Электромагнитные волны. Элементы фотометрии.

1. Волновое уравнение. Типы и характеристики волн.

Волной в самом широком смысле называется ***изменение характеристик материальной среды или некоторого физического поля, которое способно распространяться в пространстве с течением времени.***

В более узком смысле под изменением характеристик среды или поля характеристик понимают именно колебания этих характеристик. В этом случае под волной понимают ***процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.***

Волны различной природы (звуковые, упругие, электромагнитные) описываются сходными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка по пространственно-временным переменным. Уравнение, описывающее волновой процесс, называется ***волновым уравнением,*** функция, которая удовлетворяет этому уравнению – ***функцией волны*** или ***волновой функцией***.

В зависимости о того колебания какой характеристики рассматриваются, волны бывают *скалярные* (давление в звуковой волне, плотность заряда в плазме) и *векторные* (упругие волны в кристаллах, электромагнитные волны). Если направление колебаний в волне совпадает с направлением ее распространения, то такая волна называется *продольной*; если колебания происходят в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны – *поперечной*. Направление колебаний определяет ***поляризацию*** волны.

Волновое уравнение, описывающее скалярную волну $\xi = \xi(x,y,z,t)$, имеет вид:

$$\Delta\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, υ - некоторый параметр (мы увидим позже, что это есть фазовая скорость волны).

Рассмотрим частный случай, когда волновая функция зависит только от одной пространственной координаты (например – координаты x), вдоль направления которой распространяется волна. В этом случае решением волнового уравнения является функция:

$$\xi(x,t) = a\cos(\omega \cdot t - kx + \alpha).$$

Постоянная a называется ***амплитудой*** волны, она показывает *максимальное значение* колеблющейся величины. Выражение, стоящее в скобках под знаком косинуса, называется ***фазой*** волны; ω – ***угловая (циклическая) частота***; k – ***волновое число.*** Величина α называется начальной фазой волны, а выражение, стоящее под знаком косинуса $\omega \cdot t - kx + \alpha$ называется фазой волны.

Для того, чтобы данное уравнение было решением волнового уравнения необходимо, чтобы волновое число, циклическая частота и параметр υ были связаны соотношением:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}.$$

Из приведенного решения волнового уравнения видно, что в каждой данной точке пространства $x = x_0$ колебания происходят по гармоническому закону:

$$\xi(t) = a\cos(\omega \cdot t + \varphi), \text{ где } \varphi = \alpha - kx_0.$$

Волна, в которой колебания происходят по *гармоническому* закону, называется ***гармонической*** или ***монохроматической***.

Параметр υ, входящий в волновое уравнение, есть скорость перемещения в пространстве фиксированного значения *фазы* волны, в связи с чем ее называют ***фазовой скоростью***. Эту скорость легко определить, взяв дифференциал от произвольного постоянного значения фазы $\omega t - kx + \alpha = const$. После чего находим:

$$\omega dt - kdx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon.$$

Циклическая частота ω связана с ***периодом волны*** T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Волновое число k связано с ***длиной волны*** λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Используя эти соотношения, можем связать фазовую скорость волны υ с ее длиной λ и периодом T:

$$\lambda = \upsilon T$$

Отсюда следует, что *длина волны* – это расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в *одинаковой* фазе (рис. 1).

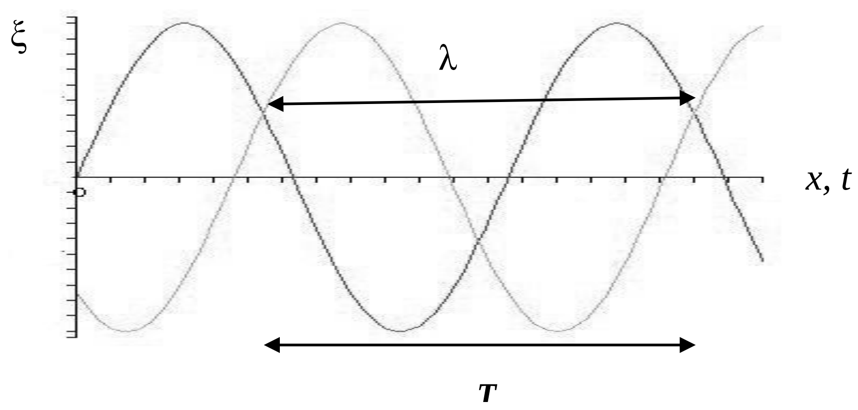


Рис. 1. Графическое изображение волнового процесса.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью***. От волновой поверхности следует отличать ***волновой фронт*** (или ***фронт волны***) – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к *данному* моменту времени *t*. Волновой фронт представляет собой поверхность, которая отделяет область пространства, *уже* вовлеченную в волновой процесс, так называемую ***волновую зону***, от той части пространства, куда колебания *еще* не дошли.

