

Электрическое поле в диэлектриках и проводниках

1. Диэлектрики в электростатическом поле.

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Диэлектриками называют вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. Согласно представлениям классической физики в диэлектриках в отличие от проводников нет свободных зарядов – заряженных частиц, которые могли бы прийти под действием электрического поля в упорядоченное движение и образовать электрический ток. К диэлектрикам относятся все газы, если они не подвергаются ионизации, некоторые жидкости (бензол, растительные и синтетические масла) и твердые вещества (фарфор, стекло, парафин, кварц и др.). Удельное электрическое сопротивление диэлектриков $\rho \sim 10^6 - 10^{15}$ Ом·м, тогда как у металлических проводников $\rho \sim 10^{-8} - 10^{-6}$ Ом·м.

Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны, т.е. суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. Тем не менее, молекулы обладают электрическими свойствами. Приблизительно молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом $\vec{p} = q\vec{l}$, где q – суммарный положительный заряд всех атомных ядер в молекуле;

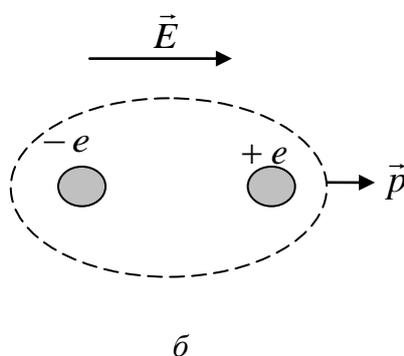
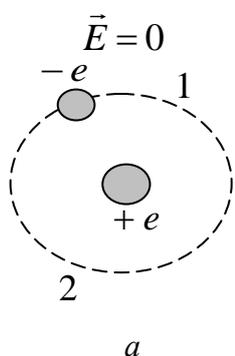


Рис. 1.

\vec{l} вектор, проведенный из «центра тяжести» электронов в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомных ядер. Чтобы понять, как незаряженный диэлектрик создает электрическое поле, рассмотрим электрические свойства нейтральных

атомов и молекул. Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Если рассмотреть простейший атом – атом водорода, то у него положительный заряд сосредоточен в ядре, вокруг которого с большой скоростью вращается электрон (рис. 1, а). Один оборот вокруг ядра он делает за время порядка 10^{-15} с. Поэтому, например, за время 10^{-9} с электрон успевает совершить миллион оборотов ($T = 10^{-15}$ с, $N = \frac{t}{T} = 10^6$), т.е. миллион раз побывать в двух любых точках 1 и 2, расположенных симметрично относительно ядра. Следовательно, можно считать, что в среднем по времени центр распределения отрицательного заряда приходится на середину атома, т.е. совпадает с центром распределения положительного ядра.

Диэлектрик называется *неполярным*, если в отсутствие внешнего электрического поля центры распределения положительных и отрицательных зарядов в молекулах совпадают ($\vec{l} = 0$) и дипольные моменты равны нулю.

Если поместить неполярный диэлектрик (бензол, парафин, полиэтилен, N₂, H₂, O₂ и др.) во внешнее электрическое поле напряженностью \vec{E} , то происходит деформация электронных оболочек атомов и молекул (рис. 1, б): положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны и центры распределения этих зарядов перестают совпадать ($\vec{l} \neq 0$). Такие деформированные молекулы можно рассматривать как электрические диполи, оси которых направлены вдоль поля.

Таким образом, неполярная молекула диэлектрика приобретает во внешнем электрическом поле индуцированный (наведенный) дипольный момент \vec{p} , пропорциональный напряженности внешнего поля

$$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E},$$

где α – полярзуемость молекулы, зависящая только от ее объема. Неполярная молекула подобна *упругому диполю*, длина плеча которого пропорциональна растягивающей силе, т.е. пропорциональна напряженности \vec{E} внешнего электрического поля.

