принцип суперпозиции* (наложения) электростатических полей, согласно которому напряженность результирующего поля, создаваемого в данной точке пространства системой зарядов или заряженных тел, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности.

4. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал поля

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки *1* в точку *2* вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд q_0 (см. рисунок), то кулоновская сила $\vec{F}$, приложенная к заряду, совершает работу. Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равн:



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F\cos\alpha\, dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\alpha \cdot dl$$

(здесь α есть угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{l}$). Так как $\cos\alpha\, dl = dr$ то $dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr.$

Работа при перемещении заряда q_0 из точки *1* в точку *2* определяется выражением:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

т.е. не зависит от траектории перемещения заряда, а определяется только положениями начальной *1* и конечной *2* точек. Следовательно, *электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а кулоновские силы – консервативными силами*.

Из последней формулы следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути *L*, равна нулю, т.е.

$$\oint_L dA = 0.$$

Если в качестве заряда, переносимого в электростатическом поле, взять единичный точечный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении $d\vec{l}$ будет равна $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\cos\alpha \cdot dl,$ где $E\cos\alpha -$ проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения. Тогда последнюю формулу можно записать в виде

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E\cos\alpha \cdot dl = 0.$$

Этот интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности*. *Следовательно, циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.* Это утверждение называется **теоремой о циркуляции электростатического поля**. Силовое поле, обладающее данным свойством, является *потенциальным*.

Тело, находящееся в потенциальном поле сил, в частности, в электростатическом поле, обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа. Поэтому работу кулоновских сил можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд q_0 в начальной и конечной точках поля заряда q:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2} = U_1 - U_2 .$$

Таким образом, потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q равна

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, которая определяется из граничных условий. При $r \to \infty$ потенциальная энергия $U = 0$ и $C = 0$. Следовательно, потенциальная энергия заряда q_0, находящегося в поле заряда q на расстоянии r от него, равна:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r}.$$

Если поле создается системой из n точечных зарядов $q_1, q_2, ..., q_n$, то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом q_0, равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия U заряда q_0, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий U_i в полях, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}.$$

Отношение U / q_0, которое называется *потенциалом* и является *энергетической характеристикой электростатического поля:*

$$\varphi = \frac{U}{q_0}.$$

Таким образом, *потенциал в какой-либо точке электростатического поля есть физическая скалярная величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.*

Как нетрудно видеть, потенциал точки поля точечного заряда q

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

где r – расстояние от заряда до заданной точки.

Работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению заряда q_0 из точки 1 в точку 2 может быть представлена как

$$A_{12} = U_1 - U_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2),$$

т.е. работа кулоновских сил численно равна произведению величины перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках поля. Из последней формулы следует, что *разность потенциалов двух точек электростатического поля – это физическая скалярная величина, определяемая работой, совершаемой кулоновскими силами при перемещении единичного положительного заряда из одной точки в другую.* Из этой формулы вытекает формула, связывающая напряженность электрического поля и потенциал

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \,,$$

где интеграл берется по любому пути, соединяющему точки 1 и 2.

Если перемещать заряд q_0 из произвольной точки за пределы поля, т.е. в бесконечность, где по условию потенциал равен нулю, то, согласно определению потенциала, работа сил электростатического поля $A_\infty = q_0\varphi$, откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Таким образом, *потенциал – это физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.*

Единица потенциала – *вольт* (В): 1 В – это потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией в 1 Дж.

Если электростатическое поле создается несколькими зарядами, то потенциал точки поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

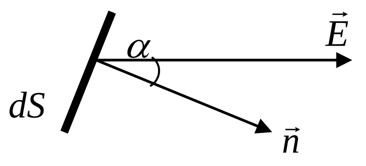
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}.$$

5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Вычисление напряженности поля большой системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно существенно упростить, используя теорему Гаусса. Эта теорема определяет *поток вектора напряженности* электрического поля через произвольную замкнутую поверхность.

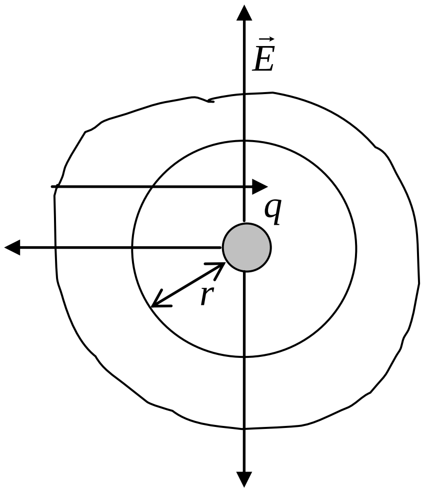
Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора напряженности $\bar{E}$ через эту поверхность определяется выражением

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS,$$



где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\bar{n}$ к площадке dS (см. рисунок слева); $d\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали к площадке (т. е. $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$).

