

Электрические колебания

1. Электрический колебательный контур. Свободные незатухающие колебания. Формула Томсона.

Электромагнитные колебания могут возникать в электрической цепи, содержащей индуктивность L и емкость C (рис. 1). Такая цепь называется **колебательным контуром**. Возбудить колебания в таком контуре можно, например, предварительно зарядив конденсатор от внешнего источника напряжения, соединить его затем с катушкой индуктивности.

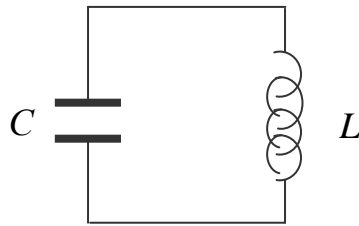


Рис.1. Электрический колебательный контур.

Поскольку внешнее напряжение к контуру не приложено, сумма разностей потенциалов на емкости и индуктивности должна быть равна нулю в любой момент времени. Разность потенциалов на емкости равна $\frac{q}{C}$, а на индуктивности – в соответствии с законом электромагнитной индукции разность потенциалов равна $-\varepsilon = L \frac{dI}{dt}$. Поэтому

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

откуда, учитывая, что сила тока $I = \dot{q}$, получаем дифференциальное уравнение **свободных незатухающих колебаний** электрического заряда в колебательном контуре

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Напомним, что здесь мы обозначаем точкой производную по времени т.е. $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$,

$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$. Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то полученное уравнение принимает вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Данное уравнение называется дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний.

Решением этого уравнения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 , называемой собственной частотой колебательного контура.

Период колебаний определяется по **формуле Томсона** (Thomson W., 1824-1907):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Напряжение (разность потенциалов) на конденсаторе есть

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ - амплитуда напряжения.

Сила тока в контуре равна

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}).$$

Сопоставляя полученные выражения, видим, что когда напряжение на конденсаторе U_C , а значит энергия электрического поля в конденсаторе, обращается в нуль, сила тока, а, следовательно, энергия магнитного поля в катушке, достигает максимального значения (рис. 2). Таким образом, электрические колебания в контуре сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

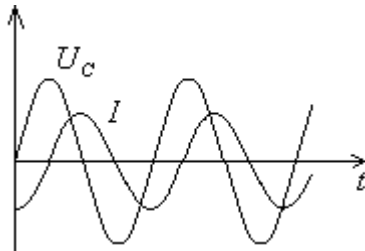


Рис. 2. Графики изменения $U_C(t)$ и $I(t)$ в LC-контуре.

Амплитуды тока I_m и напряжения U_m связаны между собой очевидным соотношением:

$$I_m = \omega_0 q_m = \omega_0 C U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m.$$

2. Свободные затухающие колебания. Добротность колебательного контура.

Всякий реальный колебательный контур обладает сопротивлением (рис. 3). Энергия электрических колебаний в таком контуре постепенно расходуется на нагревание проводников, переходя в джоулево тепло, вследствие чего колебания

затухают.

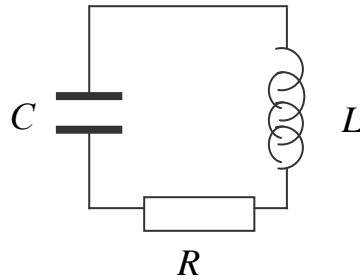


Рис. 3. Колебательный RLC -контур.

Уравнение **свободных затухающих колебаний** можно получить, исходя из того, что в отсутствии внешнего источника напряжения, сумма разностей потенциалов на индуктивности, емкости и сопротивлении равна нулю для любого момента времени:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

или, поскольку $I = \dot{q}$,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L},$$

этому уравнению можно придать вид:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$ - циклическая частота незатухающих колебаний и коэффициент β называется коэффициентом затухания. Данное уравнение называется дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний.

Решение полученного уравнения имеет вид:

$$q(t) = q_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha)$$

или

$$q(t) = q_0(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad q_0(t) = q_m \exp(-\beta t),$$

где

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

называется циклической частотой затухающих колебаний. Величина $q_0(t)$ называется амплитудой затухающих колебаний.

Мы видим, что частота свободных затухающих колебаний ω меньше собственной частоты ω_0 . Подставив значения ω_0 и β , получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора $q_0(t)$ уменьшается со временем по экспоненциальному закону (рис. 4).