Рассмотрим теперь молекулу поваренной соли NaCl. Атом Na имеет во

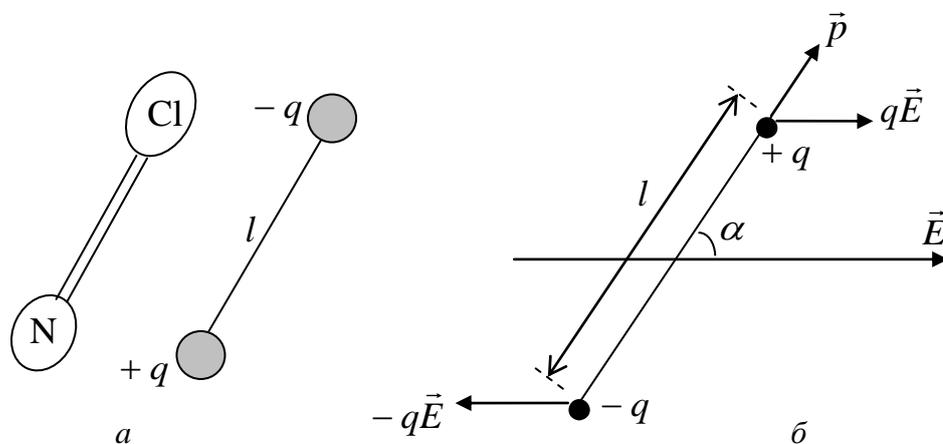


Рис. 2.

внешнем электронном слое один валентный электрон, у атома Cl семь валентных электронов. При образовании молекулы единственный валентный электрон Na захватывается атомом Cl и оба нейтральных атома превращаются в систему из двух ионов с противоположными знаками. Положительный и отрицательный заряды не распределены теперь симметрично по объему молекулы (рис. 2, а).

Диэлектрик называется *полярным*, если он состоит из молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают даже в отсутствие внешнего электрического поля ($\vec{l} \neq 0$). К полярным диэлектрикам относятся фенол, нитробензол и др.

Во внешнем электрическом поле напряженностью \vec{E} полярная молекула диэлектрика также деформируется, однако эта деформация незначительна и можно считать, что полярная молекула по своим свойствам подобна *жесткому диполю*, у которого имеется постоянный по модулю электрический момент ($\vec{p} = const$).

В однородном внешнем поле (рис. 2, б) на жесткий диполь действует пара сил $q\vec{E}$ и $-q\vec{E}$, момент которой по модулю равен

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

Вектор этого момента пары сил равен

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Этот момент стремится развернуть диполь так, чтобы его электрический момент \vec{p} совпал по направлению с вектором напряженности поля \vec{E} . Такая ориентация диполя соответствует состоянию его устойчивого равновесия в однородном электростатическом поле.

Помимо рассмотренных двух групп различают *кристаллические* диэлектрики, имеющие ионную структуру, или *слабополярные* диэлектрики. К ним относятся KCl, CsCl и др.

Смещение положительных и отрицательных зарядов диэлектрика во внешнем электрическом поле называется *поляризацией*. Другими словами, при внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле в любом макроскопически малом объеме вещества ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называется *поляризованным*.

В зависимости от строения молекул диэлектрика различают три вида поляризации.

1. *Электронная (деформационная) поляризация*. Она наблюдается у неполярных диэлектриков. Под действием внешнего поля у молекул диэлектриков этого типа возникают индуцированные дипольные моменты $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 E$, направленные вдоль поля, т.е. по направлению вектора \vec{E} (рис. 1, б). Время установления этой поляризации порядка 10^{-15} с.

2. *Дипольная (ориентационная) поляризация*. Она наблюдается у полярных диэлектриков. Внешнее электрическое поле стремится ориентировать дипольные моменты полярных молекул – жестких диполей – по направлению вектора напряженности поля. Этому препятствует хаотическое тепловое движение молекул, вызывающее беспорядочный разброс диполей. В итоге совместного действия поля и теплового движения возникает преимущественная ориентация дипольных электрических моментов вдоль поля, возрастающая с увеличением напряженности \vec{E} и с уменьшением температуры. Эта поляризация устанавливается за время порядка 10^{-10} с.

3. *Ионная поляризация*. Она происходит в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку. Внешнее электрическое поле вызывает в таких диэлектриках смещение всех положительных ионов в направлении вектора

напряженности \vec{E} поля, а всех отрицательных ионов – в противоположную сторону. Это происходит за время порядка 10^{-13} с.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор \vec{P} , называемый *поляризованностью* или *вектором поляризации*, равный отношению дипольного момента малого объема диэлектрика к этому объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{ei}, \quad (1)$$

где \vec{p}_{ei} – электрический дипольный момент i -молекулы; n – общее количество молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть столь малым, чтобы в его пределах электрическое поле можно было считать однородным.

