

Лекция 8

ОСНОВЫ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ЛОПАТОЧНЫХ МАШИН

Уравнение неразрывности. Уравнение количества движения



Курс

ОСНОВЫ ЛОПАТОЧНЫХ МАШИН



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

8.1 УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Уравнение неразрывности является записью закона сохранения массы применительно к течению рабочего тела в лопаточных машинах.

Рассмотрим участок стационарного потока рабочего тела в канале произвольной формы (рисунок 2.4.1). Форма канала и все параметры потока на его входе и выходе считаются известными.

Течение в канале разделяется на бесконечное число элементарных струек тока. Каждая из них представляет собой цилиндрическую трубку со сложной криволинейной образующей. Ее поперечное сечение настолько мало, что значения параметров потока на его протяжении можно считать постоянными. Боковые стенки струйки считаются непроницаемыми.

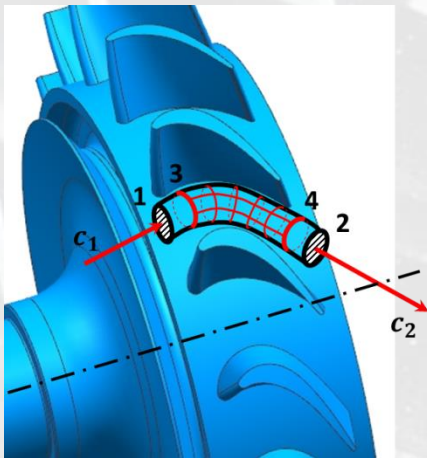


Рисунок 8.1 – Схема течения в канале турбомшины

Рассмотрим течение рабочего тела через случайно выбранную элементарную струйку. В начальный момент времени выделенный объем рабочего тела в ней находился в положении 1-4. Через бесконечно малый отрезок времени dt он переместится в положение 3-2 (рисунок 8.1). Отрезок времени dt принимается настолько малым, что параметры потока в каждом сечении в его

начальный и конечный момент можно считать неизменными ($c_{1n} = c_{3n}$; $c_{4n} = c_{2n}$; $\rho_2 = \rho_4$; $\rho_1 = \rho_3$ и т.д.).

Как видно из рисунка 8.1, участок 3-4 является общим для начального и конечного положения рабочего тела. Поэтому рассматриваемое движение может быть представлено следующим образом: в неизменный в течении dt времени втекает объем 1-3 и вытекает 4-2. Очевидно, что согласно закону сохранения массы для установившегося течения, массы втекающего и вытекающего объемов равны:

$$dm_{1-3} = dm_{4-2} \quad (8.1)$$

Втекающая через границу 3 масса может быть найдена как произведение объема 1-3 dV_{1-3} на плотность рабочего тела во входном сечении. Объем равен произведению поперечной площади элементарной струйки dF_1 на ее длину, которая в свою очередь зависит от скорости потока в направлении нормальном по поверхности течения c_{1n} и времени течения dt :

$$dm_{1-3} = \rho_1 dV_{1-3} = \rho_1 dF_1 c_{1n} dt \quad (8.2a)$$

Аналогично можно найти массу вытекающего рабочего тела:

$$dm_{4-2} = \rho_2 dV_{4-2} = \rho_2 dF_2 c_{2n} dt \quad (8.2б)$$

Приравняв входящую и выходящую массы рабочего тела, и поделив обе части выражения на время dt , можно прийти к равенству, справедливому для рассматриваемой струйки:



$$dG = \frac{dm}{dt} = \rho_1 dF_1 c_{1n} = \rho_2 dF_2 c_{2n} = const \quad (8.3)$$

При этом стоит отметить, что отношение массы, проходящей через рассматриваемое сечение, ко времени рассмотрения – расход рабочего тела в единицу времени G .