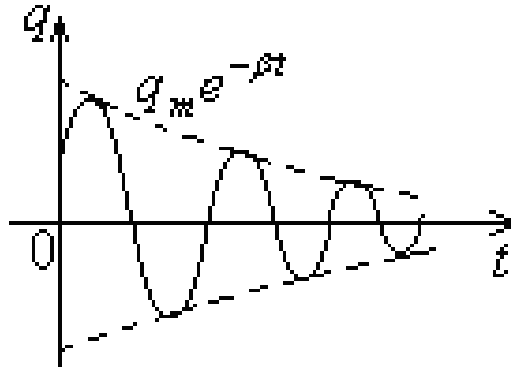


Рис. 4. Изменение заряда конденсатора со временем в RLC -контуре.

Затухание колебаний принято характеризовать **логарифмическим декрементом колебаний** λ , определяемым как:

$$\lambda = \ln \frac{q_0(t)}{q_0(t+T)} = \beta T.$$

Иными словами *логарифмический декремент затухания есть логарифм отношения амплитуд колебаний, разделенных интервалом времени, равным одному периоду.*

Добротностью колебательного контура называется величина:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T}.$$

Из этой формулы видно, что добротность тем выше, чем меньше коэффициент затухания β . При малых затуханиях ($\lambda \ll 1$) можно приближенно считать, что

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Амплитуда тока в контуре, как и заряд на конденсаторе, убывает со временем по закону $e^{-\beta t}$. Энергия W , запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды тока (или квадрату напряжения на конденсаторе). Следовательно, W убывает со временем по закону $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за период колебания T (при малом затухании) есть:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - e^{-2\beta T} \approx 2\beta T = \frac{2\pi}{Q}.$$

Таким образом, потери энергии в колебательном контуре тем меньше, чем выше его добротность.

3. Вынужденные электрические колебания. Метод векторных диаграмм.

Если в цепь электрического контура, содержащего емкость, индуктивность и сопротивление, включить источник переменной ЭДС (рис. 5), то в нем, наряду с собственными затухающими колебаниями, возникнут **незатухающие вынужденные колебания**. Частота этих колебаний совпадает с частотой изменения переменной ЭДС.

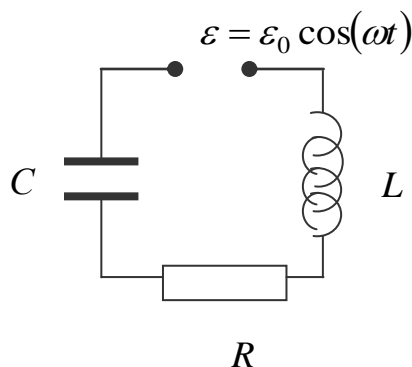


Рис. 5. Последовательный колебательный RLC -контур.

Чтобы получить уравнение **вынужденных колебаний**, надо, приравнять к нулю сумму разностей потенциалов на всех элементах контура. В итоге получим

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

или

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega t),$$

где ε_0 – амплитуда переменной ЭДС, ω – ее циклическая частота.

Данное уравнение называется дифференциальным уравнением вынужденных гармонических колебаний.

Интересующее нас частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид (проверяется прямой подстановкой):

$$q(t) = q_0(\omega) \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)]$$

где

$$q_0(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi(\omega) = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Решение соответствующего однородного уравнения, как мы видели в п. 2, представляет собой свободные затухающие колебания, которые с течением времени становятся исчезающе малыми, и их можно в дальнейшем не учитывать.

Выпишем формулы для силы тока в цепи и падений напряжений на каждом из элементов контура.

Сила тока:
$$I(t) = \dot{q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

$$I_0(\omega) = \omega q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

По аналогии с законом Ома для полной цепи по постоянному току величину

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

называют полным сопротивлением цепи по переменному току.

В теории электрических цепей используется также понятие комплексного сопротивления $\tilde{Z}(\omega) = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, которое также называется импедансом цепи. Величина $Z(\omega)$ представляет собой модуль комплексного сопротивления $\tilde{Z}(\omega)$. Сопротивление R называют **активным** сопротивлением (на нем выделяется тепло). Величины ωL и $\frac{1}{\omega C}$ называют соответственно индуктивным и емкостным **реактивными** сопротивлениями (на них тепло не выделяется).