В пределах малого объема ΔV все молекулы *неполярного* диэлектрика приобретают в электрическом поле одинаковые индуцированные электрические моменты \vec{p}_e . Поэтому поляризованность неполярного диэлектрика в электрическом поле напряженностью \vec{E} равна

$$\vec{P} = n_0 \vec{p}_e = n_0 \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2)$$

где n_0 – концентрация молекул ($n_0 = n / \Delta V$); $\chi = n_0 \alpha$ – безразмерная величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью* неполярного диэлектрика ($\chi > 0$).

Поляризованность *полярного* диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{ei} = n_0 \vec{p}_{e\text{cp}},$$

где $\vec{p}_{e\text{cp}}$ – среднее значение вектора дипольного момента для всех n молекул, содержащихся в малом объеме ΔV диэлектрика. Векторы \vec{p}_{ei} молекул – жестких диполей – одинаковы по модулю и отличаются только ориентациями в поле. В очень сильном электрическом поле и при достаточно малой температуре электрические моменты \vec{p}_{ei} всех молекул располагаются практически параллельно вектору \vec{E} . При этом поляризованность полярного диэлектрика достигает максимального значения:

$$P_{\text{max}} = n_0 p_e.$$

В результате поляризации на гранях диэлектрика появляются заряды, не компенсированные соседними диполями. Это приводит к тому, что на одной его поверхности возникают положительные заряды, а на другой – отрицательные. Эти электрические заряды называют *связанными*.

Внесем в однородное внешнее электростатическое поле \vec{E}_0 , создаваемое двумя

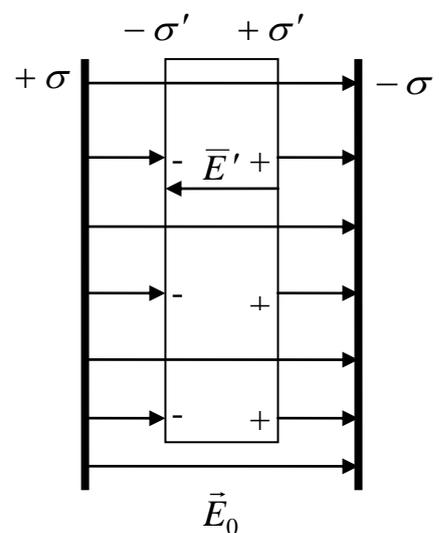


Рис. 3.

бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, пластинку из однородного диэлектрика (рис. 3). Под влиянием поля диэлектрик поляризуется, т.е. происходит смещение зарядов – положительные смещаются вдоль поля, отрицательные – против поля. В результате на правой грани диэлектрика будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на левой грани – избыток отрицательного заряда с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Так как поверхностная плотность связанных зарядов σ' меньше плотности σ свободных зарядов плоскостей, то не все поле \vec{E}_0 компенсируется полем зарядов диэлектрика. Таким образом, поляризация диэлектрика вызывает ослабление в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем. Вне диэлектрика поле $\vec{E} = \vec{E}_0$.

Следовательно, появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного поля напряженностью \vec{E}' (поля, создаваемого связанными зарядами), которое направлено против внешнего поля \vec{E}_0 (поля, создаваемого свободными зарядами) и ослабляет его. Модуль напряженности результирующего поля внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя протяженными заряженными плоскостями, определяется по формуле $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$, поэтому

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов σ' . С одной стороны, согласно (1) полный дипольный момент пластинки диэлектрика $p = PV = PSd$, где S – площадь пластинки, d – ее толщина. С другой стороны, полный дипольный момент равен произведению связанного заряда каждой грани $q' = \sigma'S$ на расстояние d между ними, т.е. $p = \sigma'Sd$. Таким образом, $PSd = \sigma'Sd$, или

$$\sigma' = P, \quad (4)$$

т.е. поверхностная плотность связанных зарядов σ' равна поляризованности.