Волновую поверхность можно провести через *любую* точку пространства *внутри* волновой зоны. Следовательно, волновых поверхностей существует *бесконечное множество*, в то время как *волновой фронт* в каждый момент времени только *один*. Волновые поверхности остаются *неподвижными*, волновой фронт все время *перемещается* в пространстве со скоростью, равной фазовой скорости волны υ.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости, цилиндра или сферы. В ***плоской*** волне волновые поверхности представляют собой систему *параллельных* друг другу *плоскостей*, в ***цилиндрической*** волне – систему *коаксиальных цилиндров*, в ***сферической*** волне – систему *концентрических сфер*.

Запишем общие уравнения монохроматических волн типа плоской волны, цилиндрической волны и сферической волны, которые являются решениями волнового уравнения:

$$\xi(\vec{r},t) = a\cos(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)$$ - плоская волна;

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{a}{\sqrt{r}}\cos(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)$$ - цилиндрическая волна**;**

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{a}{r}\cos(\omega\cdot t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)$$ - сферическая волна,

где $\vec{r} = \vec{r}(x,y,z)$ - радиус-вектор произвольной точки волновой поверхности; $\vec{k} = k\vec{n}$ - волновой вектор, $\vec{n}$ - единичный вектор волновой нормали, совпадающей с направлением вектора фазовой скорости $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{n}$, и ω, $\left|\vec{k}\right| = k$ и υ связаны соотношением

$$\frac{\omega}{k} = \upsilon.$$

Мы видим, что амплитуда цилиндрической волны убывает с расстоянием как $1/\sqrt{r}$, а сферической – как $1/r$.

В ***общем случае*** решение волнового уравнения представляет собой *суперпозицию* двух волн (скалярных или векторных), распространяющихся в *противоположных* направлениях:

$$\widehat{f}(\vec{r},t) = \widehat{f}_1(\vec{r} - \vec{\upsilon}t) + \widehat{f}_2(\vec{r} + \vec{\upsilon}t),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

2. Электромагнитные волны.

Из уравнений Максвелла следует, что если возбудить с помощью зарядов *переменное* электрическое или магнитное поле, в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся в виде ***электромагнитной волны.*** Можно показать (доказательство мы не приводим здесь), что для однородной *нейтральной* (ρ=0) и *непроводящей* ($\vec{j}=0$) среды с постоянными проницаемостями ε и μ, из уравнений Максвелла следуют следующие три уравнения для напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей:

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\,,\qquad \Delta\vec{H}-\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\,.$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,\vec{n}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\mu_0}\,\vec{H}\,,$$

Первые два уравнения – волновые уравнения. третье уравнение определяет связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и $\vec{n}$ - некоторый вектор, который определяет направление распространения волны.

Фазовая скорость электромагнитной волны υ определяется по формуле:

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\,.$$

Для вакуума ($\varepsilon=\mu=1$) по этой формуле получается:

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}}=3\cdot 10^8\,\frac{м}{с}=c\,.$$

Таким образом, в вакууме *фазовая скорость* электромагнитной волны совпадает со *скоростью света*. В среде с постоянными проницаемостями ε и μ

$$\upsilon=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Рассмотрим ***плоскую электромагнитную волну***, распространяющуюся вдоль оси x, перпендикулярной к волновым поверхностям. В этом случае, очевидно, поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от координат y и z. Соответствующие уравнения Максвелла, записанные для этого случая, приводят к следующим скалярным волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\,,\qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}\,,$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,\vec{n}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\mu_0}\,\vec{H}$$

Простейшими решениями этих уравнений являются функции

$$E_y(x,t)=E_m\cos(\omega t-kx),$$

$$H_z(x,t)=H_m\cos(\omega t-kx),$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_y(x,t)=\sqrt{\mu\mu_0}\,H_z(x,t).$$

Отсюда следует, что колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с *одинаковой фазой*, а *амплитуды* этих векторов связаны между собой соотношением:

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}=H_m\sqrt{\mu\mu_0}\,.$$

Из последней формулы вытекает, в частности, что отношение E_m к H_m для электромагнитной волны, распространяющейся в *вакууме*:

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi \cdot 10^{9}} = 120\pi \approx 377 .$$

В векторном виде уравнения плоской электромагнитной волны записываются как:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

На рисунке 2 показана мгновенная картина *плоской электромагнитной волны* в данный момент времени *t*.