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса r, охватывающую точечный заряд q, находящийся в ее центре (см рисунок справа). В соответствии с формулой для Φ_E поток вектора напряженности сквозь эту поверхность будет равен:



$$\Phi_E = \oint_S E_n dS =$$

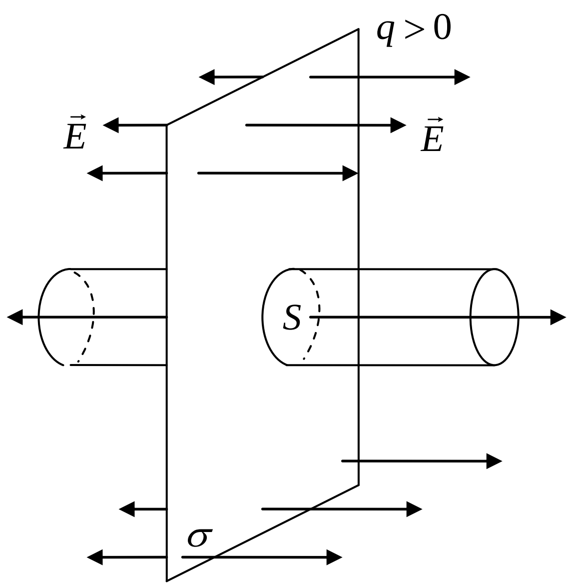
$$= \oint_{4\pi r^2} E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Можно показать, что этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы: если окружить рассматриваемую сферу произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Рассмотрим теперь общий случай произвольной замкнутой поверхности, окружающей n зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность $\vec{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна векторной сумме напряженностей $\vec{E}_i$ полей, обусловленных каждым зарядом в отдельности; поэтому поток вектора напряженности результирующего поля будет равен:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}.$$

Согласно последней формуле, каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен q_i / ε_0. Следовательно,



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

т.е. *поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную.* Это и есть **теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля**.

Применим теорему Гаусса для определения напряженности поля равномерно заряженной бесконечной плоскости. В этом случае ее поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

одинакова в любом месте плоскости. Это означает, что линии напряженности перпендикулярны плоскости в любой точке, т.е. поле заряженной плоскости однородно (см. рисунок). Мысленно выделим в пространстве цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости и одно из оснований проходит через интересующую нас точку. Согласно теореме Гаусса,

$$\varPhi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, так как линии напряженности пересекают только основания цилиндра, поток вектора $\bar{E}$ можно выразить через напряженность электрического поля у обоих оснований цилиндра, т.е.

$$\varPhi_E = 2ES.$$

Тогда

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Приведем (без вывода) выражения для расчета напряженности электростатического поля, образованного некоторыми другими заряженными телами:

1. Напряженность поля, создаваемого разноименно заряженными параллельными бесконечно протяженными плоскостями (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

2. Напряженность поля, образованного равномерно заряженным шаром

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R, \\ \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r < R \end{cases}$$

где q – заряд шара радиуса R; r – расстояние от центра шара до точки поля.

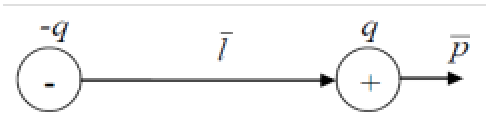
3. Напряженность поля равномерно заряженной бесконечно длинной нити (цилиндра)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

где $\tau = \dfrac{dq}{dl}$ – линейная плотность заряда на нити (заряд, приходящийся на единицу длины); r – расстояние от нити до точки поля.

6. Электрический диполь

Электрический диполь – это система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми значительно меньше расстояний до рассматриваемых точек поля.



Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется *плечом диполя* $\vec{l}$ (см. рисунок). Вектор

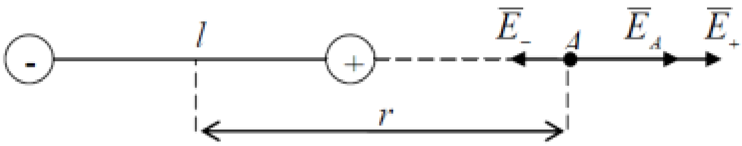
$$\vec{p} = |q|\vec{l},$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению величины заряда на плечо, называется *электрическим моментом диполя* $\vec{p}$ или дипольным моментом.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля диполя в произвольной точке

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+, \vec{E}_-$ – напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами диполя. В качестве примера рассчитаем напряженность поля на продолжении оси диполя (в точке *A* на рисунке).



В данном случае вектор напряженности результирующего поля в точке *A* направлен по оси диполя и по модулю равен

$$E_A = E_+ - E_-.$$

Обозначив расстояние от точки *A* до середины оси диполя через *r*, воспользовавшись формулой для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом, можно записать:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r - l/2)^2} - \frac{q}{(r + l/2)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r + l/2)^2 - (r - l/2)^2}{(r - l/2)^2 \cdot (r + l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя $l/2 << r$, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля, создаваемого диполем, прямо пропорциональна дипольному моменту диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния до центра диполя.