Подставив в (4) выражение (3) и учитывая формулу (2), согласно которой $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$, получим:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E,$$

откуда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (6)$$

называется *диэлектрической проницаемостью среды*. Из (5) следует, что ε показывает, во сколько раз электрическое поле ослабляется диэлектриком, количественно характеризуя свойство диэлектрика поляризоваться во внешнем поле.

Как следует из формулы (5) напряженность электростатического поля зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля обратно пропорциональна ε . Вектор напряженности \vec{E} , переходя через границу диэлектриков, изменяется скачком, создавая затруднения при расчете электростатических полей. Поэтому помимо вектора напряженности \vec{E} , для характеристики поля вводят еще одну величину – **вектор электрического смещения** (или **вектор электрической индукции**) \vec{D} , который связан с вектором напряженности в электрически изотропной среде соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (7)$$

Так как в (7) $\varepsilon \vec{E} = \vec{E}_0$, то $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0$, т.е. электрическое смещение внутри диэлектрика совпадает с электрическим смещением внешнего поля \vec{D}_0 .

Что характеризует вектор электрического смещения? Электрическое поле в диэлектрике создается как свободными, так и связанными зарядами. Вектор напряженности \vec{E} характеризует результирующее поле. Однако первичным источником электрического поля в диэлектрике являются свободные заряды, так как поле связанных зарядов возникает в результате поляризации диэлектрика при помещении его в поле системы свободных зарядов. В свою очередь, поле связанных электрических зарядов может вызвать перераспределение свободных зарядов и соответственно изменить их поле. Поэтому вектор \vec{D} характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

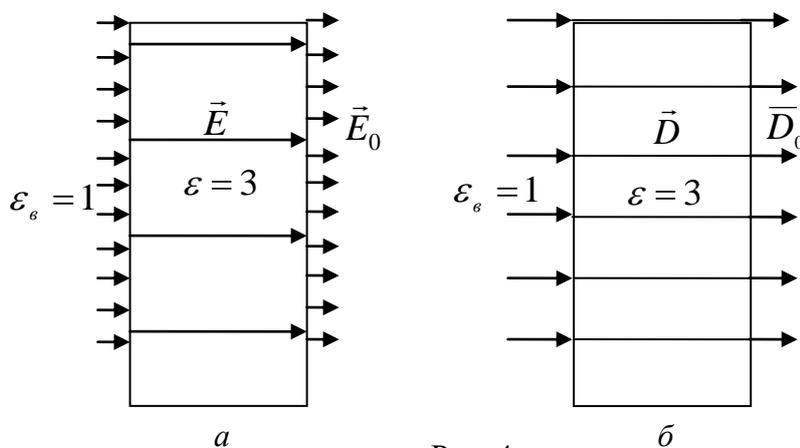


Рис. 4.

Поле \vec{D} графически изображается *линиями электрического смещения* – линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором электрического смещения. Линии вектора \vec{E} могут начинаться и

заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных, в то время как линии вектора \vec{D} - только на свободных зарядах. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии электрического смещения проходят не прерываясь.

Как следует из рис. 4, линии напряженности претерпевают разрыв на границе диэлектрик – вакуум (а), а линии электрического смещения остаются непрерывными (б). Непрерывность линий электрического смещения облегчает вычисление \vec{D} при заданном распределении зарядов.

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике формулируется следующим образом: *поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов, т.е.*

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_{i\text{св}}. \quad (8)$$

Доказательство этой теоремы мы в данной лекции не приводим.

2. Проводники в электростатическом поле. Конденсаторы

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле, то это поле будет действовать на свободные заряды проводника, в результате чего они начнут перемещаться – положительные вдоль поля, отрицательные – против поля (рис. 5, а). На одном конце проводника будет накапливаться избыток положительного заряда, на другом конце – избыток отрицательного заряда. Процесс происходит до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль (рис. 5, б).

Отсутствие поля внутри проводника ($\vec{E} = -\text{grad}\varphi = 0$) означает, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен, т.е. поверхность проводника в электростатическом поле является эквипотенциальной. Отсюда же вытекает, что вектор \vec{E} поля направлен по нормали к каждой точке поверхности проводника.