Аналогичные выражения могут быть записаны для любой другой элементарной струйки:

$$dG_{\text{струйка№1}} = (\rho_1 dF_1 c_{1n})_{\text{струйка№1}} = (\rho_2 dF_2 c_{2n})_{\text{струйка№1}}$$

$$dG_{\text{струйка№2}} = (\rho_1 dF_1 c_{1n})_{\text{струйка№2}} = (\rho_2 dF_2 c_{2n})_{\text{струйка№2}}$$

...

$$dG_{\text{струйка№i}} = (\rho_1 dF_1 c_{1n})_{\text{струйка№i}} = (\rho_2 dF_2 c_{2n})_{\text{струйка№i}}$$

...

$$dG_{\text{струйка№z}} = (\rho_1 dF_1 c_{1n})_{\text{струйка№z}} = (\rho_2 dF_2 c_{2n})_{\text{струйка№z}} \quad (8.4)$$

Сложив эти равенства получим:

$$G = \sum_{i=1}^z (\rho_1 dF_1 c_{1n})_i = \sum_{i=1}^z (\rho_2 dF_2 c_{2n})_i \quad (8.5)$$

затем перейдем к бесконечно малым dF_1, dF_2 .

$$G = \int_{F_1} \rho_1 dF_1 c_{1n} = \int_{F_2} \rho_2 dF_2 c_{2n} \quad (8.6)$$



Учитывая возможный подвод/отвод рабочего тела в контролируемый объем (межлопаточный канал) через боковые поверхности, которым ранее пренебрегалось, окончательно можно получить следующее выражение:

$$G = \int_{F_2} \rho_2 dF_2 c_{2n} = \int_{F_1} \rho_1 dF_1 c_{1n} + \Delta G_{\text{под}} - \Delta G_{\text{ут}} \quad (8.7)$$

где $\Delta G_{\text{под}}$ – расход подводимого рабочего тела между контрольными сечениями;

$\Delta G_{\text{ут}}$ – утечки из контрольного объема;

Проинтегрировав, окончательно имеем:

$$G = \rho F c_n + \Delta G_{\text{под}} - \Delta G_{\text{ут}} \quad (8.8a)$$

где ρ , c_n – осредненные значения плотности и скорости потока рабочего тела по всему рассматриваемому сечению;

F – площадь рассматриваемого сечения.

В лопаточных машинах величины утечек и втеканий, как правило, значительно меньше расхода рабочего тела и ими обычно пренебрегают. Уравнение неразрывности при этом имеет вид:

$$G = \rho F c_n \quad (8.8б)$$

Это уравнение является *классической формой записи уравнения неразрывности*. Оно справедливо для всех случаев установившегося течения жидкости или газа.



Уравнение неразрывности устанавливает связь между параметрами состояния рабочего тела, скоростью и размерами канала. Однако оно не позволяет установить связь параметров потока с величиной подводимой (или отводимой) работы, в этом его ограниченность.

Из уравнения 8.8 следует, что расход жидкости или газа в любом сечении определяется плотностью рабочего тела, площадью поперечного сечения, через которое проходит рабочее тело и составляющей скорости потока, нормальной к поперечному сечению потока. Здесь следует подчеркнуть, что во всех формах записи уравнения неразрывности фигурирует именно проекция скорости нормальная к плоскости поперечного сечения канала. Если говорить о лопаточных машинах, то для радиального течения на выходе из ЦБК или входе центростремительной турбины расход определяется радиальной составляющей c_r . Для осевых лопаточных машин, а также осевых участков радиальных турбомашин расход рабочего тела определяется осевой составляющей скорости c_a .

Запишем уравнение 8.8б применительно к течению газа в турбомашинах в несколько ином виде:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_2 c_{2n}}{\rho_1 c_{1n}} \quad (8.9)$$

В компрессоре происходит сжатие газа, которое сопровождается ростом его давления и плотности $p_2 > p_1$; $\rho_2 > \rho_1$. Для упрощения дальнейшего вывода примем, что нормальные скорости на входе и выходе из компрессора равны $c_{1n} \approx c_{2n}$. Это допущение яв-



ляется вполне правомочным, поскольку часто лопаточные машины проектируются именно в таком предположении. В любом случае, влияние изменения нормальной скорости на расход значительно меньше, чем влияние плотности ρ .