Напряжение (разность потенциалов) на сопротивлении R равно

$$U_R(t) = RI(t) = U_{R0}(\omega) \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

$$U_{R0}(\omega) = RI_0(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} R.$$

Напряжение (разность потенциалов) на конденсаторе C равно

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_{C0}(\omega) \cos(\omega t - \psi),$$

$$U_{C0}(\omega) = \frac{q_0(\omega)}{C} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Напряжение (разность потенциалов) на катушке индуктивности L равно

$$U_L(t) = \dot{I}(t)L = \ddot{q}(t)L = U_{L0}(\omega) \cos(\omega t - \psi + \pi),$$

$$U_{L0}(\omega) = q_0(\omega)\omega^2 L = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Сравнивая написанные формулы, видим, что:

- 1) изменение напряжения на сопротивлении следует за изменением силы тока в цепи без отставания или опережения по фазе;
- 2) изменение напряжение на конденсаторе отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от изменения тока;
- 3) изменение напряжение на индуктивности опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ изменение тока.

Наглядно это можно изобразить с помощью **векторной диаграммы** (рис. 6), вещественная ось которой (ось X) совпадает с осью токов. Длина каждого вектора на этой диаграмме дает амплитуду соответствующего напряжения, а угол, который составляет данный вектор с осью токов – сдвиг фазы по отношению к изменению силы тока в цепи.

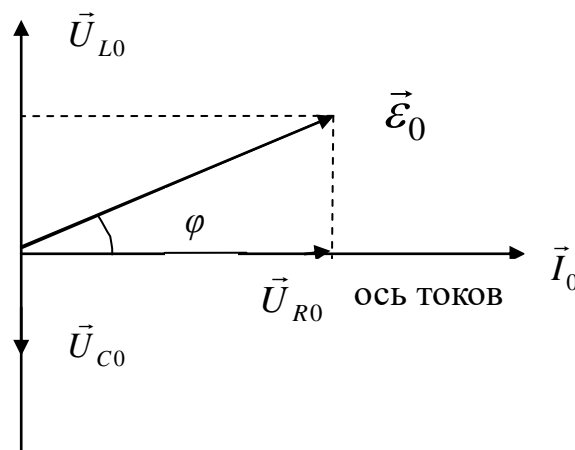


Рис. 6. Векторная диаграмма для последовательного RLC-контура.

Амплитуда суммарного напряжения на всех элементах контура, равная амплитуде $\vec{\varepsilon}_0$ действующей в контуре ЭДС, является результатом векторного сложения символических напряжений \vec{U}_{R0} , \vec{U}_{L0} и \vec{U}_{C0} . Этот вектор образует с осью токов угол $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, показывающий разность фаз между током и ЭДС.

Тангенс этого угла равен:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

4. Резонансные явления в колебательном контуре. Резонанс напряжений и резонанс токов.

Как следует из приведенных формул, при частоте переменной ЭДС ω , равной

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

амплитудное значение силы тока $I_0(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ в колебательном

контуре, принимает максимальное значение $I_{0\text{max}} = \frac{\varepsilon_0}{R}$. При этом **амплитуда напряжения** на активном сопротивлении R также **максимальна** и равна $U_{R0} = I_{0\text{max}} R = \varepsilon_0$. Падения напряжения на емкости U_C и индуктивности U_L одинаковы по амплитуде, но противоположны по фазе, и они взаимно компенсируют друг друга. Это явление, имеющее место в последовательном колебательном контуре, изображенном на рис. 5, называется **резонансом напряжений**. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, показана на рис. 7.

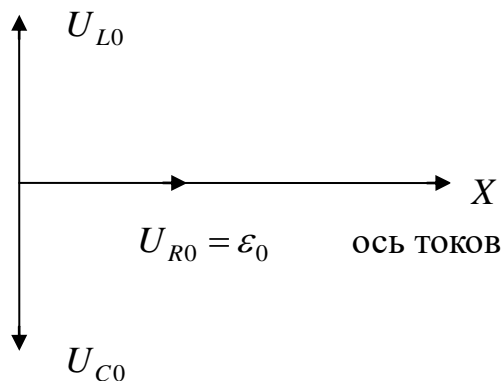


Рис. 7. Векторная диаграмма при резонансе напряжений.

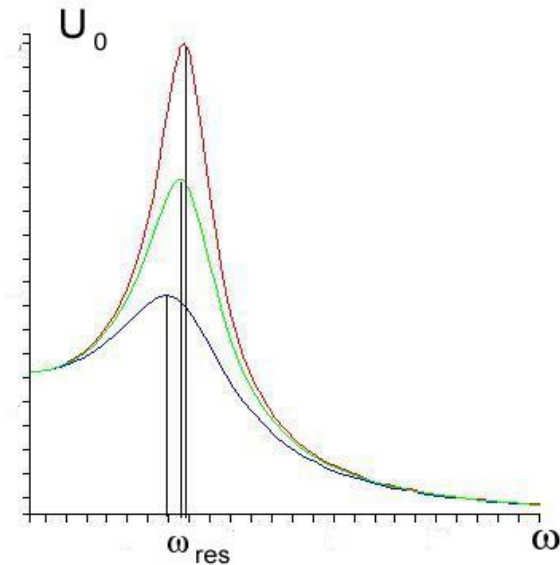


Рис.8. Резонансные кривые $U_{C_0}(\omega)$ для разных значений R .

Максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе

$$U_{C_0}(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

достигается при частоте

$$\omega_{\text{Срез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0.$$

Резонансные кривые для $U_{C_0}(\omega)$ для разных значений R представлены на рис. 8. Максимум получается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания β , то есть чем меньше активное сопротивление R и больше индуктивность контура L .

Если источник переменной ЭДС подключить параллельно конденсатору, то получим колебательный контур, который называется параллельным (рис. 9).

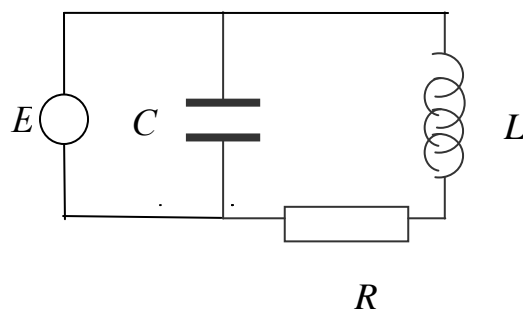


Рис. 9. Параллельный колебательный RLC -контур.

В таком контуре при $\omega \approx \omega_0$ наблюдается другое резонансное явление, получившее название **резонанса токов**. При резонансе токов токи, текущие через

емкость и индуктивность одинаковы по амплитуде, но противоположны по фазе. При этом общий ток в цепи ЭДС **близок к нулю**, хотя токи в самом контуре могут быть очень велики. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, приведена на рис. 10.

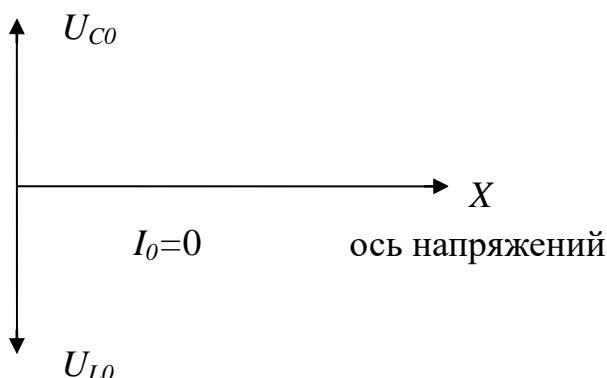


Рис.10. Векторная диаграмма при резонансе токов.

Можно показать, что при резонансе токов полное сопротивление $Z(\omega)$ параллельного контура максимально и равно чисто активному сопротивлению R . Резонансная частота, при которой $Z(\omega)$ максимально, определяется из условия равенства нулю реактивной (мнимой) части комплексного сопротивления

$$\tilde{Z}(\omega) = \left[\frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{R + i\omega L} \right]^{-1} :$$

$$\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2 = 0 ,$$

откуда

$$\omega'_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} \leq \omega_0 .$$

Резонансные кривые для амплитудных значений $U_{C0}(\omega)$ тока, текущего через конденсатор, приведены на рис. 11.

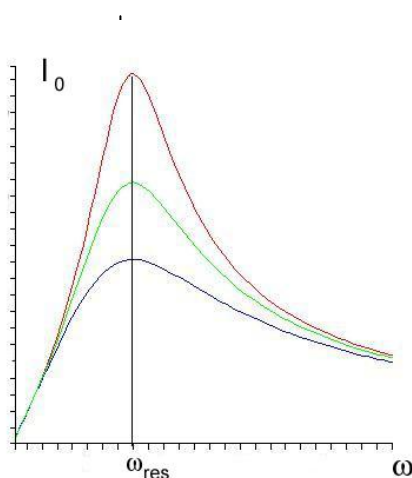


Рис. 11. Резонансные кривые $U_{C0}(\omega)$ для разных значений R

Резонансные явления в колебательных контурах широко используются в электро- и радиотехнике (резонансные усилители, частотные фильтры и другие). В частности, явление резонанса используется для выделения из сложного сигнала нужной частотной составляющей. Настроив контур (путем изменения его параметров C и/или L) на одну из выбранных частот, можно получить на конденсаторе напряжение, в Q раз превышающее величину напряжения данной частотной составляющей (см. рис. 8). Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.