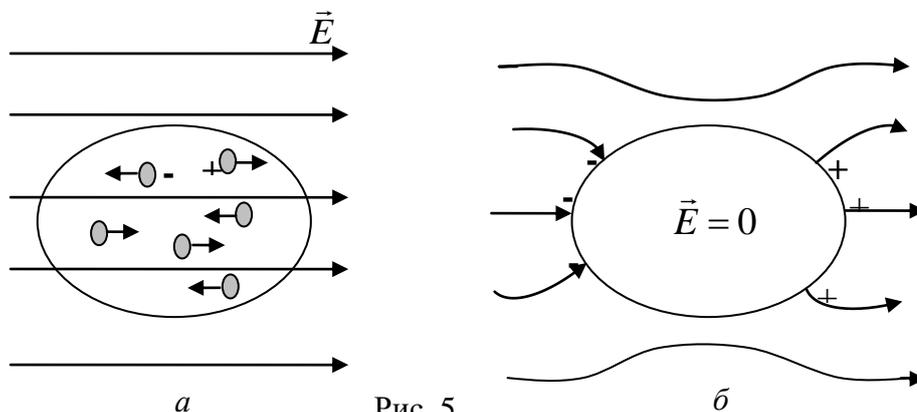


Рис. 5.

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности: они заканчиваются на отрицательных наведенных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах. Индуцированные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется *электростатической индукцией*.

Рассмотрим *уединенный проводник*, т.е. проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Чем больше заряд проводника, тем больше напряженность поля, которое он создает вблизи. Можно показать, что потенциал проводника прямо пропорционален заряду проводника, при этом потенциал также будет зависеть от формы и размеров проводника. Поэтому для уединенного проводника можно записать

$$\varphi \sim q,$$

или

$$q = C\varphi, \quad (9)$$

где коэффициент пропорциональности

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (10)$$

называют *электрической емкостью* (или *емкостью*) проводника. *Емкость уединенного проводника есть физическая скалярная величина, характеризующая способность проводника накапливать электрические заряды.* Емкость проводника также зависит от его формы и его размеров.

Так как заряды распределяются на внешней поверхности проводника, емкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния и наличия полостей внутри проводника.

Единицей емкости в СИ является *фарад* (Φ): 1 Φ – это емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Можно легко показать, что потенциал уединенного шара радиуса R , находящегося в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε , равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Действительно, используя формулу для потенциала $\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr$ и формулу

$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2}$ для напряженности поля шара в точке, находящейся на расстоянии

r от его центра, получаем

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{r} \Big|_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

Используя формулу (10), можно найти емкость шара:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

Отсюда следует, что емкостью в 1 Φ обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0\epsilon} = \frac{1\Phi}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi / м} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км},$$

что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (электрическая емкость Земли примерно 0,7 миллифард). Следовательно, фард – очень большая величина, поэтому на практике используются дольные единицы фарада: 1 $мк\Phi = 10^{-6} \Phi$, 1 $н\Phi = 10^{-9} \Phi$, 1 $п\Phi = 10^{-12} \Phi$.

Как следует из рассмотренного примера, для того, чтобы проводник обладал значительной электроемкостью, он должен иметь очень большие геометрические размеры. На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью накапливать значительные по величине заряды при малых размерах и небольших потенциалах. Такие устройства называются *конденсаторами*.

Допустим, что уединенный проводник A имеет форму шара. Так как он уединенный, его заряд $q > 0$ равномерно распределен по поверхности и напряженность поля в точке M равна $E = q / (4\pi\epsilon_0\epsilon r^2)$ (рис. 6, а). Поместим теперь справа от A незаряженный проводник B . Под действием поля шара в B произойдет перераспределение свободных носителей заряда: на ближнем к A конце проводника B индуцируется поверхностный заряд противоположного знака, а на дальнем конце – одноименного с q знака (рис. 6, б). В свою очередь перераспределяется по поверхности шара A и заряд q так, чтобы скомпенсировать внутри него поле зарядов, индуцированных на теле B . В результате перераспределения зарядов в проводниках A и B напряженность поля в точке M уменьшится: $E' < E$. Это соотношение справедливо для всех точек, лежащих на прямой OM слева от A . Поскольку $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ и $\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr$, потенциал проводника понижается, что приводит к увеличению его емкости ($C = q / \varphi$).

Таким образом, конденсатор работает по принципу: *электроемкость не уединенного проводника всегда больше электроемкости того же проводника, когда он уединен*.