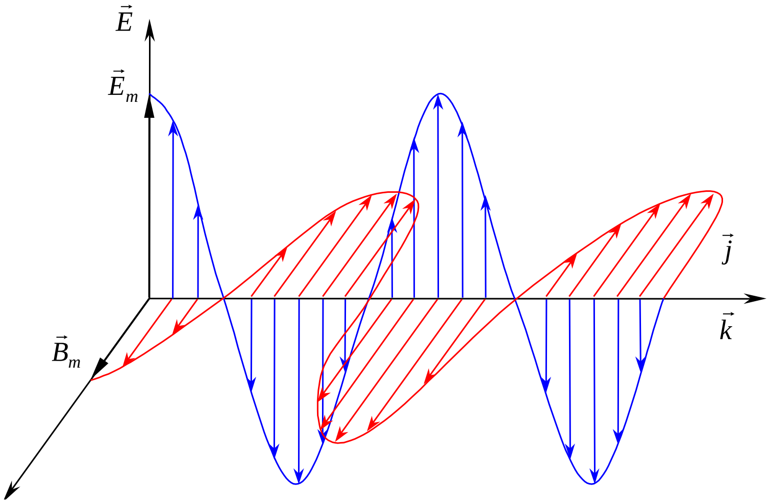


Рис. 2. Структура плоской электромагнитной волны.

Как видно из этого рисунка, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (на рисунке $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$) образуют с направлением распространения волны $\vec{k}$ *правовинтовую* систему, то есть электромагнитная волна является ***поперечной***. В фиксированной точке пространства электромагнитное поле в волне изменяется по *гармоническому* закону.

Фазовая и групповая скорости волн

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну, которая распространяется в положительном направлении оси *Ox* в однородной среде и описывается уравнение

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx).$$

Преобразуем данное уравнение волны к виду

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right)\right) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right).$$

Уравнение поверхности равных фаз имеет вид

$$\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)=const\,.$$

Дифференцирование по времени данного выражения приводит к уравнению

$$\omega-\frac{\omega}{\upsilon}\frac{dx}{dt}=0\,,$$

или $\frac{dx}{dt}=\upsilon$. Это есть ***фазовая скорость*** волны (или скорость перемещения поверхности равных фаз), которую мы обозначим здесь как

$$\upsilon_{\text{ф}}\equiv\upsilon\,.$$

Для $\upsilon_{\text{ф}}$ нетрудно также получить формулу:

$$\upsilon_{\text{ф}}=\frac{\omega}{k}=\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\lambda}{T}\,.$$

Если бы монохроматические волны реально существовали, можно было бы ограничиться только понятием фазовой скорости. Но на самом деле излучение световых волн происходит порциями (цугами). Форма цуга определяется амплитудами $\vec{E}_{0i}$, частотами ω_i и фазами φ_i его гармонических составляющих.

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_{0i}\cos\left(\omega_i t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_i\right).$$

Поэтому волновой цуг еще называют ***волновым пакетом***.

Рисунок. Типичная форма волнового пакета.

Если скорости всех составляющих волнового пакета одинаковы, то их фазовые соотношения не меняются, и форма пакета остается постоянной. В этом случае его скорость совпадает со скоростью гармоник.

В случае если скорости гармонических составляющих зависят от частоты (так называемое ***явление дисперсии***, которое мы будем изучать позже), то фазовые соотношения между ними меняются по мере их распространения, что приводит к изменению формы пакета. Тогда скорость распространения пакета и фазовая скорость его гармоник не будут совпадать. В этом случае распространение пакета характеризуют так называемой ***групповой скоростью*** $\upsilon_{\text{гр}}$.

Рассмотрим простейший случай волнового пакета, состоящего из двух гармонических составляющих одинаковой амплитуды, распространяющихся в одинаковом направлении и имеющих частоты ω_1 и ω_2, отличающиеся на малую величину

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

причем $\Delta\omega << \omega_1$ и $\Delta\omega << \omega_2$:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x); \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