Учитывая неизменность скорости и рост плотности, на основании анализа уравнения 8.9 можно прийти к выводу, что для компрессора справедливо соотношение:

$$\frac{F_1}{F_2} > 1$$

То есть, площадь проходного сечения на входе в компрессор больше площади выходного сечения. Данное обстоятельство обуславливает сужающуюся к выходу форму меридионального сечения проточной части компрессора и уменьшение высоты лопатки (рисунок 8.2). Особо следует подчеркнуть, что именно уменьшение высоты лопатки является следствием повышения давления в компрессоре (т.е. его нормального функционирования), а не причиной, вопреки часто встречающемуся заблуждению.

Аналогичным образом уравнение 2.4.9 можно применить к течению газа в турбине с тем же допущением ($c_{1n} \approx c_{2n}$). В турбине происходит процесс расширения газа, сопровождающийся снижением давления и плотности рабочего тела $p_1 > p_2$; $\rho_1 > \rho_2$. Неизменность скорости и снижение плотности газа приводят к тому, что для турбины справедливо неравенство:

$$\frac{F_1}{F_2} < 1$$



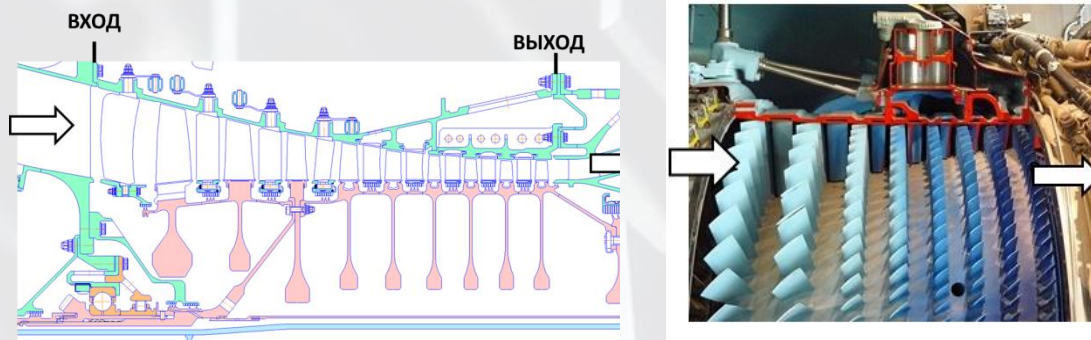


Рисунок 8.2 – Форма проточной части компрессора

То есть, площадь проходного сечения на входе в турбину меньше площади выходного сечения. Данное обстоятельство обуславливает расширяющуюся к выходу форму меридионального сечения проточной части турбины и рост высоты лопатки (рисунок 8.3). Здесь следует подчеркнуть, что увеличение высоты лопатки является именно следствием расширения газа в турбине, а не причиной.



Рисунок 8.3 – Форма проточной части турбины

При расчете и проектировании элементов ГТУ как авиационного, так и наземного назначения полученной ранее формулой 8.8 пользоваться не удобно из-за того, что в большинстве случаев при проектных расчетах и экспериментальных исследованиях известны не статические параметры потока, входящие в уравнение, а заторможенные.

Плотность рабочего тела может быть найдена по плотности заторможенного потока с помощью ГДФ $\varepsilon(\lambda)$:

$$\rho = \rho^* \varepsilon(\lambda) = \rho^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (8.10)$$

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} \quad (8.11)$$

Подставляя найденное выражение в уравнение 8.8б получим:

$$G = \frac{p^*}{RT^*} F c_n \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (8.12)$$

Умножим и разделим правую часть выражения на $a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$ и на $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$:

$$G = \frac{a_{кр} p^*}{RT^*} F \frac{c_n}{a_{кр}} \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (8.13)$$

Учитывая, что отношение физической скорости к критической – приведенная скорость $\lambda \cdot \sin \alpha = c_n / a_{кр}$, а $q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda$, то предыдущее выражение запишется в следующем виде:



$$G = \frac{\sqrt{\frac{2k}{k+1}} RT^* F p^*}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} RT^*} q(\lambda) \cdot \sin \alpha \quad (8.14)$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{\frac{2k}{k+1}}}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{R}} = \sqrt{\frac{k}{R} \frac{2}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}} = \sqrt{\frac{k}{R} \frac{2}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1+\frac{2}{k-1}}} = \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-1}{k-1}+\frac{2}{k-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \end{aligned}$$

Видно, что величина m зависит только от свойств вещества и для конкретного рабочего тела является константой. Для воздуха ее значение равно $m_{\text{в}} = 0,0405 \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}}}$, а для продуктов сгорания керосина $m_{\text{г}} = 0,0397 \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}}} [1, 2]$.