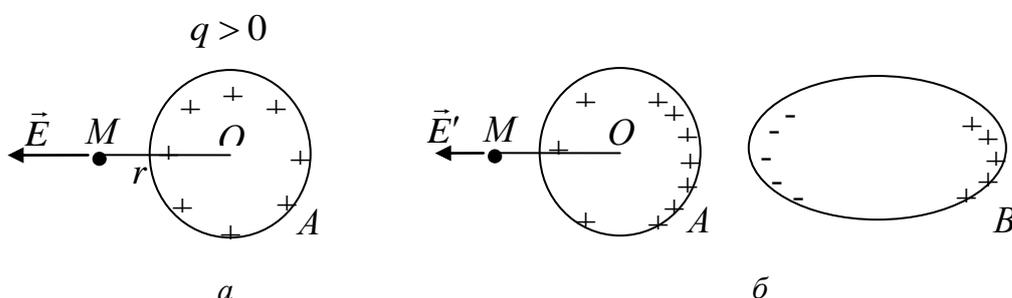


Рис. 6.

Конденсатор представляет собой систему двух изолированных друг от друга проводников разделенных диэлектриком. Проводники конденсатора называются *обкладками*. На емкость конденсатора не должны оказывать влияние окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Этому условию удовлетворяют: а) две плоские пластины; б) два соосных цилиндра; в) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от геометрии обкладок конденсаторы делятся на плоские, цилиндрические и сферические.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности поля начинаются на одной обкладке и кончаются на другой. Поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами.

Пусть обкладки 1 и 2 конденсатора имеют заряды соответственно q и $-q$. Тогда можно показать, что разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками будет пропорциональна заряду q обкладок: $\varphi_1 - \varphi_2 \sim q$. Поэтому можно записать

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где коэффициент пропорциональности C называется *емкостью конденсатора*. Иными словами, емкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда q , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов между его обкладками

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (11)$$

причем C не зависит от заряда конденсатора, а определяется геометрическими размерами и взаимным расположением его обкладок.

Рассчитаем емкость *плоского* конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга и имеющих заряды $+q$ и $-q$. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то поле между обкладками можно считать однородным и его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

С учетом связи между напряженностью поля и потенциалом, разность потенциалов между пластинами, расстояние между которыми d , равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (12)$$

Заменяя в формуле (11) $q = \sigma \cdot S$, с учетом (12) получим:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (13)$$

Приведем без вывода формулы для расчета емкости конденсаторов других конструкций:

- емкость *цилиндрического* конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)},$$

где R и r – радиусы коаксиальных цилиндров, L – длина образующей цилиндра;

- емкость *сферического* конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon Rr}{R - r},$$

где R и r – радиусы сфер.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в *батареи*. Различают два вида соединений – параллельное и последовательное.

При *параллельном соединении* (рис. 7, а) разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов одинакова и составляет $\varphi_A - \varphi_B$. Для краткости мы эту разность потенциалов обозначим как $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$. Если емкости отдельных конденсаторов C_1, C_2, \dots, C_n , то их заряды равны

$$q_1 = C_1 U_{AB},$$

$$q_2 = C_2 U_{AB},$$

.....

$$q_n = C_n U_{AB}.$$

Общий заряд батареи равен сумме зарядов всех конденсаторов

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n C_i U_{AB}.$$

Полная емкость батареи

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \sum_{i=1}^n C_i, \tag{14}$$

т.е. при *параллельном соединении* конденсаторов электрическая емкость батареи равна сумме емкостей входящих в нее конденсаторов. Пробивное напряжение такой батареи равно пробивному напряжению того из конденсаторов, у которого оно наименьшее.

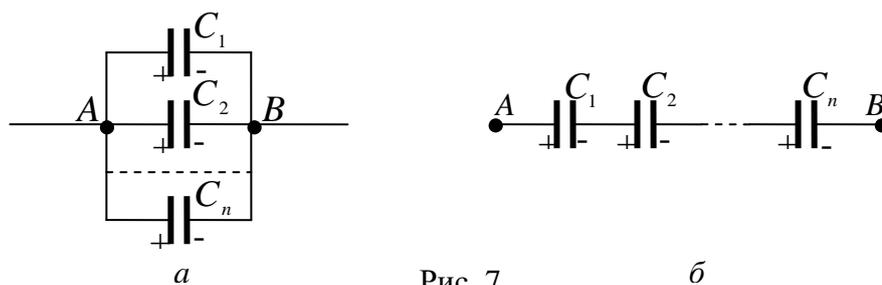


Рис. 7.