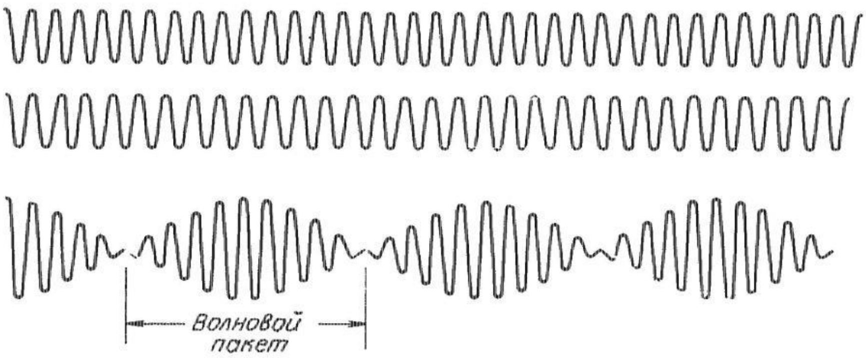
Результирующая волна имеет световой вектор вида

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right).$$

Исходя из принятых условий $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$ и $\frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_1$, выражение для светового вектора принимает вид

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \cos(\omega_1 t - k_1 x).$$

Данное выражение характеризует монохроматическую волну с частотой ω_1, волновым числом k_1 и медленно меняющейся амплитудой $2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)$ (рисунок ниже):



Так как модулированная амплитуда характеризует группу волн, то цуг можно характеризовать скоростью переноса определенного значения модулированной амплитуды. Эту скорость принято называть ***групповой скоростью*** волн $\upsilon_{\text{гр}}$, под которой понимают скорость перемещения точек, в которых амплитуда $2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)$ максимальна. Выражение $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)$ имеет максимум при

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = 2\pi m, \quad \text{где } m = 1, 2, \ldots$$

Возьмем от этого выражения производную по времени:

$$\frac{\Delta\omega}{2}-\frac{\Delta k}{2}\frac{dx}{dt}=0.$$

Отсюда находим выражение для групповой скорости

$$\frac{dx}{dt}\equiv\upsilon_{\text{гр}}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

или в пределе при $\Delta\omega\to 0$ и $\Delta k\to 0$

$$\upsilon_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk}.$$

Используя данную формулу и формулу $\upsilon_{\text{ф}}=\frac{\omega}{k}$, нетрудно найти соотношение между групповой и фазовой скоростью волн. Действительно,

$$\upsilon_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\left(\upsilon_{\text{ф}}\cdot k\right)}{dk}=\upsilon_{\text{ф}}+k\frac{d\upsilon_{\text{ф}}}{dk}.$$

Так как $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, то $dk=-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$. Следовательно,

$$\upsilon_{\text{гр}}==\upsilon_{\text{ф}}-k\frac{d\upsilon_{\text{ф}}}{d\lambda}\frac{\lambda^2}{2\pi}=\upsilon_{\text{ф}}-k\frac{d\upsilon_{\text{ф}}}{d\lambda}\frac{\lambda}{k}=\upsilon_{\text{ф}}-\lambda\frac{d\upsilon_{\text{ф}}}{d\lambda},$$

или

$$\upsilon_{\text{гр}}==\upsilon_{\text{ф}}-\lambda\frac{d\upsilon_{\text{ф}}}{d\lambda}.$$

Данное выражение называют формулой Рэлея. Оно показывает, что групповая скорость волн всегда меньше фазовой скорости.

Энергия и импульс электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга.

Распространение электромагнитной волны сопровождается *переносом энергии* и *импульса* электромагнитного поля. Плотность энергии электромагнитного поля, переносимой волной равна сумме плотности энергии электрического поля $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ и плотности энергии магнитного поля $\frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$, т.е.

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E^2+\mu\mu_0 H^2\right).$$

Поскольку $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu\mu_0}H$, то

$$w=\varepsilon\varepsilon_0 E^2=\mu\mu_0 H^2=\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH=\frac{EH}{\upsilon}.$$

Умножив w на υ получим плотность потока энергии:

$$S=w\upsilon=EH.$$

Можно ввести вектор плотности потока энергии можно $\vec{S}$, который определяется формулой

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} .$$

носит название ***вектора Пойнтинга*** (Poynting J., 1852-1914).

Можно показать, что для электромагнитной волны справедлив закон сохранения энергии: *изменение энергии* поля в выделенном объеме пространства за *единицу времени* происходит за счет *потока вектора Пойнтинга* через поверхность, охватывающую этот объем.