Таким образом, окончательно можно записать:

$$G = \frac{m F p^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda) \cdot \sin \alpha \quad (8.15)$$

где $m = \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$.



Полученное уравнение является *уравнением неразрывности, записанным через параметры торможения.*

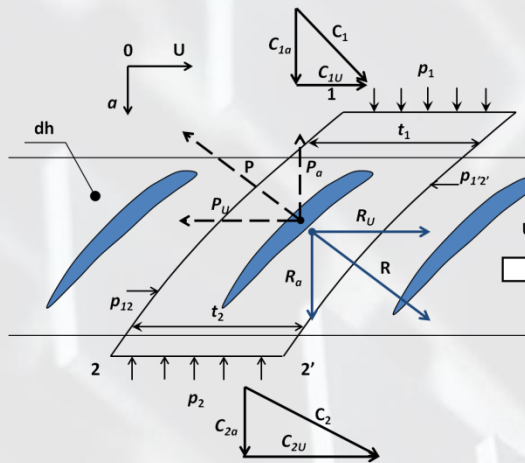
Это уравнение часто используется в практике проектирования и анализа рабочего процесса ГТУ и ее узлов (в частности, турбомашин) в тех случаях, когда необходимо найти расход воздуха или площадь проходного сечения.

8.2 УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

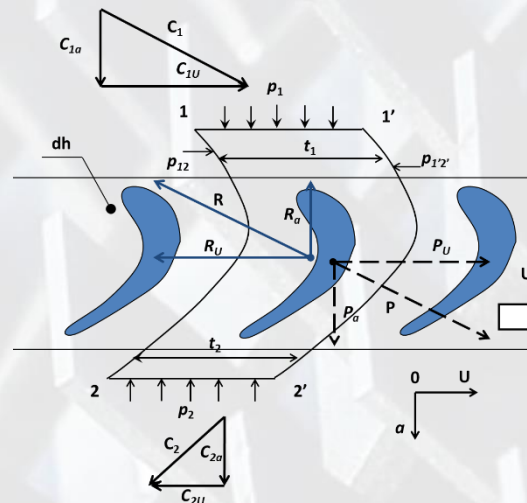
В процессе проектирования ЛМ возникает необходимость определения усилий, действующих со стороны потока на лопатки (и наоборот). Для решения таких задач можно использовать известный из теоретической механики закон сохранения количества движения, который звучит следующим образом: *импульс равнодействующей всех внешних и внутренних сил, действующих на тело массой m , равен изменению количества движения этой массы* [38]:

$$\bar{R}dt = m_T d\bar{c} \quad (8.16)$$

Применим данное уравнение к потоку рабочего тела в осевых компрессоре и турбине. Для этого в каждой лопаточной машине выделим венец (рисунок 8.4) бесконечно малой высоты dh . В этих сечениях поток считается равномерным, как по высоте лопатки, так и в тангенциальном направлении, и установившимся. Кроме того, известна полная информация о потоке ($p_i, c_i, c_{ai}, c_{ui}, \alpha_i$ и т.д.).



Компрессор



Турбина

Рисунок 8.4 – К определению усилий, действующих на лопаточную машину

Через произвольное место одного из межлопаточных каналов проводится поверхность 1-2, перпендикулярная поверхности чертежа (на рис. 8.4). Расположение и форма поверхности могут быть любыми. В соседнем межлопаточном канале на расстоянии шага решетки t_i проводится точно такая же поверхность 1'-2'. Эти поверхности проходят в одинаковых местах двух идентичных межлопаточных каналах. По этой причине параметры потока вдоль поверхности 1-2 будут равны параметрам потока вдоль линии 1'-2'.