б

При последовательном соединении (рис. 7, б) заряды всех конденсаторов одинаковы и равны заряду q батареи. Разность потенциалов на зажимах $\varphi_A - \varphi_B = U_{AB}$ батареи равна сумме разностей потенциалов на обкладках каждого из конденсаторов. Если мы обозначим через U_i разность потенциалов на обкладках конденсатора с номером i , то мы получим

$$U_{AB} = \sum_{i=1}^n U_i,$$

где

$$U_i = \frac{q}{C_i}.$$

С другой стороны, $U_{AB} = \frac{q}{C}$,

откуда

$$\frac{q}{C} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

или

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (15)$$

т.е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям входящих в батарею конденсаторов. При таком соединении электрическая емкость C батареи всегда меньше наименьшей емкости конденсатора, используемого в батарее. Преимущество последовательного соединения конденсаторов состоит в том, что на каждый конденсатор приходится лишь часть разности потенциалов между клеммами батареи, что уменьшает вероятность пробоя конденсаторов.

3. Энергия электростатического поля

Электростатические силы взаимодействия консервативны, следовательно, система зарядов обладает потенциальной энергией.

Пусть имеется *уединенный проводник*, заряд емкости и потенциал которого соответственно равны q , C и φ . Увеличим заряд этого проводника на dq . Это связано с совершением работы по преодолению кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Совершаемая работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника. Следовательно, элементарная работа dA , совершаемая внешними силами при переносе малого заряда dq из бесконечности на уединенный проводник, равна

$$dA = \varphi dq = \varphi d(C\varphi) = C\varphi d\varphi,$$

где φ – потенциал проводника, начало отсчета которого выбрано в бесконечно удаленной точке.

Работа, совершаемая при увеличении потенциала проводника от 0 до φ , т.е. при сообщении проводнику заряда $q = C\varphi$, равна

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (16)$$

Энергия заряженного уединенного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник, т.е.

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (17)$$

Определим энергию *заряженного конденсатора*. Если q – заряд конденсатора, а $\Delta\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между его обкладками, то для переноса малого заряда dq с одной обкладки на другую внешние силы должны совершить работу

$$dA = (\varphi_1 - \varphi_2) dq = \frac{q dq}{C}.$$

Следовательно, работа по увеличению заряда конденсатора от 0 до q равна:

$$A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

Соответственно, энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}. \quad (18)$$

Учитывая, что конденсатор – это система из двух проводников 1 и 2, заряды которых $q_1 = q$ и $q_2 = -q$, формулу (18) можно переписать в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Аналогичным образом можно показать (вывод мы не приводим), что *энергия системы из n неподвижных заряженных проводников* определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i\varphi_i, \quad (19)$$

где q_i – заряд i – проводника; φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i , всеми зарядами, кроме i – го.

Используя выражение (18), можно определить механическую силу, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга. Для этого предположим, что расстояние x между обкладками меняется на величину dx . Тогда действующая сила совершает работу $dA = Fdx$ за счет уменьшения потенциальной энергии системы

$$Fdx = -dW,$$

откуда

$$F = -\frac{dW}{dx},$$

где

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} x.$$

Тогда искомая механическая сила будет равна

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S},$$

где знак «минус» указывает, что сила F является силой притяжения. Эта сила называется *пондеромоторной* силой.

Преобразуем выражение для энергии конденсатора $W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}$ (см.

(18)), подставив в него $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. Тогда получим формулу, связывающую энергию электростатического поля плоского конденсатора с напряженностью:

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V, \quad (20)$$

где $V = Sd$ – объем конденсатора. Эту величину мы можем считать энергией электростатического поля внутри конденсатора. Разделив эту величину на объем конденсатора V , получим энергию, приходящуюся на единицу объема

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (21)$$

Величина w , определяемая формулой (21), называется *объемной плотностью энергии* (энергия единицы объема) электростатического поля.