Наряду с энергией, электромагнитная волна переносит ***импульс*** поля. ***Плотность импульса*** $\vec{p}$ электромагнитного поля связана с вектором Пойнтинга соотношением:

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{S} .$$

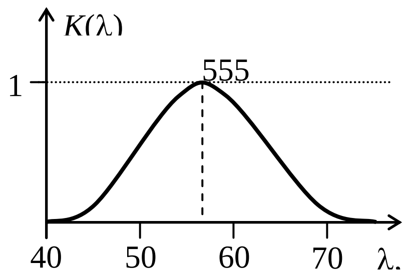
Из факта существования у электромагнитной волны импульса следует, что при ее падении на некоторую поверхность она будет оказывать ***давление*** на эту поверхность. Можно показать, что при этом величина давления P определяется по формуле:

$$P = (1 + r)\overline{w} ,$$

где r – коэффициент отражения; $\overline{w}$ – среднее значение плотности энергии волны.

Элементы фотометрии

Всякая реальная световая волна представляет собой совокупность электромагнитных волн с частотами, заключенными в некотором более или менее конечном интервале $\Delta\omega$, которому соответствует интервал длин волн $\Delta\lambda$. Оптика рассматривает явления, связанные с электромагнитными волнами, воспринимаемыми человеческим глазом. Как уже отмечалось, к таким волнам относятся электромагнитные волны с длиной волны от 400 нм (фиолетовый свет) до 760 нм (красный свет). Световые волны данного диапазона по-разному воспринимаются человеческим глазом. Это воздействие оценивают с помощью величины, которая называется ***относительной спектральной чувствительностью*** $K(\lambda)$. Наиболее чувствителен глаз человека к излучению с длинной волны 555 нм (зеленый свет). Функция $K(\lambda)$ для этой длины волны принята равной единице. При том же потоке энергии оцениваемая зрительно интенсивность света для других длин волн оказывается меньше и, соответственно, $K(\lambda)$ для этих волн меньше единицы. Значения функции $K(\lambda)$ обратно пропорционально значениям потоков энергии, которые вызывают одинаковое по интенсивности зрительное ощущение.



Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительные ощущения вводят величину Ф, называемую ***световым потоком***. Пусть W есть энергия, переносимая через некоторую поверхность световыми волнами. Тогда ***световой поток – это энергия, переносимая через данную поверхность световыми волнами за единицу времени***:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Источник света, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от места наблюдения до источника, называется точечным. Для характеристики точечных источников света вводится физическая величина – ***сила света***

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

где $d\Phi$ – световой поток, излучаемый источником в пределах телесного угла $d\Omega$. Таким образом, сила света – это световой поток, излучаемый точечным источником в пределах единичного телесного угла.

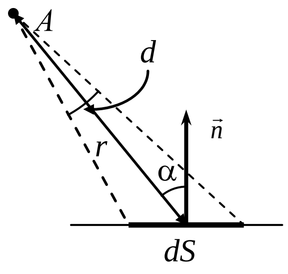
Единицей силы света является ***кандела*** (кд). Это одна из основных единиц системы СИ. Единицей светового потока является ***люмен*** (лм). Световой поток в один люмен равен потоку, испускаемому точечным источником света с силой света одна кандела в телесный угол один радиан (1 лм = 1 кд·1 рад). Опытным путем установлено, что Φ = 1 лм соответствует поток энергии в 0,0016 Вт от источника с длиной волны 555 нм.

Степень освещенности некоторой площадки dS характеризуют физической величиной, называемой ***освещенностью*** E_Φ. ***Освещённость численно равна световому потоку световой волны, падающей на участок поверхности единичной площади***, или

$$E_\Phi = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS},$$

где $d\Phi_{\text{пад}}$ – световой поток волны, падающий на поверхность площади dS. Единица освещенности называется ***люкс***, 1 лк =1 лм/1 м^2.

Освещенность можно выразить через ***силу света точечного источника***. Освещенность зависит от расстояния r между источником и поверхностью, силы света I и угла α между нормалью к поверхности и направлением на источник



$$E_\Phi = \frac{I\cos\alpha}{r^2}.$$

Для характеристики световой энергии, излучаемой протяженным источником, вводят ***светимость*** различных его участков, под которой понимают световой поток, испускаемый единицей площади наружу по всем направлениям

$$R_\Phi = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS},$$

а для энергии, испускаемой в определенном направлении в единице телесного угла, – ***яркость***, которая определяется как

$$B_\Phi = \frac{dI}{dS\cdot\cos\vartheta} = \frac{d^2\Phi_{\text{исп}}}{d\Omega\cdot dS\cdot\cos\vartheta}.$$

Здесь dI – сила света элемента dS светящейся поверхности в направлении, составляющим угол ϑ с нормалью к элементу dS; $d\Phi_{исп}$ – световой поток, излучаемый элементом dS в телесный угол $d\Omega$ в том же направлении.