Рассмотрим процесс, происходящий в замкнутом контуре 1-1'-2'-2. На него действуют следующие силы:

1. сила давления на торцевую поверхность 1-1' равная произведению $p_1 t_1 dh$, где
 - p_1 – давление на поверхность 1-1';
 - t_1 – шаг решетки в сечении 1-1';
 - dh – высота канала;

2. сила давления на торцевую поверхность 2-2' равная произведению $p_2 t_2 dh$, где:
 - p_2 – давление на поверхность 2-2';
 - $t_2 = t_1 = t$ – шаг решетки в сечении 2-2';
3. силы от давлений на боковые поверхности 1-2 и 1'-2', взаимно уравнивают друг друга, поскольку давления, действующие там, одинаковы и направлены на встречу друг другу;
4. составляющие силы R (R_a и R_u), действующие на газ со стороны лопаток, являются внутренними. Данные составляющие силы по величине равны соответствующим силам P , P_a и P_u , действующим на лопатки со стороны газа, но противоположно направлены.

Запишем уравнение количества движения для компрессора в проекции на ось ou :

$$R_u = \frac{m_c}{dt} (c_{2u} - c_{1u}) = G(c_{2u} - c_{1u}) \quad (8.17)$$

где $G = \rho_i c_{ai} t_i dh$.

Тогда проекция силы, действующей на лопатки со стороны потока в окружном направлении, равна:

$$P_u = -R_u = G(c_{1u} - c_{2u}) \quad (8.18)$$

Как видно из рисунка 8.4, направление действия силы P_u противоположно направлению вращения РК. То есть, в процессе сжа-



тия сила P_u оказывает на лопатки компрессора тормозящее действие. Поэтому для реализации процесса сжатия к решетке РК необходимо подводить работу.

Аналогично запишем уравнение количества движения для компрессора в проекции на ось oa :

$$\begin{aligned} R_a + (p_1 - p_2)t_i dh &= G(c_{2a} - c_{1a}) \\ R_a &= G(c_{2a} - c_{1a}) + (p_2 - p_1)t_i dh \end{aligned} \quad (8.19)$$

Тогда проекция силы, действующей на лопатки со стороны потока в осевом направлении равна:

$$P_a = -R_a = G(c_{1a} - c_{2a}) + (p_1 - p_2)t_i dh \quad (8.20)$$

Проекция силы P_a направлена в сторону входа в компрессор (рисунок 8.4а) и представляет собой одну из составляющих реактивной тяги ГТД.

В компрессоре направление осевой составляющей силы R_a , с которой лопатка воздействует на поток, совпадает с основным направлением движения рабочего тела (рисунок 8.4а). Эта сила проталкивает рабочее тело через компрессор, заставляя его двигаться из области малого в область повышенного давления (жидкость или газ, как известно, обычно движется из области повышенного в область пониженного давления).

$$\begin{aligned} P_u &= G(c_{1u} - c_{2u}) \\ P_a &= G(c_{1a} - c_{2a}) + (p_1 - p_2)t_i dh \end{aligned} \quad (8.21)$$



Таким образом, усилия, действующие на лопатки компрессора со стороны потока, могут быть найдены по следующим соотношениям:

Аналогичным образом можно найти силы, действующие на лопатки турбины [1]:

$$P_u = G(c_{1u} + c_{2u})$$

$$P_a = G(c_{1a} - c_{2a}) + (p_1 - p_2)t_i dh \quad (8.22)$$

Направление окружной составляющей силы P_u , действующей со стороны потока на рабочую лопатку турбины, совпадает с направлением вращения РК. Именно она создает крутящий момент на валу турбины и заставляет ее вращаться. Сила P_a направлена в сторону, противоположную входу потока, поэтому, в отличие от компрессора, она создает отрицательную составляющую силы тяги.

Полученные уравнения 8.21 и 8.22 называются *проекциями уравнения количества движения для стационарного потока*. Данные уравнения были получены Л. Эйлером в 1755 году.

Уравнения 8.21 и 8.22 позволяют вычислить силы P_u и P_a в элементарных ЛВ компрессора и турбины. Их рассчитывают в 6...8 или более сечениях по высоте лопатки, что позволяет создать достаточно правдоподобную картину нагружения пера лопатки для расчета на прочность.

